ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ*

И. В. Степанова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

e-mail: stepiv@icm.krasn.ru

Group properties of the nonstationary turbulent boundary layer equations are investigated. Operators of the obtained kernel of the basic Lie algebras depend on two arbitrary functions that is why this kernel is infinitely dimensional. The special representations of the turbulent friction function are found. Operators increasing the kernel of the basic Lie algebras and those which satisfy the governing system of equations are constructed according to special representations of the turbulent friction function.

1. Описание системы уравнений

В [1] была проведена групповая классификация уравнений турбулентного пограничного слоя по функции турбулентного трения только для установившихся течений. С точки зрения практических приложений такие случаи пограничного слоя, вообще говоря, наиболее важны. В данной работе рассматривается система уравнений турбулентного пограничного слоя, изменяющегося по времени, т. е. нестационарного.

Обычно под нестационарным пограничным слоем понимают пограничный слой, образующийся при возникновении движения из состояния покоя, или слой, возникающий при периодическом движении [2]. При движении, возникающем из состояния покоя, тело и жидкость до определенного момента времени находятся в состоянии покоя, а затем либо тело начинает двигаться в покоящейся жидкости, либо жидкость начинает набегать на покоящееся тело. При таком разгоне тела или жидкости в непосредственной близости от стенки сначала образуется очень тонкий пограничный слой, в котором скорость течения быстро изменяется от скорости тела до скорости внешнего течения. Оба эти случая могут служить примером разгонного течения с образованием неустановившегося пограничного слоя. Запишем уравнения для плоского нестационарного пограничного турбулентного слоя:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y + p_x = u_{yy}(1 + g_{u_y}) + g_y, \\ p_y = 0, \\ u_x + v_y = 0. \end{cases} \tag{1}$$

*Работа выполнена при поддержке гранта НШ 5873.2006.1, интеграционного проекта СО РАН 2.15 и индивидуального гранта Красноярского краевого фонда науки, проект 17G088.

Здесь $u(t,x,y)$, $v(t,x,y)$ — проекции вектора скорости на оси x и y; $p(t,x)$ — давление; $g(y,u_y)$ — турбулентное трение. Не нарушая общности рассмотрения, можно принять, что плотность жидкости и коэффициент вязкости равны единице.

Ставится задача групповой классификации по отношению к произвольному элементу g: $(y,u_y) \to g(y,u_y)$ для системы (1). Дальнейшее изложение и посвящено решению этой задачи.

2. Определяющие уравнения

Инфинитезимальный оператор, действующий на систему (1), ищем в виде

$$X = \xi^0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial u} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial v} + \eta^3 \frac{\partial}{\partial p}, \qquad (2)$$

где $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \eta^1, \eta^2, \eta^3$ — функции переменных t,x,y,u,v,p. Формулы продолжения оператора (2) строятся с помощью оператора полного дифференцирования $D = (D_t, D_x, D_y)$, имеющего компоненты

$$D_t = \partial_t + u_t \partial_u + v_t \partial_v + p_t \partial_p + ...,$$

$$D_x = \partial_x + u_x \partial_u + v_x \partial_v + p_x \partial_p + ...,$$

$$D_y = \partial_y + u_y \partial_u + v_y \partial_v + p_y \partial_p + ... + u_{yy} \partial_{u_y} + ...,$$

где явно указаны только слагаемые, фактически участвующие в построении определяющих уравнений.

Вначале целесообразно конкретизировать функциональный вид оператора (2), подчинив его только условию, чтобы он допускался уравнением $p_y = 0$ из системы (1). Действуя продолженным оператором $\widetilde{X}$ на это равенство, получим, что $\xi^0 = \xi^0(t,x,p)$, $\xi^1 = \xi^1(t,x,p)$, $\eta^3 = \eta^3(t,x,p)$. Далее, действуя оператором $\widetilde{X}$ на последнее уравнение системы (1) и переходя на соответствующее многообразие, получим, что координаты оператора (2) имеют вид

$$\xi^0 = \xi^0(t,x), \quad \xi^1 = \xi^1(t,x), \quad \xi^2 = \xi^2(t,x,y,u),$$

$$\eta^1 = \eta^1(t,x,u,p), \quad \eta^2 = \eta^2(t,x,y,u,v,p), \quad \eta^3 = \eta^3(t,x,p)$$

и удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} (1+g_{u_y})(\eta^2_u - \xi^2_x) = 0, \\ v(\eta^1_u - \xi^1_x - \eta^2_v + \xi^2_y) - u(\eta^2_u - \xi^2_x) = 0, \\ \eta^1_p + \xi^0_x = 0, \\ v(\eta^1_x + \eta^2_y) + g_y(\eta^2_u - \xi^2_x) = 0, \end{cases} \qquad (3)$$

составляющим часть системы определяющих уравнений для системы (1). Наконец, действуя дважды продолженным оператором $\widetilde{\widetilde{X}}$ на первое уравнение системы (1), получим, что

$$\xi^0 = \xi(t), \quad \xi^1 = \xi^1(t,x), \quad \xi^2 = \xi^2(t,x,y),$$

$$\eta^1 = \eta^1(t,x,u), \quad \eta^2 = \eta^2(t,x,y,u,v), \quad \eta^3 = \eta^3(t,x,p),$$

а определяющие уравнения, включая (3), упрощаются следующим образом:

$$\begin{cases} \eta^1 = u(\xi^1_x - \xi^0_t) + \xi^1_t, \quad \eta^2_u - \xi^2_x = 0, \quad -\eta^2_v - \xi^0_t + \xi^2_y = 0, \\ \xi^1_{xt} + \eta^2_y = 0, \quad \eta^3_p = 2(\xi^1_x - \xi^0_t), \quad \xi^0_{tt} = 2\xi^1_{xt}, \quad \eta^2_y = \xi^1_{tx}, \\ v(\xi^1_x - 2\xi^0_t) - (-\xi^2_t - u\xi^2_x + \eta^2 + (v - g_{yu_y})(\xi^1_x - \xi^0_t - \xi^2_y)) = 0, \\ v(-\xi^2 g_{yu_y} - (1 + g_{u_y})(\xi^1_x - \xi^0_t - 2\xi^2_y)) + (1 + g_{u_y})(-\xi^2_t - u\xi^2_x + \eta^2 + \\ +(v - g_{yu_y})(\xi^1_x - \xi^0_t - \xi^2_y)) = 0, \\ v(\xi^1_{tt} + \eta^3_x - \xi^2 g_{yy}) + g_y(-\xi^2_t - u\xi^2_x + \eta^2 + (v - g_{yu_y})(\xi^1_x - \xi^0_t - \xi^2_y)) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Решение определяющих уравнений (4) дается формулами

$$\xi^0 = 2F_0(t), \quad \xi^1 = (C_1 + F_{0t})x + F_1(t), \quad \xi^2 = F_2(t)y + F_3(t,x),$$

$$\eta^1 = (C_1 - F_{0t})u + F_{1t} + F_{0tt}x, \quad \eta^2 = (F_2 - 2F_{0t})v + uF_{3x} - F_{0tt}y + F_4(t,x),$$

$$\eta^3 = 2(C_1 - F_{0t})p + F_5(t,x).$$

Здесь C_1 — произвольная постоянная; F_i, $i = \overline{0...5}$, — произвольные гладкие функции своих аргументов. Классифицирующие уравнения, связывающие координаты оператора с произвольной функцией $g(y, u_y)$, заданы соотношениями

$$g_{u_y u_y}(C_1 - F_{0t} - F_2) = 0, \tag{5}$$

$$-(F_{2t} + F_{0tt})y + F_4 - F_{3t} - g_{yu_y}(C_1 - F_{0t} - F_2) = 0, \tag{6}$$

$$(F_2 y + F_3)g_{yu_y} - 2(1 + g_{u_y})(F_2 - F_{0t}) = 0, \tag{7}$$

$$F_{0ttt}x + F_{1tt} + F_{5x} - (F_2 y + F_3)g_{yy} + (C_1 - 3F_{0t})g_y = 0. \tag{8}$$

3. Построение ядра основных алгебр Ли

Для групповой классификации уравнений (1) надо прежде всего найти ядро основной алгебры Ли уравнений (5)–(8). Очевидно, что уравнение (7) при произвольной функции g может быть удовлетворено, только если $F_2 = F_3 = F_{0t} = 0$. Тогда из уравнения (6) следует, что $C_1 = F_4 = 0$, а из (8) $F_5 = -F_{1tt}x + F_6(t)$, где $F_6(t)$ — произвольная гладкая функция. Тем самым доказана лемма.

