Вычислительные технологии **Том 13, № 1, 2008**

О свойствах волн Кельвина на сетке*

С. В. Смирнов
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
Владивосток, Россия
e-mail: smirnoff@iacp.dvo.ru

The effects of a space grid approximation on free Kelvin waves are investigated using the f-plane shallow-water equations with the Arakawa B-grids and the free-slip boundary condition on a wall.

Введение

Для решения задач динамики Мирового океана широко применяются математические модели, сформулированные на базе полных уравнений гидротермодинамики. Такие модели описывают широкий спектр движений — баротропные и бароклинные волны Россби, инерционно-гравитационные волны, экваториальные и береговые волны Кельвина и др. Чаще всего модельное решение может быть найдено только приближенно, путем замены исходной дифференциальной системы уравнений некоторым конечномерным аналогом [1], и важную роль играет, в частности, анализ разностной схемы с точки зрения воспроизведения конкретных физических процессов. Во многих работах анализ разностных схем проводят в рамках уравнений мелкой воды [2–4]. Результаты, полученные для системы уравнений мелкой воды, применимы к баротропной (внешней) моде и к бароклинным (внутренним) модам волн в стратифицированном океане, когда горизонтальный масштаб велик по сравнению с вертикальным [5].

В данной работе анализируется воспроизведение береговых волн Кельвина на прямоугольной сетке типа B [2] (рис. 1, *а*) с условиями “свободного скольжения” на стенке. Для системы дифференциально-разностных уравнений, представляющих собой пространственную разностную аппроксимацию линейных уравнений мелкой воды, строятся аналитические решения типа захваченных волн и исследуются зависимости решений от сеточных параметров. Сетка B применяется во многих численных моделях, например, в [6, 7]. Отметим, что бароклинные волны Кельвина [5] играют важную роль в динамике примыкающих к материковому склону областей океана. Волны Кельвина принадлежат к типу волн, захваченных вращением Земли у вертикальной стенки, и обладают следующими отличительными свойствами: амплитуда экспоненциально убывает при удалении от стенки с характерным масштабом, называемым радиусом деформации Россби; нормальная к стенке составляющая скорости — поперечная компонента — равна нулю, составляющая скорости по направлению вдоль берега — продольная компонента — находится в геострофическом равновесии. Результаты анализа для случая одномерной пространственной дискретизации изложены в работе [4], где решения получены в

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-96020) и Президиума РАН (программа № 14).

предположении о геострофическом равновесии для продольной компоненты скорости и показано, что качество описания волн Кельвина в значительной мере зависит от типа сетки, краевых условий и шага сетки.

1. Волны Кельвина

Запишем линейную систему уравнений мелкой воды [3] в декартовой системе координат (x, y, z) с направленной вверх осью z:

$$\partial_t u^* - f v^* = -g \partial_x \eta^*, \tag{1}$$

$$\partial_t v^* + f u^* = -g \partial_y \eta^*, \tag{2}$$

$$\partial_t \eta^* + H(\partial_x u^* + \partial_y v^*) = 0. \tag{3}$$

Здесь и далее t — время; u^* и v^* — компоненты вектора скорости по направлениям x и y; g — ускорение свободного падения; η^* — превышение уровня жидкости над его невозмущенным положением; $\partial_s F$ — частная производная функции F по переменной s. Пусть жидкость находится в бассейне с одной прямой вертикальной стенкой и глубиной $H > 0$ при $x \le 0$. Значения глубины H и параметра Кориолиса f полагаем постоянными. Пусть $f > 0$. Запишем условие отсутствия потока через стенку:

$$u^*|_{x=0} = 0. \tag{4}$$

Известно, что для системы (1)–(3) с краевым условием (4) решением типа волны, захваченной вращением у вертикальной стенки, является волна Кельвина [5]:

$$(v^*, \eta^*) = \left(\sqrt{\frac{g}{H}}, 1\right) \eta_A \exp\left(\frac{fx}{\sqrt{gH}} + i f \omega_K t - i k^* y\right), \quad u^* \equiv 0, \quad x \le 0, \tag{5}$$

где ω_K — безразмерная частота; k^* — волновое число, $k^* = 2\pi/\lambda^*$; λ^* — длина волны; η_A — множитель. Амплитуда волны Кельвина экспоненциально убывает при удалении от берега. Это убывание характеризуется горизонтальным масштабом

$$R^* = \frac{\sqrt{gH}}{f}, \tag{6}$$

который называется радиусом деформации Россби. Фазовые скорости c_K волн Кельвина совпадают с групповыми скоростями,

$$c_K = \frac{f \omega_K}{k^*}, \quad \omega_K = \frac{k^*}{f}\sqrt{gH}. \tag{7}$$

