Вычислительные технологии **Том 12, № 3, 2007**

О РЕШЕНИИ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ ДИАГОНАЛИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

А. А. Светашков
Томский политехнический университет, Россия
e-mail: svetashkov@niipmm.tsu.ru

A method of diagonalization of the differential equations governing the 2D elastic equilibrium in strains is presented. The equivalence of the diagonalized differential equations of elastic equilibrium and the two Cauchi—Riman systems for harmonically connected functions is shown. In the case of the given strains at the boundaries, a set of the boundary conditions for the functions satisfying the Cauchi—Riman system is formulated. Some examples are presented.

Введение

Решение задач теории упругости как аналитическими, так и численными методами сопряжено с проблемой интегрирования системы дифференциальных уравнений в частных производных при заданных условиях на границе [1, 2]. В случае аппроксимации частных производных с помощью конечно-разностного или конечно-элементного метода и перехода к решению системы алгебраических линейных уравнений (СЛАУ) хорошо известны преимущества, которые дают преобразования матрицы СЛАУ, в частности, ее приведение к диагональному виду. Оказывается, что система дифференциальных уравнений равновесия теории упругости допускает приведение к диагональной форме [3, 4] на основе собственных преобразований в дифференциальном виде, минуя процедуру перехода к приближенной СЛАУ. При этом диагонализованная система в новых переменных имеет вид n независимых друг от друга уравнений Лапласа (или Пуассона при наличии объемных сил), где n — размерность решаемой задачи. Сведение к гармонической проблеме облегчает процедуру интегрирования и удовлетворения граничным условиям, поскольку аппарат решения краевых задач для уравнения Лапласа — один из наиболее разработанных в математической физике. Здесь следует назвать аналитические методы, включая методы теории функций комплексного переменного [5, 6], численные методы, в том числе методы конечных разностей, конечных элементов, граничных элементов, а также итерационные методы [7].

Полученный для статических задач теории упругости результат сведения проблемы интегрирования системы уравнений равновесия к трем (двум в плоском случае) уравнениям Лапласа для новых искомых функций является предсказуемым. Для динамических задач

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2007.

теории упругости [1, 8] хорошо известно, что система уравнений движения эквивалентна n волновым уравнениям относительно скалярного и векторного потенциалов. В этом смысле полученную диагонализованную систему уравнений равновесия (ДСУР) можно рассматривать в качестве статического аналога волновых уравнений динамической теории упругости, в которых отсутствуют инерционные члены.

Однако основной проблемой преобразований как статических, так и динамических задач теории упругости, является формулировка алгоритма, позволяющего решать краевую (или начальную) задачу в единых переменных и при интегрировании уравнений равновесия (движения), и при выполнении граничных условий.

1. Преобразование системы уравнений равновесия

Запишем систему уравнений равновесия (Ляме) в матричной форме [2]:

$$A\vec{u} \equiv \begin{pmatrix} d_1^2 + \lambda\Delta & d_1 d_2 \\ d_1 d_2 & d_2^2 + \lambda\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\tilde{X} \\ \rho\tilde{Y} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь $\vec{u} = \vec{u}(u, v)$ — искомый вектор перемещений; ρ — плотность материала; d_α^β, $(\alpha, \beta = 1, 2)$ — сокращенный символ операции дифференцирования:

$$d_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad d_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y}, \quad d_1^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad d_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad d_1 d_2 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y};$$

x, y — декартовы координаты; λ — упругая константа: $\lambda = 1 - 2\nu$, где ν — коэффициент Пуассона; Δ — оператор Лапласа: $\Delta = d_1^2 + d_2^2$; $\tilde{X} = X\lambda/G$, $\tilde{Y} = Y\lambda/G$, X, Y — компоненты вектора объемных сил; G — модуль сдвига.

Формализм записи системы уравнений равновесия (СУР) в виде произведения симметричной матрицы A, составленной из операторов дифференцирования, на вектор перемещений $\vec{u}$, распространим на другие операции линейной алгебры: определение собственных векторов и собственных значений. Формально полагая d_α^β, Δ алгебраическими символами, запишем характеристическое уравнение для матрицы A:

$$\begin{vmatrix} d_1^2 + \lambda\Delta - \mu & d_1 d_2 \\ d_1 d_2 & d_2^2 + \lambda\Delta - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем

$$\left(d_1^2 + \lambda\Delta - \mu\right)\left(d_2^2 + \lambda\Delta - \mu\right) - d_1^2 d_2^2 = 0.$$

Учитывая $d_1^2 + d_2^2 = \Delta$ и приводя подобные, имеем квадратное уравнение относительно μ:

$$\mu^2 - \mu\,(2\lambda + 1)\,\Delta + \lambda\,(\lambda + 1)\,\Delta^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$\mu_1 = \lambda\Delta, \quad \mu_2 = (1 + \lambda)\,\Delta. \tag{2}$$

