ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ВОДОЙ ИЗ ПЛАСТА*

В. И. Дробышевич, С. А. Литвиненко
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: drob@sscc.ru, litvin@labchem.sscc.ru

In this paper we consider a two-phase filtration model of the incompressible fluid. The model accounts for the effects of capillary pressure and gravitational force. A balanced monotonic finite difference scheme is developed and an effective algorithm for its realization is proposed.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать процесс фильтрации двухфазной жидкости, состоящей из воды и нефти, сквозь пористую среду. Пласт считается однородным и тонким, что позволяет использовать для анализа двухмерную модель. Простейшей моделью двухфазной фильтрации является модель Баклея—Леверетта. Учет же капиллярных сил приводит к более сложной модели Маскета—Леверетта. Хороший обзор различных моделей фильтрации имеется в монографиях [1, 2]. Различные аспекты численного решения задач фильтрации обсуждаются в работах [1–4].

Задача двухфазной фильтрации несжимаемых жидкостей в пористой однородной среде рассматривается в двухмерной XZ-постановке [1]. В этом случае пористость m, плотности фаз ρ_i, динамические вязкости μ_i ($i = 1$ (нефть), 2 (вода)) не зависят от t, x, z. Течение происходит в двухмерной XZ области $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_z]$ (рис. 1). Внешняя граница области $\gamma = \partial\Omega = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ ($\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$). На части границы γ_1 длиной L_1 задается входной поток Q [м^2/с], а на γ_2 длиной L_2 — выходной поток $-Q$. На γ_0 ставится условие непротекания.

Используются следующие законы и соотношения:

— уравнение неразрывности i-й фазы, деленное на ρ_i,

$$m\frac{\partial S_i}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\vec{W}_i\right) = 0, \tag{1}$$

где S_i — насыщенность i-й фазы, $S_1 + S_2 = 1$, $\vec{W}_i$ — скорость фильтрации i-й фазы, m — пористость слоя. Обозначим через $S = S_2$, $S_1 = 1 - S$;

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00164-а).

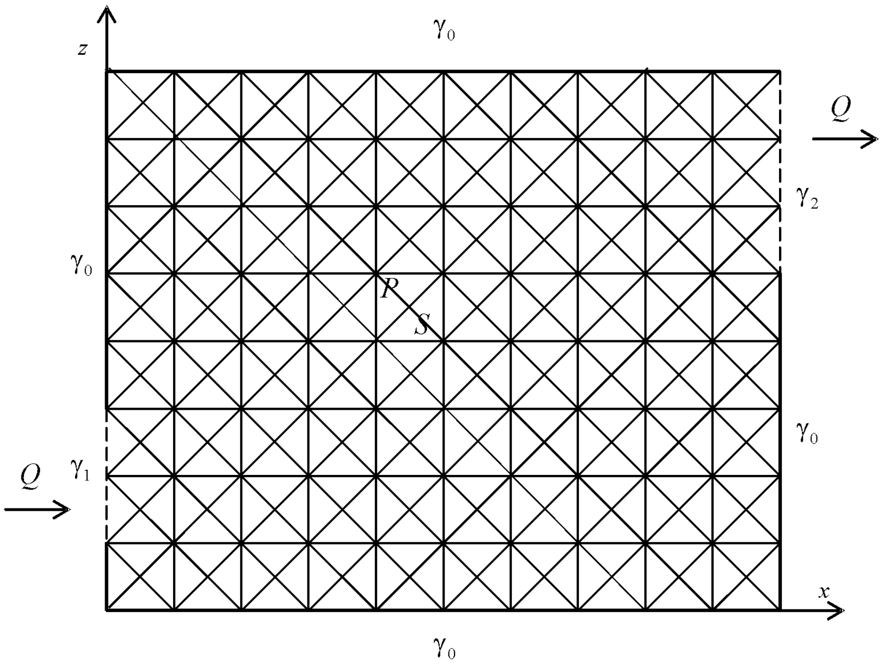

Рис. 1. Расчетная область

— обобщенный закон Дарси. Фазовые потенциалы, если ось z направлена против силы тяжести, можно записать в виде

$$\phi_i = P_i + \rho_i g z,$$

тогда

$$\vec{W}_i = -k_0 \frac{f_i\left(S\right)}{\mu_i} \nabla(\phi_i) = -k_i\left(S\right)\left(\nabla(P_i) + \rho_i g \vec{e}_2\right),$$