Отметим, что в стационарном случае система (1)–(3) переходит в вырожденную систему уравнений геострофики:

$$-f v_g = -g \partial_x \eta_g, \quad f u_g = -g \partial_y \eta_g, \tag{8}$$

$$\partial_x u_g + \partial_y v_g = 0; \tag{9}$$

краевое условие (4) можно представить в следующем виде:

$$\partial_y \eta_g|_{x=0} = 0. \tag{10}$$

Пусть задано произвольное гладкое распределение η_g, удовлетворяющее условию (10); компоненты u_g и v_g стационарного решения вычисляются с помощью уравнений (8).

2. Разностные уравнения и краевые условия

Пусть система уравнений (1)–(3) решается разностным методом на сетке типа B (рис. 1, *а*), по классификации Аракавы [2]. Сеточные переменные размещаются на прямоугольных подсетках с координатами узлов

$$x_m = \Delta_x(m - M), \quad y_n = \Delta_y n, \quad \Delta_x = r\Delta, \quad \Delta_y = \Delta, \quad \Delta > 0, \tag{11}$$

где m и n — индексы узлов,

$$0 < r \leq 1. \tag{12}$$

В узлах с целыми индексами расположены компоненты скорости u и v, в узлах с "полуцелыми" индексами — η. Будем использовать обозначение $F_{m,n} = F(x_m, y_n)$. Запишем пространственную разностную аппроксимацию уравнений (1)–(3) [2]:

$$\partial_t u - fv = -g\delta_x\overline{\eta}^y, \tag{13}$$

$$\partial_t v + fu = -g\delta_y\overline{\eta}^x, \tag{14}$$

$$\partial_t \eta + H\left(\delta_x\overline{u}^y + \delta_y\overline{v}^x\right) = 0, \tag{15}$$

где разностные операторы определены следующим образом:

$$\delta_x F(x,y) = {\Delta_x}^{-1}\left(F\left(x + \Delta_x/2, y\right) - F\left(x - \Delta_x/2, y\right)\right), \tag{16}$$

$$\delta_y F(x,y) = {\Delta_y}^{-1}\left(F\left(x, y + \Delta_y/2\right) - F\left(x, y - \Delta_y/2\right)\right), \tag{17}$$

$$\overline{F}^x(x,y) = \frac{1}{2}\left(F\left(x + \Delta_x/2, y\right) + F\left(x - \Delta_x/2, y\right)\right), \tag{18}$$

$$\overline{F}^y(x,y) = \frac{1}{2}\left(F\left(x, y + \Delta_y/2\right) + F\left(x, y - \Delta_y/2\right)\right). \tag{19}$$

На твердой границе находятся узлы η (рис. 1, *б*). В фиктивных узлах, расположенных на расстоянии $\Delta_x/2$ от границы, положим

$$u_{M,n} = -u_{M-1,n}, \quad v_{M,n} = v_{M-1,n}. \tag{20}$$

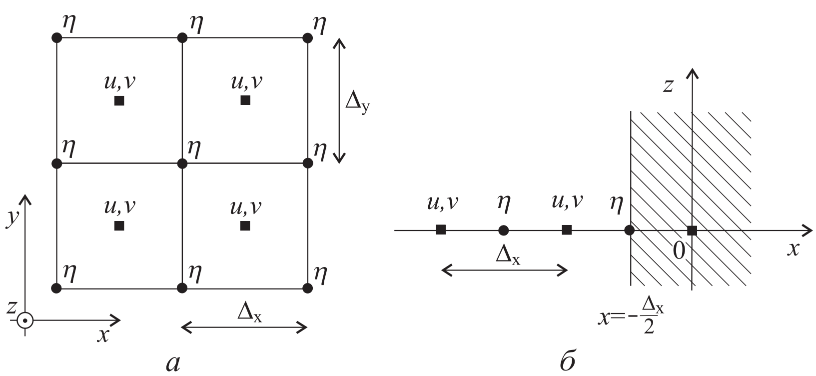

Рис. 1. Расположение узлов и границы: *а* — размещение узлов u, v, η на сетке B; *б* — граница в узлах η

Такие условия применяют для реализации “свободного скольжения” на стенке [4]. Всем узлам на границе припишем уравнение (15), которое с учетом (20) принимает вид

$$\partial_t \eta_{M-1/2,n+1/2} + H\left(\delta_y v - 2\,\Delta_x^{-1}\overline{u}^y\right)_{M-1,n+1/2} = 0. \tag{21}$$

Таким образом, можно считать, что краевые условия описываются уравнением (21).