Коэффициенты $\lambda, (1 + \lambda)$ пропорциональны квадратам скоростей распространения поперечных и продольных волн в упругом теле. Действительно, квадрат скорости продольных волн есть [1]

$$C_1^2 = \frac{\Lambda + 2G}{\rho},$$

где $\Lambda = 2G\nu/(1-2\nu)$ — постоянная Ляме. Имеем

$$\Lambda + 2G = 2G\frac{1-\nu}{1-2\nu} = \frac{G}{\lambda}\left(1+\lambda\right).$$

Отсюда с учетом обозначений правой части системы (1) получаем искомое утверждение. Аналогично, для скорости поперечных волн имеем

$$C_2^2 = \lambda\frac{G}{\lambda\rho} = \frac{G}{\rho}.$$

Для каждого из найденных μ_α $(\alpha = 1, 2)$ существуют собственные векторы $\vec{\varphi}(\varphi_1, \varphi_2)$ и $\vec{\psi}(\psi_1, \psi_2)$, удовлетворяющие

$$\begin{aligned} A\varphi_\alpha &= \mu_1\varphi_\alpha = \lambda\Delta\varphi_\alpha, \\ A\psi_\alpha &= \mu_2\psi_\alpha = \left(1+\lambda\right)\Delta\psi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), получим соотношения для компонент собственных векторов

$$\begin{aligned} d_1\left(d_1\varphi_1 + d_2\varphi_2\right) &= 0, \\ d_2\left(d_1\varphi_1 + d_2\varphi_2\right) &= 0; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} d_1\left(d_1\psi_2 - d_2\psi_1\right) &= 0, \\ d_2\left(d_1\psi_2 - d_2\psi_1\right) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} d_1\varphi_1 + d_2\varphi_2 &= C_1, \\ d_1\psi_2 - d_2\psi_1 &= C_2, \end{aligned} \tag{6}$$

где C_α — константы.

Рассмотрим разложение искомого вектора перемещений по собственным векторам

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{\varphi} + \vec{\psi}, \\ u &= \varphi_1 + \psi_1, \quad v = \varphi_2 + \psi_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Тогда получаем

$$A\vec{u} = A\left(\vec{\varphi} + \vec{\psi}\right) = A\vec{\varphi} + A\vec{\psi} = \lambda\Delta\vec{\varphi} + \left(1+\lambda\right)\Delta\vec{\psi} = \Delta\left[\lambda\vec{\varphi} + \left(1+\lambda\right)\vec{\psi}\right]. \tag{8}$$

Обозначим новый искомый вектор-функцию $\vec{y} = \vec{y}(y_1, y_2)$ как

$$\begin{aligned} \vec{y} &= \lambda\vec{\varphi} + \left(1+\lambda\right)\vec{\psi}, \\ y_1 &= \lambda\varphi_1 + \left(1+\lambda\right)\psi_1, \quad y_2 = \lambda\varphi_2 + \left(1+\lambda\right)\psi_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Следовательно, согласно (8), (9) получаем для новых искомых функций $y_\alpha = y_\alpha(x, y)$, $\alpha = 1, 2$, уравнения равновесия вида

$$A\vec{u} = \Delta\vec{y} = \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\tilde{X} \\ \rho\tilde{Y} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Связь новых переменных $y_\alpha(x,y)$ с компонентами исходного вектора перемещений следует из (6), (7)

$$\begin{aligned}(1+\lambda)\,(d_1u+d_2v) &= C_1+d_1y_1+d_2y_2,\\ \lambda\,(d_1v-d_2u) &= C_2+d_1y_2-d_2y_1.\end{aligned}\tag{11}$$

Из системы (11) с учетом (10) можно получить (1) путем поочередного дифференцирования уравнений (11) по x, y и последующего сложения и вычитания.

Таким образом, уравнения равновесия в новых переменных приобретают диагональный вид. При этом основная проблема реализации преимущества полученного диагонального вида — формулировка граничных условий в тех же переменных.

2. Связь разложения по собственным векторам с теоремой Гельмгольца

Согласно теореме разложения Гельмгольца [9], “для всякой конечной области V, ограниченной регулярной границей Γ, в случае если в каждой точке $\vec{x}$ области V определены дивергенция и ротор поля $F(\vec{x})$, то всюду $F(\vec{x})$ может быть представлена в виде суммы безвихревого и соленоидального полей”. Применительно к вектору перемещений $\vec{u}$ получаем

$$\vec{u}=\operatorname{grad}F+\operatorname{rot}\vec{\omega}.\tag{12}$$

Сопоставим (12) с разложением вектора $\vec{u}$ по собственным векторам (7). Для этого рассмотрим соотношения (5) для компонент собственного вектора $\vec{\psi}$, которые запишем в виде

$$d_\alpha\operatorname{div}\vec{\psi}=\Delta\psi_\alpha,\quad \alpha=1,2.\tag{13}$$

Пусть $\vec{\psi}$ является градиентом некоторой скалярной функции F:

$$\begin{aligned}\vec{\psi} &= \operatorname{grad}F,\\ \psi_\alpha &= d_\alpha F,\quad \alpha=1,2.\end{aligned}\tag{14}$$