Лемма 1. *Ядро основных алгебр Ли L_0, допускаемых уравнениями (1), образовано операторами вида*

$$\partial_t, \quad F_6(t)\partial_p, \quad F_1(t)\partial_x + F_{1t}\partial_u - F_{1tt}x\partial_p \tag{9}$$

с двумя произвольными функциями: $t \to F_6(t)$, $t \to F_1(t)$.

Оператор $F_6(t)\partial_p$ соответствует тому факту, что уравнениями (1) давление p определяется с точностью до слагаемого, равного произвольной функции времени. Оператор, образованный функцией $F_1(t)$, соответствует преобразованиям перехода в систему координат, поступательно движущуюся со временем по произвольному закону. Примечательной особенностью полученного ядра основных алгебр Ли при произвольном значении функции g является то, что оно бесконечномерно: ее операторы зависят от двух произвольных функций времени.

Перейдем к вычислению преобразований эквивалентности для уравнений (1). Инфинитезимальный оператор группы будем искать в виде

$$X = \xi^0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial u} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial v} + \eta^3 \frac{\partial}{\partial p} + \eta^4 \frac{\partial}{\partial g} + \eta^5 \frac{\partial}{\partial g_1} + \eta^6 \frac{\partial}{\partial g_2},$$

где $g_1 = g_y$, $g_2 = g_{u_y}$. Предполагаем, что его компоненты зависят от всех зависимых и независимых переменных, входящих в систему (1) (здесь X есть оператор вида (2)). Заметим, что к уравнениям (1) необходимо добавить условия равенства нулю производных от g_1 и g_2 по t и x. Действуя дважды продолженным оператором $\tilde{\tilde{X}}$ на полученную систему и переходя на соответствующее многообразие, получим определяющие уравнения

$$\begin{cases} \eta^1_u - \xi^1_x - \eta^2_v + \xi^2_y = 0, \quad \eta^1_x + \eta^2_y = 0, \quad \eta^4_y + g_1(\eta^4_g - \xi^2_y) = \eta^5, \\ g_1(\eta^5_g - 2\eta^4_{gy} + \xi^2_{yy}) + \eta^5_y - \eta^4_{yy} - g_1^2\eta^4_{gg} = 0, \quad (-\xi^0_t + 2\xi^2_y)(1+g_2) - \eta^6 = 0, \\ (1+g_2)(\eta^3_p - \xi^1_x - \eta^1_u + 2\xi^2_y) - u\eta^6 = 0, \quad (1+g_2)(\eta^2 + v\xi^2_y + (1+g_2)\xi^2_{yy}) - v\eta^6 = 0, \\ (1+g_2)(\eta^1 - \xi^1_t - u\xi^1_x + 2u\xi^2_y) - u\eta^6 = 0, \\ (1+g_2)(\eta^1_t + u\eta^1_x + \eta^3_x - \eta^5 + g_1(\eta^1_u - 2\xi^2_y)) + g_1\eta^6 = 0. \end{cases}$$

Решение определяющих уравнений дается формулами

$$\xi^0 = C_0 t + C_2, \quad \xi^1 = C_1 x + F_1(t), \quad \xi^2 = C_3 y + C_4,$$

$$\eta^1 = (C_1 - C_0)u + F_{1t}, \; \eta^2 = (C_3 - C_0)v + uF_{3x}\eta^3 = 2(C_1 - C_0)p + (C_5 - F_{1tt})x + F_2(t),$$

$$\eta^4 = (C_1 - 2C_0 + C_3)g + C_5 y + C_6, \quad \eta^5 = (C_1 - 2C_0)g_1 + C_5, \quad \eta^6 = (1+g_2)(2C_3 - C_0).$$

Здесь C_i, $i = \overline{0...6}$, — произвольные постоянные; F_i, $i = 1, 2$, — произвольные гладкие функции своих аргументов.