Решения системы (13)–(15) с краевым условием (21) будем искать в виде распространяющихся вдоль берега сеточных захваченных волн:

$$(u,v,\eta)_{m,n} = (u_0,v_0,\eta_0)\xi^{m-M}\exp\left(if\omega t - ikn\right), \quad m<M, \tag{22}$$

$$|\xi|>1, \tag{23}$$

$$k = k^*\Delta, \tag{24}$$

$$0<k\leq\pi. \tag{25}$$

Здесь k — безразмерное волновое число. Сеточную волну называют двухшаговой, когда $\lambda^* = 2\Delta$ и, следовательно, $k=\pi$. Если решение вида (22) при неограниченном измельчении шага сетки стремится к решению (5), (7) исходной дифференциальной задачи, такое решение будем называть “сеточной” волной Кельвина. Подставив (22) в (13)–(15), получим:

$$iu_0 r\sqrt{\xi}f\omega\Delta - v_0 r\sqrt{\xi}f\Delta + \eta_0\left(\xi-1\right)g\cos\frac{k}{2} = 0, \tag{26}$$

$$u_0\sqrt{\xi}f\Delta + iv_0\sqrt{\xi}f\omega\Delta - i\eta_0\left(1+\xi\right)g\sin\frac{k}{2} = 0, \tag{27}$$

$$u_0 H\left(\xi-1\right)\cos\frac{k}{2} - iv_0 rH\left(1+\xi\right)\sin\frac{k}{2} + i\eta_0 r\sqrt{\xi}f\omega\Delta = 0. \tag{28}$$

Запишем три вспомогательных соотношения:

$$\left(\left(1-\xi\right)\cos\frac{k}{2} + r\omega\left(1+\xi\right)\sin\frac{k}{2}\right)u_0 + i\left(\omega\left(1-\xi\right)\cos\frac{k}{2} + r\left(1+\xi\right)\sin\frac{k}{2}\right)v_0 = 0, \tag{29}$$

$$\sqrt{\xi}f\Delta r\left(1-\omega^2\right)v_0 + \left(\left(1-\xi\right)\cos\frac{k}{2} + r\omega\left(1+\xi\right)\sin\frac{k}{2}\right)g\eta_0 = 0, \tag{30}$$

$$i\left(\left(1-\xi^2\right)R^2\sin k + 2\,r\xi\,\omega\right)rv_0 + \left(R^2\left(1-\xi\right)^2\left(1+\cos k\right) + 2\,\xi\,\omega^2 r^2\right)u_0 = 0. \tag{31}$$

Уравнения (29) и (30) получены путем исключения переменных η_0 и u_0 из (26) и (27), уравнение (31) — исключением η_0 из (26) и (28).

Систему уравнений (26)–(28) представим в матричном виде. Здесь и далее столбец переменных — $(u_0,v_0,\eta_0)^T$. Приравняв нулю детерминант матрицы коэффициентов, получим

$$\omega\left(\left(\omega^2-1\right)r^2 - \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{4}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)\beta_2\right) = 0, \tag{32}$$

где R — безразмерный радиус деформации Россби

$$R = \frac{R^*}{\Delta} = \frac{\sqrt{gH}}{f\Delta}, \tag{33}$$

$$\beta_1 = 2\,R^2\left(1+r^2+\cos k - r^2\cos k\right), \tag{34}$$

$$\beta_2 = 2\,R^2\left(1-r^2+\cos k + r^2\cos k\right). \tag{35}$$

3. Сеточные захваченные волны

В уравнение (21) подставим выражения для функций u, v и η из (22):

$$2u_0 H \cos\frac{k}{2} + 2iv_0 Hr \sin\frac{k}{2} - i\sqrt{\xi} f\omega r\Delta\eta_0 = 0. \tag{36}$$

Систему уравнений (26), (28) и (36) представим в матричном виде и приравняем нулю детерминант матрицы коэффициентов. Получим

$$\left(r\omega \sin k - 2\,R^2 \sin^2 k + (1-\cos k)\, r^2\omega^2\right)\xi - (1-\cos k)\, r^2\omega^2 + 2\,R^2\sin^2 k + r\omega\sin k = 0. \tag{37}$$