Покажем, что $\vec{\psi}$ в форме (14) является решением (13). Действительно

$$d_\alpha\operatorname{div}\operatorname{grad}F=\Delta d_\alpha F=d_\alpha\Delta F,\quad \alpha=1,2.$$

Последнее справедливо в силу перестановочности операций d_α, Δ. Следовательно,

$$d_\alpha\,(\operatorname{div}\operatorname{grad}F-\Delta F)=0,\quad \alpha=1,2.$$

В силу $\operatorname{div}\operatorname{grad}=\Delta$ получаем тождество. Отсюда следует, что градиент скалярной функции F совпадает с собственным вектором $\vec{\psi}$, который соответствует собственному значению $(1+\lambda)\,\Delta$.

Рассмотрим далее однородную систему (4), которую перепишем в виде

$$d_\alpha\operatorname{div}\vec{\varphi}=0,\quad \alpha=1,2.\tag{15}$$

Решением системы (15) будет вектор

$$\vec{\varphi}=\operatorname{rot}\vec{\omega}$$

в силу

$$\operatorname{div}\vec{\varphi} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{\omega} = 0.$$

Следовательно, ротор векторной функции $\vec{\omega}$ удовлетворяет тому же уравнению, что и собственный вектор $\vec{\varphi}$, соответствующий собственному значению $\lambda\Delta$. Отсюда можно сделать вывод о тождественности разложений (7) и (12).

Диагонализованные уравнения равновесия (10) можно рассматривать в качестве статического аналога волновых уравнений динамической теории упругости.

3. Выражения собственных векторов через перемещения

Прежде всего рассмотрим выражения компонент собственных векторов $\vec{\varphi}, \vec{\psi}$ через $\vec{u}$ и $\vec{y}$. Из (7), (9) легко находим

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 = (1+\lambda)\,u - y_1, & \varphi_2 = (1+\lambda)\,v - y_2, \\ \psi_1 = y_1 - \lambda u, & \psi_2 = y_2 - \lambda v. \end{array} \tag{16}$$

Тогда систему (11) можно преобразовать к виду

$$\begin{array}{rcl} d_1\psi_1 + d_2\psi_2 & = & \Theta - C_1, \\ d_2\psi_1 - d_1\psi_2 & = & -C_2. \end{array} \tag{17}$$

Здесь Θ — объемная деформация

$$\Theta = d_1 u + d_2 v.$$

Для решения системы (17) относительно ψ_α воспользуемся функцией Лява [1, 10]:

$$\begin{gathered} \xi = (1+\lambda)\int \Theta \mathrm{d}x - 2\lambda \int \omega \mathrm{d}y, \\ \eta = (1+\lambda)\int \Theta \mathrm{d}y + 2\lambda \int \omega \mathrm{d}x. \end{gathered} \tag{18}$$

Здесь $\omega = \omega(x,y)$ — элементарное вращение:

$$2\omega = d_1 v - d_2 u. \tag{19}$$

Функции ξ, η, входящие в (18), являются гармонически сопряженными и удовлетворяют системе Коши—Римана [6, 10]:

$$\begin{array}{rcl} d_1\xi & = & d_2\eta = (1+\lambda)\,\Theta, \\ -d_2\xi & = & d_1\eta = 2\lambda\omega. \end{array} \tag{20}$$

Тогда с учетом (20) решение системы (17) может быть записано в следующем виде:

$$\begin{array}{rcl} \psi_1 & = & \dfrac{1}{2(1+\lambda)}\xi + \dfrac{1}{2}x\Theta + d_1 f', \\ \psi_2 & = & -\dfrac{\lambda}{1+\lambda}x\omega + d_2 f'. \end{array} \tag{21}$$

Здесь f' — произвольная гармоническая функция.

Пользуясь (16), можно выразить (11) и через компоненты собственного вектора $\vec{\varphi}$:

$$\begin{aligned} d_1\varphi_2 - d_2\varphi_1 &= 2\omega, \\ d_1\varphi_1 + d_2\varphi_2 &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Тогда решение системы (22) с учетом (20) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{1+\lambda}{2\lambda}x\Theta + d_1 f'', \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2\lambda}\eta + x\omega + d_2 f''. \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь f'' — произвольная гармоническая функция.

Перемещения u, v найдем согласно разложению (7):

$$\begin{aligned} u &= \varphi_1 + \psi_1 = \frac{1}{2\,(1+\lambda)}\xi - \frac{1}{2\lambda}x\Theta + d_1\,(f' + f'')\,, \\ v &= \varphi_2 + \psi_2 = \frac{1}{2\lambda}\eta + \frac{1}{1+\lambda}x\omega + d_2\,(f' + f'')\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Найденные выражения перемещений (24) совпадают с точностью до обозначений с известным решением Лява [10], если принять $f = f' + f''$.