Тем самым преобразование эквивалентности уравнений (1) состоит из всех преобразований, соответствующих ядру основных алгебр Ли (9), и из преобразований, зависящих от шести произвольных постоянных m, n, k, c, s, q, которые даются формулами

$$\bar{t} = mt; \quad \bar{x} = kx; \quad \bar{y} = ny + c; \quad \bar{u} = km^{-1}u; \; \bar{v} = nm^{-1}v; \; \bar{p} = k^2 m^{-2} p + sx. \tag{10}$$

При этом произвольный элемент g преобразуется так:

$$\bar{g} = km^{-2}ng + sy + q. \tag{11}$$

4. Групповая классификация системы (1)

Первую классификационную возможность дает функция $g = 0$. С физической точки зрения это означает, что уравнения (1) в этом случае описывают течение в ламинарном, а не турбулентном пограничном слое. Их групповые свойства были исследованы в [3]. Операторы, допускающие расширение ядра основных алгебр Ли L_0, в этом случае имеют вид $x\partial_x + u\partial_u + 2p\partial_p$, $2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y - u\partial_u - v\partial_v - 2p\partial_p$, $F(t,x)\partial_y + (F_x u + F_t)\partial_v$, где $F(t,x)$ — произвольная гладкая функция своих аргументов. Два первых оператора, так же как и операторы, входящие в L_0, унаследованы системой (1) от породившей ее системы уравнений Навье—Стокса, последний же оператор специфичен именно для уравнений пограничного слоя [4].

Далее пусть функция g есть функция от y, или, более общий случай, $g = \pm u_y + \tilde{g}(y)$. При представлении функции $g = u_y + \tilde{g}(y)$ уравнение (5) выполняется тождественно, а уравнения (6)–(8) принимают вид

$$-(F_{2t} + F_{0tt})y + F_4 - F_{3t} = 0, \tag{12}$$

$$F_2 - F_{0t} = 0, \tag{13}$$

$$F_{0ttt}x + F_{1tt} + F_{5x} - (F_2 y + F_3)\tilde{g}_{yy} + (C_1 - 3F_{0t})\tilde{g}_y = 0. \tag{14}$$

Из (12) и (13) следует, что $F_4 = F_{3t}$, $F_{2t} = 0$, $F_{0tt} = 0$, а классифицирующим уравнением будет являться следующее:

$$F_{1tt} + F_{5x} - (C_0 y + F_3)\tilde{g}_{yy} + (C_1 - 3C_0)\tilde{g}_y = 0. \tag{15}$$

Координаты оператора (2) запишутся как

$$\xi^0 = 2(C_0 t + C_2), \quad \xi^1 = (C_1 + C_0)x + F_1(t), \quad \xi^2 = C_0 y + F_3(t,x),$$

$$\eta^1 = (C_1 - C_0)u + F_{1t}, \quad \eta^2 = -C_0 v + uF_{3x} + F_{3t}, \quad \eta^3 = 2(C_1 - C_0)p + F_5(t,x).$$

Интересно заметить, что ядро основных алгебр при этом не расширяется, т. е. остается равным L_0. Решая классифицирующее уравнение (15), получим следующие специализации функции g, при условии, что $g = u_y + \tilde{g}(y)$:

1) $g = u_y \mp y^2$, тогда операторы, с которыми возможно расширение основных алгебр Ли, заданы формулами $2t\partial_t + 5x\partial_x + y\partial_y + 3u\partial_u - v\partial_v + 6p\partial_p$, $F_x\partial_y + (F_{xx}u + F_{tx})\partial_v \mp 2F(t,x)\partial_p$;

2) $g = u_y \mp e^{\delta y}$, здесь $\delta = \mp 1$, тогда оператор, расширяющий основную алгебру Ли задан так: $x\partial_x + \delta\partial_y + u\partial_u + 2p\partial_p$;

3) $g = u_y \mp y^{2+k}$, $k \neq 0, \neq -1, \neq -2$, оператор, расширяющий основную алгебру Ли, имеет вид $2t\partial_t + (5+k)x\partial_x + y\partial_y + (k+3)u\partial_u - v\partial_v + 2(k+3)p\partial_p$.

Несколько иные зависимости и операторы получаются в результате представления функции $g = -u_y + \tilde{g}(y)$:

4) $g = -u_y \mp y^2$, операторы $t\partial_t + 3x\partial_x + y\partial_y + 2u\partial_u + 4p\partial_p$, $t\partial_t + 2x\partial_x + u\partial_u - v\partial_v + 2p\partial_p$, $F_x\partial_y + (F_{xx}u + F_{tx})\partial_v \mp 2F(t,x)\partial_p$;

5) $g = -u_y \mp y^4$, операторы $3x\partial_x + y\partial_y + 3u\partial_u + v\partial_v + 6p\partial_p$, $2F(t)\partial_t + F_t x\partial_x - F_t y\partial_y + (-F_t u + F_{tt}x)\partial_u + (-3F_t v - F_{tt}y)\partial_v + (-2F_t p - F_{ttt}x^2/2)\partial_p$, где $F(t)$ — произвольная гладкая функция.