где k_0 — коэффициент проницаемости, $f_i(S)$ — относительные фазовые проницаемости, характеризующие зависимость скорости фильтрации от водонасыщенности, μ_i — коэффициент динамической вязкости, $\vec{e}_2 = (0,1)^T$;

— соотношение на капиллярные давления

$$P_1 - P_2 = P_k\left(S\right),$$

где $P_k(S)$ — капиллярное давление. Капиллярное давление, как и относительные фазовые проницаемости, является экспериментально измеряемой функцией водонасыщенности. Пусть $0 < \underline{S} < \overline{S} < 1$. Тогда $f_1(S) = 0$ при $\overline{S} \le S \le 1$, а $f_2(S) = 0$ при $0 \le S \le \underline{S}$. Кроме того, имеет место неравенство

$$k(S) = k_1(S) + k_2(S) \ge \underline{k} > 0, \quad 0 \le S \le 1.$$

Определим $P = P_2$. Так как

$$P_k' = \frac{dP_k}{dS} \le 0, \quad \nabla P_1 = \nabla P - Ps(S)\nabla S, \quad Ps(S) = |P_k'|.$$

Таким образом

$$\vec{W}_2 = -k_2(S)\nabla(P) - k_2(S)\rho_2 g\vec{e}_2, \quad \vec{W}_1 = -k_1(S)(\nabla(P) - Ps(S)\nabla S + \rho_1 g\vec{e}_2),$$
$$\vec{W} = \vec{W}_1 + \vec{W}_2 = -k(S)\nabla(P) + k_1(S)Ps(S)\nabla S - g(k_1(S)\rho_1 + k_2(S)\rho_2)\vec{e}_2. \quad (2)$$

Обозначим $k(S) = k_1(S) + k_2(S)$. Складывая два уравнения (1), заменяя $\vec{W}$ по закону Дарси (2), получим эллиптическое уравнение для определения давления

$$-\mathrm{div}(k(S))\nabla P = -\mathrm{div}(k_1(S)Ps(S)|\nabla S) + g(\rho_1\frac{\partial k_1(S)}{\partial z} + \rho_2\frac{\partial k_2(S)}{\partial z}) \quad (3)$$

и параболическое уравнение для определения водонасыщенности

$$m\frac{\partial S}{\partial t} - \mathrm{div}(k_2(S)\nabla P) - g\rho_2\frac{\partial k_2(S)}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Как уже отмечалось, суммарный входной и выходной поток жидкости равен Q. На вход подается только вода и $Q_{2\mathrm{in}} = Q$, $Q_{1\mathrm{in}} = 0$. На выходе первое время вытекает нефть, а затем смесь воды и нефти. Зададим [1]: $Q_{1\mathrm{out}} = Qk_1(s)/k(s)$, $Q_{2\mathrm{out}} = Qk_2(s)/k(s)$.

Пусть $\vec{n}$ — единичный вектор внешней к области нормали.Тогда имеем

$$-\vec{W}\cdot\vec{n} = Q/L_1, \ z\subset\gamma_1; \quad -\vec{W}\cdot\vec{n} = -Q/L_2, \ z\subset\gamma_2; \quad -\vec{W}\cdot\vec{n} = 0, \ z\subset\gamma_0; \quad (5)$$
$$-\vec{W}_2\cdot\vec{n} = Q/L_1, \ z\subset\gamma_1; \ -\vec{W}_2\cdot\vec{n} = -\frac{Q\cdot k_2(s)}{L_2\cdot k(s)}, \ z\subset\gamma_2; \ -\vec{W}_2\cdot\vec{n} = 0, \ z\subset\gamma_0. \quad (6)$$

Таким образом, для определения давления P решается эллиптическое уравнение (3) с граничными условиями второго рода (5), а для определения водонасыщенности S — параболическое уравнение (4) с граничными условиями (6) и начальными данными $P(0,x,z) = 0$, $S(0,x,z) = S^0(x,z)$. Эллиптическое уравнение с граничными условиями второго рода имеет неединственное решение. Параболическое уравнение является уравнением с вырождающимся коэффициентом диффузии.