Зная выражения $\varphi_\alpha, \psi_\alpha, \alpha = 1, 2$, можно с использованием (9) найти выражения компонент вектор-функции $\vec{y}$, входящих в ДСУР (10):

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}\xi + d_1 f, \\ y_2 &= \frac{1}{2}\eta + d_2 f. \end{aligned} \tag{25}$$

Заметим, что решение (25) можно получить и путем непосредственного интегрирования системы (11) относительно y_α.

Докажем, что перемещения, определяемые по (24), удовлетворяют системе уравнений равновесия (1). Прежде всего покажем, что из (24) следует

$$d_1 u + d_2 v = \Theta.$$

Для доказательства используем (20) и будем иметь:

$$\begin{aligned} d_1 u &= \frac{1}{2(1+\lambda)}d_1\xi - \frac{1}{2\lambda}\Theta - \frac{1}{2\lambda}x d_1\Theta + d_1^2 f, \\ d_2 v &= \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{1+\lambda}x d_2\omega + d_2^2 f. \end{aligned}$$

Складывая два последних выражения, приводя подобные, получаем с учетом $\Delta f = 0$:

$$d_1 u + d_2 v = \Theta + \frac{x}{2\lambda(1+\lambda)}\left[-(1+\lambda)d_1\Theta + 2\lambda d_2\omega\right].$$

Функции Θ, ω в отсутствие объемных сил удовлетворяют системе уравнений равновесия

$$\begin{aligned} d_1\Theta &= \frac{2\lambda}{1+\lambda}d_2\omega, \\ d_2\Theta &= -\frac{2\lambda}{1+\lambda}d_1\omega. \end{aligned} \tag{26}$$

Отсюда получаем равенство нулю выражения в квадратной скобке. Точно таким же способом можно показать, что для перемещений из (24) выполняется

$$d_1 v - d_2 u = 2\omega.$$

Проверим выполнение первого уравнения равновесия (1) для случая отсутствия объемных сил. Имеем

$$\begin{aligned} d_1^2 u &= \frac{\lambda - 2}{2\lambda} d_1 \Theta - \frac{1}{2\lambda} x d_1^2 \Theta, \\ d_2^2 u &= -\frac{\lambda}{1+\lambda} d_2 \omega - \frac{1}{2\lambda} x d_2^2 \Theta. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\Delta u = -\frac{1}{2\lambda} x \Delta\Theta + \frac{\lambda - 2}{2\lambda} d_1 \Theta - \frac{\lambda}{1+\lambda} d_2 \omega.$$

Поскольку Θ — гармоническая функция, в силу (26) получаем

$$\lambda \Delta u = -d_1 \Theta.$$

Последнее выражение совпадает с первым уравнением системы (1). Аналогично доказывается выполнение второго уравнения равновесия для перемещений, определяемых по (24).

4. Об эквивалентности диагонализованной системы уравнений равновесия и системы Коши—Римана

Докажем важное для дальнейших рассуждений **утверждение**.

Необходимым условием выполнения ДСУР (10) при отсутствии объемных сил являются условия гармонической сопряженности функций Θ, ω и κ, χ (справедливости систем Коши — Римана).

Для доказательства рассмотрим решение для $y_\alpha(x, y)$ в виде (25). Первые производные от y_α с учетом (18), (20) можно выразить через вторые производные от функции f:

$$\begin{aligned} &d_1 y_1 - d_2 y_2 = \left(d_1^2 - d_2^2\right) f, \\ &d_1 y_1 + d_2 y_1 = 2 d_1 d_2 f. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} &\kappa = \left(d_1^2 - d_2^2\right) f = 2 d_1^2 f = -2 d_2^2 f, \\ &\chi = 2 d_1 d_2 f. \end{aligned} \tag{27}$$

Функции κ, χ, как легко проверить, удовлетворяют системе Коши—Римана:

$$\begin{aligned} &d_1 \kappa = -d_2 \chi, \\ &d_2 \kappa = d_1 \chi. \end{aligned} \tag{28}$$

Выразим первые производные от гармонической функции f через κ, χ:

$$d_1 f = \int \left(d_1^2 f \mathrm{d}x + d_1 d_2 f \mathrm{d}y\right) = \frac{1}{2}\int \left(\kappa \mathrm{d}x + \chi \mathrm{d}y\right),$$

$$d_2 f = \int \left(d_1 d_2 f \mathrm{d}x + d_2^2 f \mathrm{d}y\right) = \frac{1}{2}\int \left(\chi \mathrm{d}x - \kappa \mathrm{d}y\right).$$

Подставим найденные выражения $d_\alpha f$ в соотношения (20), учтем также (18):

$$\begin{aligned} 2y_1 &= \int \left[(1+\lambda)\Theta + \kappa\right] \mathrm{d}x + \int \left(-2\lambda\omega + \chi\right) \mathrm{d}y, \\ 2y_2 &= \int \left(2\lambda\omega + \chi\right) \mathrm{d}x + \int \left[(1+\lambda)\Theta - \kappa\right] \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{29}$$