Если же функция g зависит только от u_y, то ядро L_0 будет расширяться двумя операторами. Введем следующее обозначение для этого ядра: $L_1 = \{L_0;\ F(t,x)\partial_y + (F_x u + F_t)\partial_v;\ 2t\partial_t + 3x\partial_x + y\partial_y - v\partial_v + 2p\partial_p\}$. Уравнения (5)–(8) запишутся следующим образом:

$$g_{u_y u_y}(C_1 - C_0) = 0, \tag{16}$$

$$(1 + g_{u_y})(C_0 - 2F_{0t}) = 0, \tag{17}$$

а координаты оператора (2) будут иметь вид

$$\xi^0 = 2F_0(t), \quad \xi^1 = (C_1 + F_{0t})x + F_1(t), \quad \xi^2 = (C_0 - F_{0t})y + F_3(t,x),$$

$$\eta^1 = (C_1 - F_{0t})u + F_{1t} + F_{0tt}x,\ \eta^2 = (C_0 - 2F_{0t})v + uF_{3x} + F_{3t} - F_{0tt}y,$$
$$\eta^3 = 2(C_1 - F_{0t})p + F_6(t) - F_{1tt}x - F_{0ttt}x^2/2,$$

где C_0, C_1 — произвольные постоянные, F_0, F_1, F_3, F_6 — произвольные функции своих аргументов.

Уравнение (17) дает две классифицирующие возможности с учетом преобразования эквивалентности:

1) $g = -u_y$, тогда кроме L_1 система допускает операторы $x\partial_x + u\partial_u + 2p\partial_p,\ y\partial_y + v\partial_v$, $2F(t)\partial_t + F_t x\partial_x - F_t y\partial_y + (-F_t u + F_{tt}x)\partial_u + (-3F_t v - F_{tt}y)\partial_v + (-2F_t p - F_{ttt}x^2/2)\partial_p$, здесь $F(t)$ — произвольная гладкая функция;

2) $C_0 - 2F_{0t} = 0$, с учетом этого равенства остается лишь возможность $g = u_y$, а кроме операторов, содержащихся в L_1, оператор, также допускаемый системой уравнений (15) при данном виде функции g, представлен в виде $x\partial_x + u\partial_u + 2p\partial_p$. Интересно заметить, что физически такие представления функции g можно интерпретировать как изменение вязкости жидкости. При $g = u_y$ вязкость становится равной 2, а при $g = -u_y$ вязкость равна 0, и, с точки зрения физики, этот случай не представляет интереса, но тем не менее рассмотрен здесь.

Наконец рассмотрим самый общий случай, когда $g = g(y, u_y)$. Из уравнения (5) следует, что либо $F_2 = C_1 - F_{0t}$, либо $g_{u_y u_y} = 0$, причем в последнем случае при анализе уравнений (5)–(8) получается, что $g = \pm u_y + \tilde{g}(y)$, а эти возможности были рассмотрены выше. Тем самым остается рассмотреть $F_2 = C_1 - F_{0t}$. Уравнения (5)–(8) будут иметь следующий вид:

$$((C_1 - F_{0t})y + F_3)g_{yu_y} - 2(1 + g_{u_y})(C_1 - 2F_{0t}) = 0, \tag{18}$$

$$F_{0ttt}x + F_{1tt} + F_{5x} - ((C_1 - F_{0t})y + F_3)g_{yy} + (C_1 - 3F_{0t})g_y = 0; \tag{19}$$

координаты оператора (2) запишутся так:

$$\xi^0 = 2F_0(t),\quad \xi^1 = (C_1 + F_{0t})x + F_1(t),\quad \xi^2 = (C_1 - F_{0t})y + F_3(t, x),$$

$$\eta^1 = (C_1 - F_{0t})u + F_{1t} + F_{0tt}x,\ \eta^2 = (C_1 - 3F_{0t})v + uF_{3x} - F_{0tt}y + F_{3t},$$
$$\eta^3 = 2(C_1 - F_{0t})p + F_4(t, x).$$

Здесь C_1 — произвольная постоянная; $F_i(t),\ i = \overline{0...4}$, — произвольные гладкие функции своих аргументов.