Систему уравнений (27), (28) и (36) представим в матричном виде и приравняем нулю детерминант матрицы коэффициентов. Получим

$$\left(\left(r\omega - 2\,R^2 \sin k\right)(1-\cos k) + \omega^2 \sin k\right)\xi - \left(r\omega + 2\,R^2\sin k\right)(1-\cos k) + \omega^2\sin k = 0. \tag{38}$$

Уравнение (37) умножим на $1-\cos k$ и вычтем из него уравнение (38), умноженное на $\sin k$. Из полученного уравнения выразим ξ:

$$\xi = \frac{4\,R^2 r\omega\sin k + 8\,R^4\sin^2 k - \omega^2\beta_1}{\omega^2\beta_2}. \tag{39}$$

Исключив из (37) и (38) переменную ξ, получим

$$\sin k\left(r^2\omega^4 - \left(\beta_1 + r^2\right)\omega^2 + 4\,R^4\sin^2 k\right) = 0. \tag{40}$$

Пусть выполняется уравнение

$$r^2\omega^4 - \left(\beta_1 + r^2\right)\omega^2 + 4\,R^4\sin^2 k = 0, \tag{41}$$

решениями которого являются

$$\omega_1 = \frac{1}{r\sqrt{2}}\sqrt{\beta_1 + r^2 - \beta_3}, \tag{42}$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{r\sqrt{2}}\sqrt{\beta_1 + r^2 + \beta_3}, \tag{43}$$

$$\omega_{3,4} = \mp\frac{1}{r\sqrt{2}}\sqrt{\beta_1 + r^2 \mp \beta_3}, \tag{44}$$

где

$$\beta_3 = \sqrt{\left(\beta_1 + r^2\right)^2 - 16\, r^2 R^4 \sin^2 k}. \tag{45}$$

В (44) и далее верхний знак в выражении в правой части соответствует первому значению индекса в левой части, нижний знак — второму значению индекса. Подставив выражения для ω из (42)–(44) в (39), получим выражения для ξ, которые можно привести к следующему виду:

$$\xi_1 = \frac{1}{\beta_2}\left(r^2 + \beta_3 + r\sqrt{2}\sqrt{\beta_1 + r^2 + \beta_3}\right), \tag{46}$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\beta_2}\left(r^2 - \beta_3 - r\sqrt{2}\sqrt{\beta_1 + r^2 - \beta_3}\right), \tag{47}$$

$$\xi_{3,4} = \frac{1}{\beta_2}\left(r^2 \pm \beta_3 \mp r\sqrt{2}\sqrt{\beta_1 + r^2 \pm \beta_3}\right). \tag{48}$$

Запишем некоторые вспомогательные соотношения, которые следуют из определений (34), (35) и (45) при условиях (12) и (25):

$$\beta_1 > 0, \quad {\beta_1}^2 = {\beta_2}^2 + 16\,R^4 r^2 \sin^2 k, \quad \beta_3 = \sqrt{r^4 + 2\,r^2\beta_1 + {\beta_2}^2}. \tag{49}$$

С применением (49) получаем следующие результаты:

$$\xi_1\xi_3 = 1, \quad \xi_2\xi_4 = 1, \quad |\xi_1| > 1, \tag{50}$$

$$|\xi_2| \geq \frac{\beta_3 - r^2}{|\beta_2|} \geq \frac{\sqrt{r^4 + 2\,r^2\,|\beta_2| + {\beta_2}^2} - r^2}{|\beta_2|} = 1, \quad \xi_2|_{k=\pi} = 1. \tag{51}$$

Из (50) и (51) следует, что для решений 3 и 4 условие (23) не выполняется и требуется рассмотреть только решение 1, определяемое соотношениями (42) и (46), и решение 2, определяемое (43) и (47), при $0 < k < \pi$. Отметим, что уравнение (32) выполняется при подстановке решения 1 или решения 2. Можно показать, что функция $\omega_1(k)$ достигает максимума в единственной точке $k = k_0$:

$$\left.\frac{\partial\omega_1}{\partial k}\right|_{k=k_0} = 0, \quad \cos k_0 = -\frac{2\,R^2\,(1 - r^2)}{2\,R^2 r^2 + r^2 + 2\,R^2 + r\sqrt{4\,R^2 r^2 + r^2 + 4\,R^2}}. \tag{52}$$

Графики функций $\omega(k)$, $\omega(k)/\omega_K(k)$ и $\xi(k)$ для решений 1 и 2 при $R = 1$, $r = 1/3$ представлены на рис. 2, *а*, *б* и *в* соответственно. Графики функций $u_0/(iv_0)$, $\mathrm{Re}\,(\eta_0/v_0) \times \sqrt{g/H}$ и $\mathrm{Im}\,(\eta_0/v_0)\,\sqrt{g/H}$ представлены на рис. 3, *а*, *б* и *в* соответственно. Цифра *1* или *2* у кривой соответствует номеру решения. Значения функций, представленных на рис. 3, вычислены с применением (29) и (30).