Интегралы (29) не зависят от пути интегрирования. Действительно, должно выполняться

$$\begin{aligned} &d_2 \left[(1+\lambda)\Theta + \kappa\right] = d_1 \left(-2\lambda\omega + \chi\right), \\ &d_2 \left(2\lambda\omega + \chi\right) = d_1 \left[(1+\lambda)\Theta - \kappa)\right]. \end{aligned}$$

С учетом (26), (28) получаем справедливость данного утверждения. Теперь производные от y_α можно записать как

$$d_1 y_1 = \frac{1}{2}\left[(1+\lambda)\Theta + \kappa\right], \quad d_2 y_1 = \frac{1}{2}\left(-2\lambda\omega + \chi\right),$$

$$d_1 y_2 = \frac{1}{2}\left(2\lambda\omega + \chi\right), \quad d_2 y_2 = \frac{1}{2}\left[(1+\lambda)\Theta - \kappa\right].$$

Тогда оператор Лапласа от функций y_α будет иметь вид:

$$\begin{aligned} 2\Delta y_1 &= d_1 \left[(1+\lambda)\Theta + \kappa\right] + d_2(-2\lambda\omega + \chi) = 0, \\ 2\Delta y_2 &= d_1 \left(2\lambda\omega + \chi\right) + d_2 \left[(1+\lambda)\Theta - \kappa\right] = 0. \end{aligned}$$

Равенство нулю правых частей следует из (26), (28). Утверждение доказано. □

Рассмотрим также вопрос о том, как преобразуется исходная система уравнений равновесия (1) на собственных векторах. Для этого докажем следующее **утверждение**.

Система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (1) для собственных векторов $\vec{\varphi}, \vec{\psi}$ преобразуется к системе дифференциальных уравнений первого порядка (26). Действительно, рассмотрим собственный вектор $\vec{\varphi}$ и его компоненты φ_α, определенные по (23). Согласно (3) имеем

$$A\vec{\varphi} = \lambda \Delta \vec{\varphi}.$$

Вычисляя оператор Лапласа от компонент φ_α и учитывая гармоничность f, находим

$$A\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} -(1+\lambda) d_1 \Theta \\ 2\lambda d_1 \omega \end{pmatrix}.$$

Точно таким же способом рассчитаем

$$A\vec{\psi} = (1+\lambda)\Delta\vec{\psi} = \begin{pmatrix} (1+\lambda) d_1 \Theta \\ -2\lambda d_1 \omega \end{pmatrix}.$$

С учетом (26) можем записать

$$A\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} -2\lambda d_2\omega \\ 2\lambda d_1\omega \end{pmatrix},$$

$$A\vec{\psi} = \begin{pmatrix} (1+\lambda)d_1\Theta \\ (1+\lambda)d_2\Theta \end{pmatrix}.$$

Поскольку искомый вектор $\vec{u}$ есть сумма $\vec{\varphi}, \vec{\psi}$, получаем

$$A\vec{u} = A\left(\vec{\varphi} + \vec{\psi}\right) = \begin{pmatrix} -2\lambda d_2\omega + (1+\lambda)d_1\Theta \\ 2\lambda d_1\omega + (1+\lambda)d_2\Theta \end{pmatrix} = 0.$$

Здесь равенство нулю имеет место в силу (26). Утверждение доказано. □

Таким образом, представление решения системы (1) в виде разложения по собственным векторам понижает на единицу порядок дифференциальной системы уравнений. Здесь возможно провести некоторую аналогию с алгебраическими системами уравнений, в которых упрощение структуры алгебраической системы происходит при умножении матрицы на ее собственный вектор.

5. Следствия из соотношений для собственных векторов

Из соотношений для собственных векторов плоской задачи теории упругости в форме (17), (22) вытекают некоторые важные для дальнейших рассуждений следствия.

Следствие 1. *Напряжения с точностью до производных от гармонической функции равны первым производным от компонент собственного вектора $\vec{\psi}$.*

Для доказательства запишем соотношения закона Гука в виде зависимостей напряжений от первых производных перемещений. Предварительно, для удобства выкладок, умножим компоненты тензора напряжений и компоненты вектора граничных нагрузок X_n, Y_n на множитель λ/G, т. е. будем использовать

$$\sigma'_x = \frac{\lambda}{G}\sigma_x, \quad \sigma'_y = \frac{\lambda}{G}\sigma_y, \quad \tau'_{xy} = \frac{\lambda}{G}\tau_{xy}, \quad X'_n = \frac{\lambda}{G}X_n, \quad Y'_n = \frac{\lambda}{G}Y_n.$$

В дальнейшем штрихи опустим. Тогда закон Гука запишется в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \Theta + \lambda(d_1u - d_2v), \\ \sigma_y &= \Theta - \lambda(d_1u - d_2v), \\ \tau_{xy} &= \lambda(d_1v + d_2u). \end{aligned} \tag{30}$$

Учитывая (11), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_x &= d_1y_1 + d_2y_2 - 2\lambda d_2v + C_1, \\ \sigma_y &= d_1y_1 + d_2y_2 - 2\lambda d_1u + C_1, \\ \tau_{xy} &= 2\lambda d_2u + d_1y_2 - d_2y_1 - C_2 = 2\lambda d_1v - (d_1y_2 - d_2y_1) + C_2. \end{aligned} \tag{31}$$