Дифференцируя (18) по x, получим выражение $F_{3x}g_{yu_y} = 0$, откуда следуют две классифицирующие возможности.

1. $g_{u_y y} = 0$, тогда $g = \alpha_2(y) + \alpha_1(u_y)$. Из уравнений (18), (19)получим

$$(1 + \alpha_{1u_y})(C_1 - 2F_{0t}) = 0, \tag{20}$$

$$F_{0ttt}x + F_{1tt} + F_{5x} - ((C_1 - F_{0t})y + F_3)\alpha_{2yy} + (C_1 - 3F_{0t})\alpha_{2y} = 0. \tag{21}$$

Из (20) вновь следует две возможности. Во-первых, с учетом преобразования эквивалентности, $\alpha_1 = -u_y$, т. е. $g = -u_y + \alpha_2(y)$, где $\alpha_2(y)$ — произвольная функция, но выше уже был разобран случай, когда $g = -u_y + \tilde{g}(y)$, $\tilde{g}(y)$ — произвольная функция. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда $C_1 = 2F_{0t}$, а из анализа уравнения (21) следует, что $\alpha_2 = \mp y^2$, т. е. $g = \alpha_1(u_y) \pm y^2$, $\alpha_{1u_y} \neq \mathrm{const}$, оператор, расширяющий основную алгебру, имеет вид $F(t,x)\partial_y + (F_x u + F_t)\partial_v \mp 2F(t,x)\partial_p$.

2. $F_{3x} = 0$, тогда, анализируя уравнение (18), учитывая преобразования эквивалентности и независимость функции g от t, получим, что g может быть представима только двумя способами:

2.1. $g = -u_y + \alpha_1(u_y) + \alpha_2(y)$.

2.2. $g = -u_y + \alpha_1(u_y)y^4 + \alpha_2(y)$, причем $\alpha_1(u_y)$ — нелинейна по u_y в обоих случаях.

Подставим полученное в 2.1 выражение для g в (18) и (19):

$$\alpha_{1u_y}(C_1 - 2F_{0t}) = 0, \tag{22}$$

$$F_{0ttt}x + F_{1tt} + F_{5x} - ((C_1 - F_{0t})y + F_3)\alpha_{2yy} + (C_1 - 3F_{0t})\alpha_{2y} = 0. \tag{23}$$

Групповая классификация функции турбулентного трения

№ п/п	$g(y,u_y)$	Оператор
1	Произвольная	$L_0 = \{\frac{\partial}{\partial t};\ F(t)\frac{\partial}{\partial x} + F_t\frac{\partial}{\partial u} - xF_{tt}\frac{\partial}{\partial p};\ F(t)\frac{\partial}{\partial p}\}$
2	0	$L_0,\ f(t,x)\frac{\partial}{\partial y} + (uf_x + f_t)\frac{\partial}{\partial v},\ x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} + 2p\frac{\partial}{\partial p},\ 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} - 2p\frac{\partial}{\partial p}$
3	$\alpha(u_y)$	$L_1 = \{L_0;\ f(t,x)\frac{\partial}{\partial y} + (uf_x + f_t)\frac{\partial}{\partial v},\ 2t\frac{\partial}{\partial t} + 3x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} + 2p\frac{\partial}{\partial p}\}$
4	u_y	$L_1;\ x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} + 2p\frac{\partial}{\partial p}$
5	$-u_y$	$L_1;\ x\partial_x + u\partial_u + 2p\partial_p,\ y\partial_y + v\partial_v,\ 2F(t)\partial_t + F_t x\partial_x - F_t y\partial_y + (-F_t u + F_{tt}x)\partial_u + (-3F_t v - F_{tt}y)\partial_v + (-2F_t p - F_{ttt}x^2/2)\partial_p$
6	$u_y \mp y^2$	$L_0;\ 2t\partial_t + 5x\partial_x + y\partial_y + 3u\partial_u - v\partial_v + 6p\partial_p,\ f_x\partial_y + (f_{xx}u + f_{tx})\partial_v \mp 2f(t,x)\partial_p$
7	$u_y \mp e^{\delta y}$	$L_0,\ x\frac{\partial}{\partial x} + \delta\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial u} + 2p\frac{\partial}{\partial p}$
8	$u_y \mp y^{2+n}$	$L_0;\ 2t\frac{\partial}{\partial t} + (5+n)x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (3+n)u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} + 2(3+n)p\frac{\partial}{\partial p}$
9	$-u_y \mp y^2$	$L_0;\ f_x\partial_y + (f_{xx}u + f_{tx})\partial_v \mp 2f(t,x)\partial_p;\ t\partial_t + 3x\partial_x + y\partial_y + 2u\partial_u + 4p\partial_p,\ t\partial_t + 2x\partial_x + u\partial_u - v\partial_v + 2p\partial_p$
10	$-u_y \mp y^4$	$L_0;\ 3x\partial_x + y\partial_y + 3u\partial_u + v\partial_v + 6p\partial_p,\ 2F(t)\partial_t + F_t x\partial_x - F_t y\partial_y + (-F_t u + F_{tt}x)\partial_u + (-3F_t v - F_{tt}y)\partial_v + (-2F_t p - F_{ttt}x^2/2)\partial_p$
11	$-u_y + \alpha(u_y) \mp y^2$	$L_0;\ f(t,x)\partial_y + (f_x u + f_t)\partial_v \mp 2f(t,x)\partial_p$
12	$-u_y + \alpha(u_y) \mp \ln y$	$L_0;\ 2t\partial_t + 3x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u - v\partial_v + 2p\partial_p$
13	$-u_y + \alpha(u_y)y^4 \mp y^4$	$L_0;\ 2F(t)\partial_t + F_t x\partial_x - F_t y\partial_y + (-F_t u + F_{tt}x)\partial_u + (-3F_t v - F_{tt}y)\partial_v + (-2F_t p - F_{ttt}x^2/2)\partial_p$