2. Разностная схема и алгоритм решения

Будем решать задачу (3)–(6) в прямоугольнике со сторонами L_x, L_z. Область разбивается на расчетные ячейки координатными линиями ih_x, $i = 0,:,N$; jh_z, $j = 0,:,L$; $h_x = L_x/N$, $h_z = L_z/L$. Объем расчетной ячейки равен $V_h = h_x h_z$. Расчетные узлы находятся в центре расчетной ячейки $x_i = (i-1/2)h_x$, $i = 1,:,N$, $z_j = (j-1/2)h_z$, $j = 1,:,L$, $S^0(x,z)$=0.2. Разностная схема строится интегрированием уравнений (4), (6) по каждой расчетной ячейке с учетом граничных условий (5), (6) $\frac{1}{V_h}\int\limits_{V_h} dV$. Предположим, что $L_1 = L_2 = h_z$ и j_1 — номер ячейки входа, а j_2 — номер ячейки выхода.

Тогда на n-м временно́м шаге получаем систему алгебраических уравнений:

$$A(s^n)p^n = B(s^n)s^n + Q/V_h|_{j_1} - Q/V_h|_{j_2},$$
$$s^n = s^{n-1} - \tau C(s^n)p^n + \tau\left(Q/V_h|_{j_1} - \frac{k_2(s^n)}{k(s^n)}Q/V_h|_{j_2}\right).$$

Неявная система уравнений итерируется: $s^{n,0} = s^{n-1}$, $p^{n,0} = p^{n-1}$.

$$A(s^{n,k})p^{n,k+1} = B(s^{n,k})s^{n,k} + Q/V_h|_{j_1} - Q/V_h|_{j_2}, \tag{7}$$

$$s^{n,k+1} = s^{n-1} - \tau C(s^{n,k})p^{n,k+1} + \tau \left(Q/V_h|_{j_1} - \frac{k_2(s^{n,k})}{k(s^{n,k})} Q/V_h|_{j_2} \right). \tag{8}$$

Матрицы A, B, C — симметричные, положительно полуопределенные. Уравнение (7) на каждом шаге итераций по s решаем итерационно переобусловленным методом сопряженных градиентов [5]. В качестве переобусловливателя берется симметричная положительно полуопределенная матрица R, соответствующая пятиточечной аппроксимации оператора Лапласа в прямоугольнике с краевыми условиями второго рода. Поскольку $kerA = kerR$, то решение задачи (7) лежит в подпространстве imA [5]. После окончания итераций для выделения единственного решения проводилась его перенормировка.

Для нахождения решения этой задачи с матрицей переобусловливателя R в сеточной области применяется хорошо известный метод разделения переменных с применением быстрого дискретного преобразования Фурье при разложении решения по собственным функциям разностного оператора по z [6]. Уравнение (8) решается по явным формулам.

3. Результаты моделирования

Расчеты проводились в области с $L_x = 100$ м и $L_z = 25$ м. При этом вход воды производился в ячейке $x = 0.0$, $z = 0.0$ или $x = 0.0$, $z = L_z$, а отбор нефти — всегда в ячейке $x = L_x$, $z = L_z$. Расчеты проводились при $h_x = h_z = 1$ м и $L_1 = L_2 = h_z$, $m = 0.5$. Полный объем нефти в слое $V_f = 10^3$ м^2. Расход воды менялся от 10^{-1} до 10^{-4} м^2/с. Для того чтобы обеспечить такие расходы, требуется значительный перепад давления между входной и выходной ячейками. При расходе воды 10^{-1} перепад давления необходим $1.2 \cdot 10^8$ Па, 10^{-2} — $1.4 \cdot 10^7$ Па, 10^{-3} — $1.8 \cdot 10^6$ Па, 10^{-4} — $2.5 \cdot 10^5$ Па (2.5 атм).