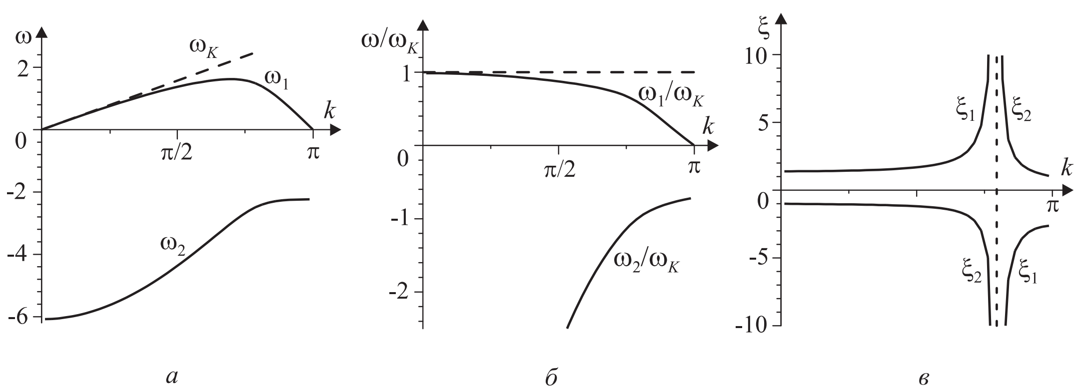

Рис. 2. Графики $\omega(k)$, $\omega(k)/\omega_K(k)$ и $\xi(k)$ при $R = 1,\ r = 1/3$

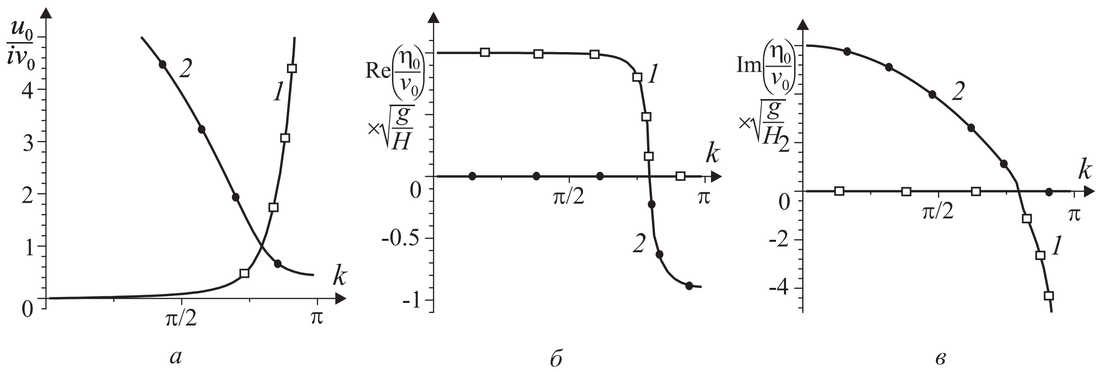

Рис. 3. Графики функций $u_0/(iv_0)$, $\mathrm{Re}\,(\eta_0/v_0)\,\sqrt{g/H}$ и $\mathrm{Im}\,(\eta_0/v_0)\,\sqrt{g/H}$ при $R = 1,\ r = 1/3$

У решений ξ_1 и ξ_2 есть особенность при $\beta_2 = 0$. На рис. 2, *в* этому случаю соответствует вертикальная штриховая линия. Обратимся к исходным уравнениям и предположим, что при $\beta_2 = 0$ решение существует в следующем виде:

$$\begin{cases} (u_{M-1,n}, v_{M-1,n}) = (u_1, v_1) \exp\left(if\omega t - ikn\right), \\ \eta_{M-1/2,n+1/2} = \eta_1 \exp\left(if\omega t - ik(n+1/2)\right), \\ u_{m,n} = v_{m,n} = \eta_{m+1/2,n+1/2} = 0, \quad m < M-1. \end{cases} \tag{53}$$