Теперь в соотношениях (31) для напряжений выделим производные от компонент собственного вектора ψ_α, определенные согласно (16). Тогда соотношения закона Гука принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2d_2\psi_2 + \kappa + C_1,\\ \sigma_y &= 2d_1\psi_1 - \kappa + C_1,\\ \tau_{xy} &= -2d_2\psi_1 + \chi - C_2 = -2d_1\psi_2 + \chi + C_2.\end{aligned} \tag{32}$$

Подстановка полученных выражений для напряжений в однородную систему уравнений равновесия

$$\begin{aligned}d_1\sigma_x + d_2\tau_{xy} &= 0,\\ d_2\sigma_y + d_1\tau_{xy} &= 0\end{aligned}$$

обращает последние в тождества.

Следствие 2. *Граничные значения напряжений не зависят от функций* κ, χ.

Для доказательства рассмотрим граничные условия для напряжений, которые, как известно, имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_x l + \tau_{xy} m &= \tilde{X}_n,\\ \sigma_y m + \tau_{xy} l &= \tilde{Y}_n.\end{aligned} \tag{33}$$

Здесь X_n, Y_n — заданные на границе напряжения:

$$\tilde{X}_n = \frac{\lambda}{G} X_n, \quad \tilde{Y}_n = \frac{\lambda}{G} Y_n,$$

l, m — косинусы углов, которые образует внешняя нормаль к граничному контуру:

$$\begin{aligned}l &= \cos(n, x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}S},\\ m &= \cos(n, y) = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}S},\end{aligned} \tag{34}$$

S — дуга граничного контура.

Подставим в уравнения (33) соотношения (32). Получим

$$\begin{aligned}2(ld_2 - md_1)\psi_2 &= \tilde{X}_n - l(\kappa + C_1) - m(\chi + C_2),\\ -2(ld_2 - md_1)\psi_1 &= \tilde{Y}_n - m(-\kappa + C_1) - l(\chi - C_2).\end{aligned} \tag{35}$$

Оператор, стоящий в левой части, есть производная по дуге S:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S} = ld_2 - md_1.$$

Интегрируя (35) по S от 0 до S_1, где S_1 — произвольная точка на контуре, находим

$$\psi_2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{S_1} \left(\tilde{X}_n - l\kappa - m\chi - lC_1 - mC_2\right) \mathrm{d}S,$$

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \int\limits_0^{S_1} \left(-\tilde{Y}_n - m\kappa + l\chi + mC_1 - lC_2 \right) \mathrm{d}S.$$

Теперь, зная выражения для ψ_α, можем найти напряжения согласно (32):

$$\sigma_x = \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^{S_1} \tilde{X}_n \mathrm{d}S + \kappa + C_1 - \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^{S_1} (l\kappa + m\chi + lC_1 + mC_2)\, \mathrm{d}S,$$

$$\sigma_y = -\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_0^{S_1} \tilde{Y}_n \mathrm{d}S - \kappa + C_1 + \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_0^{S_1} (-m\kappa + l\chi + mC_1 - lC_2)\, \mathrm{d}S.$$

Воспользуемся соотношениями для направляющих косинусов (34) и перейдем от интегрирования по дуге к интегралам по x и y. В результате в последнем выражении слагаемые, не содержащие интегралов от поверхностных нагрузок, обращаются в ноль, и мы получаем

$$\sigma_x = \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^{S_1} \tilde{X}_n \mathrm{d}S, \quad \sigma_y = -\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_0^{S_1} \tilde{Y}_n \mathrm{d}S. \tag{36}$$

Совершенно аналогично вычисляются два выражения для τ_{xy}, определяемые по (32):

$$\tau_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^{S_1} \tilde{Y}_n \mathrm{d}S = -\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_0^{S_1} \tilde{X}_n \mathrm{d}S. \tag{37}$$

Равенство в (37) следует из условия равновесия на границе:

$$\int\limits_0^{S_1} \left(\frac{\partial \tilde{X}_n}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{Y}_n}{\partial y} \right) \mathrm{d}S = 0.$$

Таким образом, напряжения в области согласно (32) зависят от пары сопряженно-гармонических функций κ, χ, а на границе определяются только значениями поверхностных напряжений.

6. Граничные условия для функций κ, χ

Ключевым моментом в построении решений плоской теории упругости с помощью ДСУР является формулировка граничных условий. В случае задания на границе области напряжений последние не зависят от пары сопряженно-гармонических функций, однако для расчета напряженного состояния в области согласно (32) необходимо определение κ, χ. При формулировке граничных условий для ДСУР возможны два варианта преобразований:

а) напряжения выражаются через функции $y_\alpha = y_\alpha(x, y)$ согласно (21), (25), (32);

б) напряжения выражаются через функции Θ, ω с использованием (21), (32). В этом случае целесообразно использовать систему уравнений равновесия в виде (26).