Поскольку α_1 нелинейна по u_y, то $F_0 = \dfrac{C_1}{2}t + C_0$, а классифицирующее уравнение на α_2 имеет вид

$$F_{1tt} + F_{5x} - \left(\frac{C_1}{2}y + F_3\right)\alpha_{2yy} + \frac{C_1}{2}\alpha_{2y} = 0. \tag{24}$$

Дифференцируя (24) по y, получим

$$C_1\alpha_{2yy} + (C_1 y + 2F_3)\alpha_{2yyy} = 0. \tag{25}$$

Анализируя это уравнение с учетом преобразований эквивалентности, получим две возможности для α_2.

2.1.1. $\alpha_2 = \mp y^2$, тогда $g = -u_y + \alpha_1(u_y) \mp y^2$ с оператором $F(t,x)\partial_y + (F_x u + F_t)\partial_v \mp 2F(t,x)\partial_p$.

2.1.2. $\alpha_2 = \mp \ln(y)$, тогда $g = -u_y + \alpha_1(u_y) \mp \ln y$ с оператором $2t\partial_t + 3x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u - v\partial_v + 2p\partial_p$.

Аналогично, при подстановке выражения, полученного для g в 2.2, в (18) и (19) и при анализе полученных равенств для α_2 остается возможность $\alpha_2 = \mp y^4$, т. е. $g = -u_y + \alpha_1(u_y)y^4 \mp y^4$. Здесь оператор, расширяющий основную алгебру, имеет вид $2F(t)\partial_t + F_t x\partial_x - F_t y\partial_y + (-F_t u + F_{tt}x)\partial_u + (-3F_t v - F_{tt}y)\partial_v + (-2F_t p - F_{ttt}x^2/2)\partial_p$.

Тем самым групповая классификация уравнений нестационарного плоского турбулентного пограничного слоя полностью завершена (полученные результаты см. в таблице).

Везде в таблице $F(t)$, $f(t,x)$ — произвольные гладкие функции своих аргументов, $\alpha(u_y)$ — произвольная нелинейная по u_y функция, $n \neq 0,\ \neq -1,\ \neq -2$ — произвольная постоянная, $\delta = \mp 1$.

Автор выражает благодарность профессору В.К. Андрееву, под руководством которого была выполнена эта работа.

Список литературы

[1] Степанова И.В. Групповая классификация уравнений стационарного плоского турбулентного пограничного слоя // Вест. Красноярского гос. ун-та. Физ.-мат. науки. 2006. № 9. С. 114–119.

[2] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Изд-во иностранной литературы, 1956. 528 с.

[3] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

[4] Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: СО "Наука", 1994. 319 с.

Поступила в редакцию 30 июля 2007 г.,
в переработанном виде — 13 сентября 2007 г.