Подставив выражения из (53) в (13) и (14) при $m = M - 1$, в (15) — при $m = M - 3/2$ и в (21) соответственно, получим систему линейных уравнений для u_1, v_1 и η_1:

$$iu_1 f\omega\, r\Delta - v_1 fr\Delta + \eta_1 g\cos\frac{k}{2} = 0, \tag{54}$$

$$u_1\Delta\, f + iv_1\Delta f\omega - i\eta_1 g\sin\frac{k}{2} = 0, \tag{55}$$

$$u_1\cos\frac{k}{2} - iv_1 r\sin\frac{k}{2} = 0, \tag{56}$$

$$-2u_1\, H\cos\frac{k}{2} - 2v_1\, iHr\sin\frac{k}{2} + i\eta_1 f\omega\, r\Delta = 0. \tag{57}$$

Запишем условие линейной независимости уравнений (54)—(56):

$$1 - r^2 + \left(1 + r^2\right)\cos k = 0 \quad (\beta_2 = 0). \tag{58}$$

Отметим, что, подставив в (35) выражение для $\cos k$ из (58), получим $\beta_2 = 0$. Условие линейной независимости уравнений (54), (56) и (57) можно представить в виде квадратного уравнения для ω:

$$\omega^2\left(1 + r^2\right) + \omega\,\left(1 + r^2\right) - 4\,R^2 = 0, \quad \beta_2 = 0. \tag{59}$$

С применением (58) преобразуем уравнение (41) к следующему виду:

$$\left(\omega^2\left(1 + r^2\right) + \omega\,\left(1 + r^2\right) - 4\,R^2\right)\left(\omega^2\left(1 + r^2\right) - \omega\,\left(1 + r^2\right) - 4\,R^2\right) = 0, \quad \beta_2 = 0. \tag{60}$$

Очевидно, что решения уравнения (59) совпадают с двумя решениями (60). Этими двумя решениями являются $\omega_1|_{\beta_2=0}$ и $\omega_2|_{\beta_2=0}$:

$$\omega_{1,2}|_{\beta_2=0} = \pm\frac{\sqrt{r^2+8\,R^2+1\mp\sqrt{1+r^2+16\,R^2}\sqrt{1+r^2}}}{\sqrt{2}\sqrt{1+r^2}} = \pm\frac{\sqrt{1+r^2+16\,R^2}}{2\sqrt{1+r^2}} - \frac{1}{2}. \quad (61)$$

Покажем, что решение 1 при неограниченном измельчении шага сетки стремится к решению (5), (7). В (29) и (30) подставим выражения (42) и (46) для ω и ξ. В полученные уравнения подставим выражения (24) и (33) для k и R. Полагаем, что k^* не зависит от Δ. Находим пределы

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{u_0}{v_0}\bigg|_{\omega=\omega_1,\xi=\xi_1} = 0, \qquad \lim_{\Delta\to 0}\frac{\eta_0}{v_0}\bigg|_{\omega=\omega_1,\xi=\xi_1} = \sqrt{\frac{H}{g}}. \quad (62)$$

Далее находим пределы

$$\lim_{\Delta\to 0}\omega_1 = \frac{\sqrt{gH}}{f}k^*, \qquad \lim_{\Delta\to 0}\xi_1^{m-M} = \lim_{\Delta\to 0}\xi_1^{x_m/(r\Delta)} = \exp\left(\frac{fx}{\sqrt{gH}}\right), \quad (63)$$

где ω_1 и ξ_1 определены в (42) и (46) и предполагается, что $x_m = x$ и k^* не зависят от Δ. Из (62) и (63) следует, что при $\Delta \to 0$ решение 1 переходит к пределу, совпадающему с (5), (7).

При неограниченном измельчении шага сетки в направлении по нормали к границе решение ω_1 стремится к ω_G — известному решению для чисто гравитационной волны на одномерной сетке с “разнесенными” узлами:

$$\lim_{r\to 0}\omega_1 = \omega_G, \qquad \lim_{r\to 0}\xi_1^{m-M} = \lim_{r\to 0}\xi_1^{x_m/(r\Delta)} = \exp\left(\frac{\sqrt{2}fx}{\sqrt{gH\,(1+\cos k)}}\right), \quad (64)$$

$$\omega_G = 2\,\frac{\sqrt{gH}}{\Delta\,f}\sin\frac{k^*\Delta}{2}. \quad (65)$$

При исследовании зависимости решения 1 от сеточных параметров получены неравенства