В обоих случаях напряжения в области будут зависеть от κ и χ. Однако случай (б) более предпочтителен для реализации, поскольку компоненты напряженного состояния будут в итоге зависеть от двух пар сопряженно-гармонических функций Θ, ω и κ, χ, удовлетворяющих системе Коши—Римана, тогда как в варианте (а) получаем зависимость от пары гармонических функций $y_\alpha(x, y)$ плюс две аналитические функции κ, χ. Использование в решении функций, удовлетворяющих системе Коши — Римана, позволяет отыскивать с точностью до константы сопряженную функцию по известной — путем вычисления интеграла, который не зависит от пути интегрирования.

Подставим выражения ψ_α из (21) в соотношения закона Гука (32), используем (26), тогда

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -xd_1\Theta - \kappa + C_1, \\ \sigma_y &= 2\Theta + xd_1\Theta + \kappa + C_1, \\ \tau_{xy} &= \frac{2\lambda}{1+\lambda}\omega - xd_2\Theta - \chi + C_2. \end{aligned} \tag{38}$$

Обозначим $\alpha = 2\lambda/(1+\lambda)$, тогда система (26), записанная в виде

$$\begin{aligned} d_1\Theta &= \alpha d_2\omega, \\ d_2\Theta &= -\alpha d_1\omega, \end{aligned} \tag{39}$$

есть система Коши—Римана для функций $\Theta, \alpha\omega$. Из (38) имеем

$$\Theta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + C_1.$$

Из (36) получаем граничное условие для $\Theta = \Theta(x, y)$:

$$\Theta_\Gamma = \frac{1}{2}\left(d_2R_x - d_1R_y\right) + C_1. \tag{40}$$

Здесь обозначено

$$R_x = \int\limits_0^{S_1} \tilde{X}_n \mathrm{d}S, \quad R_y = \int\limits_0^{S_1} \tilde{Y}_n \mathrm{d}S.$$

При известном из (36) значении напряжения σ_x на границе находим граничное условие для функции $\kappa = \kappa(x, y)$:

$$\kappa_\Gamma = -(d_2R_x + xd_1\Theta) + C_1. \tag{41}$$

Здесь производная $d_1\Theta$ вычисляется исходя из значения Θ на границе Γ, определяемого по (40). Заметим, что из (40), (41) можно получить граничное условие для σ_y в виде (36).

Рассмотрим граничное условие для τ_{xy} (37). Имеем

$$\alpha d_1(x\omega) - \chi + C_2 = d_2R_y = -d_1R_x. \tag{42}$$

Третье граничное условие связывает функции $\alpha\omega$ и χ. Однако для определения двух пар сопряженно-гармонических функций Θ, ω и κ, χ достаточно двух граничных условий.

Действительно, в силу (39) имеем граничное представление для $\alpha\omega$ в виде полного интеграла:

$$\alpha\omega = \int\limits_0^{(x,y)} \left(-d_2\Theta\mathrm{d}x + d_1\Theta\mathrm{d}y\right). \tag{43}$$

Используем (40) и получим

$$2\alpha\omega = \int\limits_0^{(x,y)} \left(-d_2^2 R_x + d_1 d_2 R_y\right) \mathrm{d}x + \left(d_1 d_2 R_x - d_1^2 R_y\right) \mathrm{d}y.$$

В силу

$$d_1 R_x = -d_2 R_y$$

имеем

$$2\alpha\omega = \int\limits_0^{(x,y)} \left(-d_2^2 R_x - d_1^2 R_y\right) \mathrm{d}x + \left(-d_2^2 R_y - d_1^2 R_y\right) \mathrm{d}y = -\Delta \int\limits_0^{S_1} \left(R_x \mathrm{d}x + R_y \mathrm{d}y\right). \tag{44}$$

Функции κ, χ также удовлетворяют системе Коши—Римана, поэтому

$$\chi = \int\limits_0^{(x,y)} \left(d_2 \kappa \mathrm{d}x - d_1 \kappa \mathrm{d}y\right). \tag{45}$$

Покажем, что χ, определяемая по (45), удовлетворяет граничному условию (42). Для доказательства подставим в (45) значение функции κ из (41):

$$\chi = \int\limits_0^{(x,y)} \left[-(d_2^2 R_x + x d_1 d_2 \Theta)\mathrm{d}x + (d_1 d_2 R_x + d_1 \Theta + x d_1^2 \Theta)\mathrm{d}y\right]. \tag{46}$$

Преобразуем сначала интеграл I_1, содержащий производные от R_x:

$$\begin{aligned} I_1 &= d_2 \int\limits_0^{(x,y)} (-d_2 R_x \mathrm{d}x + d_1 R_x \mathrm{d}y) = d_2 \int\limits_0^{(x,y)} [(-d_1 R_y - 2\Theta)\mathrm{d}x - d_2 R_y \mathrm{d}y)] = \\ &= -d_2 R_y - 2 \int\limits_0^{(x,y)} d_2 \Theta \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{47}$$