При этом использовались следующие параметры модели:

$k_0 = 3.06 \cdot 10^{-12}$ м^2, $\mu_1 = 9.28 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с), $\mu_2 = 1.15 \cdot 10^{-4}$ кг/(м $\cdot$ с).

Для относительных фазовых проницаемостей использовались формулы [1]:

$$f_1(S) = \begin{cases} 1 & \text{при } (0 < S \le \underline{S}), \\ \left(\dfrac{\overline{S} - S}{\overline{S} - \underline{S}} \right)^3 & \text{при } (\underline{S} \le S \le \overline{S}), \\ 0 & \text{при } (\overline{S} \le S < 1), \end{cases} \qquad f_2(S) = \begin{cases} 0 & \text{при } (0 < S \le \underline{S}), \\ \left(\dfrac{S - \underline{S}}{\overline{S} - \underline{S}} \right)^3 & \text{при } (\underline{S} \le S \le \overline{S}), \\ 1 & \text{при } (\overline{S} \le S < 1), \end{cases}$$

$\overline{S} = 0.8$, $\underline{S} = 0.2$.

Модуль производной от функции Леверетта задавался в виде:

$$|P_k'(S)| = k_p \left(0.072/S^2 + 0.5\right), \quad k_p = 2.8 \cdot 10^5 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с}^2).$$

Из уравнения (4), граничных условий (5) и начальных условий легко получается балансное соотношение:

$$m \int\limits_{\Omega} \left(S(t,x,z) - S^0(0,x,z) \right) \partial\Omega \;=\; Qt \;-\; \frac{Q}{L_2} \int\limits_0^t \int\limits_{\gamma_2} \frac{k_2(S(t'))}{k(S(t'))} \partial\gamma_2 \partial t'. \tag{9}$$

Таким образом, количество вышедшей из слоя нефти за время t равно $V_p(t)$, т. е. равно полному объему закачанной воды минус количество воды в выходном потоке за это же время.

На рис. 2 показано распределение по времени доли закачанной воды Qt/V_f и вышедшей нефти $V_p(t)/V_f$ относительно полного запаса нефти в слое.

Как видно, до появления воды в выходном потоке эти доли совпадают, а затем доля вышедшей нефти быстро выходит на стационар.

Прорыв воды происходит, когда относительная доля закачанной воды равна 0.3265–0.373 в зависимости от режима, а полная доля отобранной нефти равна 0.5–0.55.