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial\Delta}\bigg|_{0<k\le 0} < 0, \quad (66)$$

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial r}\bigg|_{0<k<0} < 0. \quad (67)$$

Кратко изложим доказательство неравенства (66). В (42) последовательно подставим выражения для β_3 из (45), для β_1 из (34), для k и R из (24) и (33), продифференцируем по Δ и представим в следующем виде:

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial\Delta} = A_1\left(8\,R^4r^2\sin k\,(k\cos k - 2\sin k) - \left(\beta_1 + R^2k\sin k\left(1-r^2\right)\right)\left(\beta_3-\beta_1-r^2\right)\right), \quad (68)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{r\Delta\,\beta_3\sqrt{2}\sqrt{\beta_1+r^2-\beta_3}} > 0, \qquad 0<k<\pi. \quad (69)$$

Производную при $k = \pi$, $\Delta = \Delta_1$ определим как предел следующего отношения:

$$\left.\frac{\partial\omega_1}{\partial\Delta}\right|_{k=\pi} = \lim_{\Delta_2\to\Delta_1-0} \frac{\omega_1|_{\Delta=\Delta_1,k^*=\pi/\Delta_1} - \omega_1|_{\Delta=\Delta_2,k^*=\pi/\Delta_1}}{\Delta_1-\Delta_2} = -2\,\frac{{R_1}^2\pi}{r\Delta_1\sqrt{4\,{R_1}^2+1}} < 0, \quad (70)$$

где $R_1 = \sqrt{gH}/(f\Delta_1)$. Частная производная в (70) вычисляется при фиксированной длине волны $\lambda^* = 2\pi/k^* = 2\Delta_1 > 2\Delta_2$.

Получим верхнюю оценку для правой части (68). Отметим, что β_3 входит в правую часть уравнения (68) с отрицательным сомножителем. Поэтому при оценке правой части (68) β_3 можно заменить нижней оценкой. Запишем вспомогательные соотношения:

$$\beta_3 > r^2 + |\beta_2|\,, \quad 0 < k < \pi; \quad (71)$$

$$1 - \cos k - \frac{k}{2}\sin k > 0, \quad 0 < k < \pi. \quad (72)$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\beta_2 \geq 0$. При выводе неравенства заменим β_3 на $r^2+\beta_2+C$, где C — некоторая положительная константа, $C > 0$. С учетом (34), (35) и (72) получим

$$\left.\frac{\partial\omega_1}{\partial\Delta}\right|_{\beta_2\geq 0} \leq -4\,\beta_2 A_1 R^2 r^2\left(1-\cos k - \frac{k}{2}\sin k\right) - A_1 C\left(\beta_1 + R^2 k\sin k\left(1-r^2\right)\right) < 0. \quad (73)$$

2. Пусть $\beta_2 < 0$. Теперь заменим β_3 на $r^2 - \beta_2$ и с учетом (34), (35) и (25) получим

$$\left.\frac{\partial\omega_1}{\partial\Delta}\right|_{\beta_2< 0} \leq 2\,\beta_2 A_1\,R^2\left(2+2\cos k + k\sin k\right) < 0. \quad (74)$$

Из (70), (73) и (74) следует (66) и можно сделать вывод, что решение ω_1 монотонно стремится к ω_K с уменьшением Δ.

Теперь докажем неравенство (67). В (42) последовательно подставим выражения для β_3 из (45) и для β_1 из (34). Результат продифференцируем по r и представим в следующем виде:

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial r} = A_2\left(r^2+\beta_2-\beta_3\right), \quad (75)$$

где

$$A_2 = \frac{\sqrt{2}R^2\left(1+\cos k\right)}{r^2\beta_3\sqrt{\beta_1+r^2-\beta_3}} > 0. \quad (76)$$

Воспользовавшись вспомогательным неравенством (71), получим (67). Из (67) следует, что ω_1 монотонно стремится к ω_G при уменьшении параметра r. Отметим, что $\omega_1 = 0$ при $k = \pi$, поэтому

$$\left.\frac{\partial\omega_1}{\partial r}\right|_{k=\pi} = 0. \quad (77)$$

Рассмотрим случай, когда $k = \pi$. Представим в матричном виде систему уравнений (27), (28) и (36) при $k = \pi$. Приравняв нулю детерминант матрицы коэффициентов, получим

$$\omega\,\xi f^2\Delta^3\,r^2 H\left(\xi-1\right) = 0. \quad (78)$$

Уравнение (78) выполняется только при $\omega = 0$. Подставим $\omega = 0$ и $k = \pi$ в уравнения (26)–(28) и (36). Из четырех полученных уравнений три уравнения совпадают. Результат можно записать в следующем виде:

$$\left(\sqrt{\xi} f u_0 \Delta - ig\left(\xi + 1\right)\eta_0\right)_{k=\pi} = 0, \quad v_0|_{k=\pi} = 0, \quad \omega|_{k=\pi} = 0. \tag{79}$$

Из (79) следует, что решения существуют при любом ξ, удовлетворяющем условию (25). Например, можно положить $\xi = \xi_1|_{k=\pi} < 1$. По-видимому, такие стационарные решения следует трактовать как сеточные двухшаговые захваченные волны, поскольку на границе не выполняется разностный аналог условия (10).

Заключение

В работе построены решения типа захваченных волн для системы дифференциально-разностных уравнений, представляющих собой пространственную разностную аппроксимацию линейных уравнений мелкой воды, и исследованы зависимости полученных решений от параметров сетки. Показано, что решение 1, определяемое соотношениями (42) и (46), при неограниченном дроблении шага сетки монотонно стремится к решению типа волны Кельвина исходной дифференциальной задачи. При неограниченном измельчении шага сетки только в направлении по нормали к границе, частота решения 1 монотонно стремится к частоте чисто гравитационной волны на одномерной сетке с “разнесенными” узлами. Решение 2, определяемое (43) и (47), характеризуется отрицательной фазовой скоростью и, следовательно, является чисто вычислительным решением. По-видимому, его необходимо отфильтровывать или подавлять. Важная особенность решения 2 — высокая частота во всем диапазоне длин волн. Решение такого вида отсутствует в работе [4], где предполагается геострофическое равновесие для продольной компоненты скорости.

У решения 1 поперечная компонента не равна нулю (см. рис. 3, *а*), отсутствует единый для всех длин волн масштаб экспоненциального убывания амплитуды при удалении от стенки, а при $\xi_1 < -1$ от узла к узлу изменяется даже знак амплитуды (рис. 3, *в*). Поскольку решение 1 не обладает отличительными свойствами волны Кельвина, для него целесообразно применять термин “сеточная” волна Кельвина. Предположим теперь, что при $x = x_1$ некоторая совокупность “сеточных” волн Кельвина образует волновой пакет. При $x = x_2 \neq x_1$ структура волнового пакета нарушается, поскольку амплитуда каждой волны в этой совокупности изменилась индивидуально — как функция длины волны. По-видимому, рассматривать распространение волновых пакетов можно только для совокупностей “сеточных” волн Кельвина с относительно близкими значениями ξ.

Следует отметить, что исходная система дифференциальных уравнений записана в линейном приближении и не содержит диссипативных слагаемых, а геометрия бассейна предельно упрощена. Применительно к анализу разностной схемы результаты работы носят качественный характер. Полученные аналитические решения могут быть применены в разработке и анализе вычислительных условий на жидких границах, при интерпретации результатов вычислительных экспериментов, например, по расчету бароклинного отклика океана на крупномасштабное воздействие при наличии берега, когда в модельном бассейне узкий шельф и резкий материковый склон заменены вертикальной стенкой.

Список литературы

[1] Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л.: Гидрометеоиздат, 1987. 296 с.

[2] Мезингер Ф., Аракава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях: пер. с англ. Л.: Гидрометеоиздат, 1979. 136 с.

[3] Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В. Теория мелкой воды. Океанологические задачи и численные методы. Л.: Гидрометеоиздат, 1977. 208 с.

[4] Hsieh W.W., Davey M.K., Wajsowics R.S. The free Kelvin wave in finite-difference numerical models // J. of Phys. Oceanogr. 1983. Vol. 13, N 8. P. 1383–1397.

[5] Гилл А. Динамика атмосферы и океана: пер. с англ. В 2 т. М.: Мир, 1986. 815 с.

[6] Bryan K. A numerical method for the study of the circulation of the world ocean // J. Comput. Phys. 1969. Vol. 4. P. 347–376.

[7] Дианский Н.А., Багно А.В., Залесный В.Б. Сигма-модель глобальной циркуляции океана и ее чувствительность к вариациям напряжения трения ветра // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2002. Т. 38, № 4. С. 537–556.

Поступила в редакцию 1 июня 2004 г.,
в переработанном виде — 22 августа 2007 г.