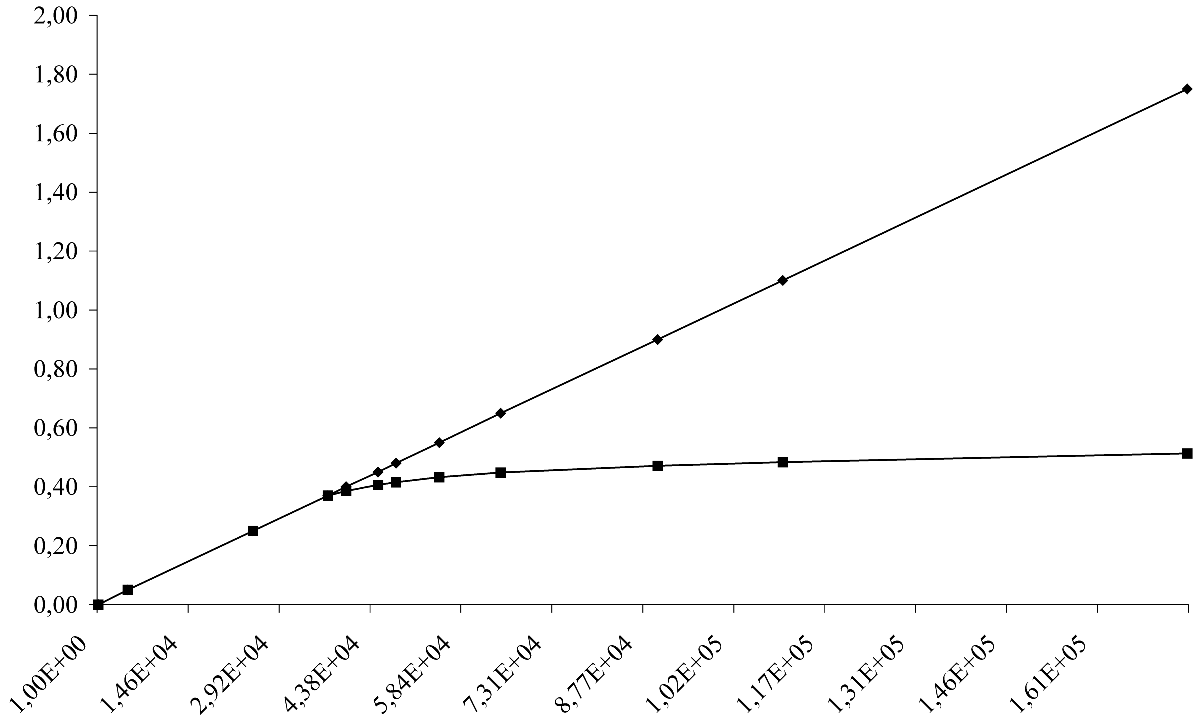

Рис. 2. Доли закачанной воды (линия ♦) и вышедшей нефти (линия ■)

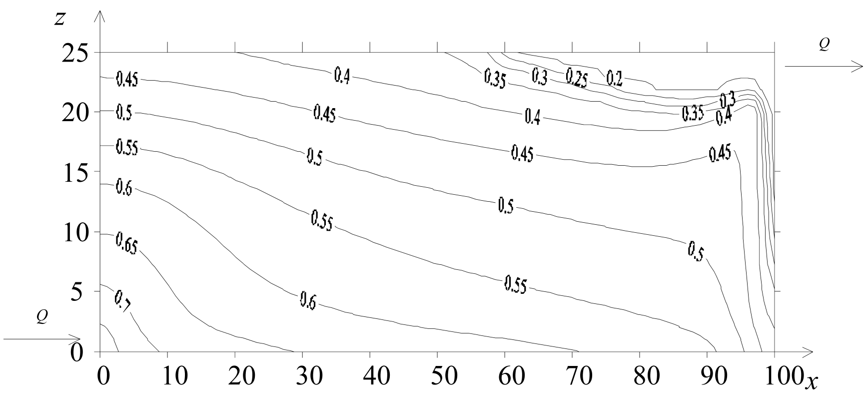

Рис. 3. Распределение водонасыщенности в слое

Распределение водонасыщенности в слое по времени практически не зависит от того, происходит ввод воды в ячейке ($x = 0$, $z = 0$) или в ячейке ($x = 0$, $z = L_z$) (выход воды всегда в ячейке ($x = L_x$, $z = L_z$)).

Сначала идет заполнение водой слоя вблизи линии $x = 0$, затем вода движется по дну ($z = 0$). И только потом язык воды прорывается к точке выхода (рис. 3).

Список литературы

[1] Коновалов А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Наука, 1988. 166 с.

[2] Жумагулов Б.Е., Монахов В.Н. Гидродинамика нефтедобычи. Алматы: Изд-во КазгосИНТИ, 2001. 336 с.

[3] Чекалин А.Н. Численные решения задач фильтрации в водонефтяных пластах. Казань: Изд-во Казанского университета, 1982. 207 с.

[4] Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г. Моделирование процесса нефтедобычи явными и неявными численными методами // Математическое моделирование. 1997. Т. 9, № 6. С. 53–66.

[5] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 318 с.

[6] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.

Поступила в редакцию 9 апреля 2007 г.,
в переработанном виде — 24 мая 2007 г.