Рассмотрим интеграл I_2, содержащий производные от Θ, включая последнее слагаемое (47):

$$I_2 = \int\limits_0^{(x,y)} \left[x d_1(-d_2 \Theta \mathrm{d}x + d_1 \Theta \mathrm{d}y) + d_1 \Theta \mathrm{d}y - 2 d_2 \Theta \mathrm{d}x\right],$$

с учетом (39) получаем

$$I_2 = \alpha \int\limits_0^{(x,y)} (x d_1 \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\omega + d_1 \omega \mathrm{d}x) = \alpha d_1(x\omega).$$

Отсюда с учетом выражения для I_1 находим

$$\chi = -d_2 R_y + \alpha d_1(x\omega).$$

Последнее выражение совпадает с (42).

Функции $\Theta, \kappa, \alpha\omega$ и χ определяются через полные интегралы (40), (41), (43), (45). Рассмотрим, например, интеграл (45). Условие полного дифференциала для (46) записывается

$$-d_2(d_2^2 R_x + x d_1 d_2 \Theta) = d_1(d_1 d_2 R_x + d_1 \Theta + x d_1^2 \Theta).$$

Или, приводя подобные:

$$2d_1^2\Theta + d_3^2 R_x + d_1^2 d_2 R_x + x d_1 \Delta\Theta = 0. \tag{48}$$

Последнее слагаемое обращается в нуль в силу гармоничности Θ. Преобразуем члены, содержащие R_x, используя (40):

$$d_2^3 R_x = d_2^2(2\Theta + d_1 R_y).$$

Отсюда

$$d_2^3 R_x + d_1^2 d_2 R_x = 2d_2^2\Theta + d_1 d_2^2 R_y + d_1^2 d_2 R_x = 2d_2^2\Theta + d_1 d_2(d_2 R_y + d_1 R_x) = 2d_2^2\Theta.$$

Сумма производных в круглых скобках обращается в ноль в силу (37). Возвращаясь к (48), получаем искомое утверждение. Покажем, что интеграл (44) также не зависит от пути интегрирования. Условие полного дифференциала в этом случае записывается так:

$$\Delta d_2 R_x - \Delta d_1 R_y = 0.$$

Преобразуем последнее равенство к следующему виду:

$$d_2^2(d_2 R_x - d_1 R_y) + d_1^2(d_2 R_x - d_1 R_y) = d_2^2 2\Theta + d_1^2 2\Theta = 2\Delta\Theta = 0.$$

Последнее равенство выполняется в силу гармоничности Θ. Заметим, что полученные условия полноты интегралов позволяют отыскивать сопряженные функции $\alpha\omega, \chi$ в любой внутренней точке упругого тела.

Легко видеть, что напряжения, определяемые с помощью (38) и граничных условий (40), (41), (44), не будут зависеть от упругих констант, и таким образом гарантируется выполнение известной теоремы Леви [10].

7. Использование функции напряжений

Решение Лява [1, 10] для плоской теории упругости кроме соотношений (18), (24), связывающих объемную деформацию Θ и вращение ω с перемещениями u, v, содержит также выражение для функции напряжений, которое запишем в виде

$$\Phi = \frac{1}{1+\lambda} x\xi + 2f. \tag{49}$$

Здесь Φ — функция напряжений Эри, ξ — определяется (18), f — произвольная гармоническая функция, через которую выражается κ, χ по (27).

Непосредственной проверкой, используя (38), можно убедиться в том, что напряжения связаны с Φ известными соотношениями [1, 10]:

$$\sigma_x = d_2^2\Phi, \quad \sigma_y = d_1^2\Phi, \quad \tau_{xy} = -d_1 d_2 \Phi. \tag{50}$$

Связь с функцией напряжений можно использовать для формулировки других видов граничных условий (эквивалентных ранее найденным) относительно двух пар сопряженно-гармонических функций. Рассмотрим интегралы от напряжений с учетом (49), (50):

$$\begin{aligned}\int(\sigma_x \mathrm{d}y-\tau_{xy}\mathrm{d}x) &= d_2\Phi=-\alpha x\omega+2d_2 f,\\ \int(\sigma_y \mathrm{d}x-\tau_{xy}\mathrm{d}y) &= d_1\Phi=x\Theta+\frac{\xi}{1+\lambda}+2d_1 f.\end{aligned} \tag{51}$$

При интегрировании учтено известное [11] условие о том, что однородная система уравнений равновесия в напряжениях служит условиями полного дифференциала для первых производных Φ. Последнее можно проверить по-другому, используя выражения правых частей (51). Действительно, из (51) имеем

$$\Phi=\int\limits_0^{(x,y)}(-\alpha x\omega+2d_2 f)\mathrm{d}y+\left(x\Theta+\frac{\xi}{1+\lambda}+2d_1 f\right)\mathrm{d}x.$$

Условие полного дифференциала

$$d_1(-\alpha x\omega+2d_2 f)=d_2\left(x\Theta+\frac{\xi}{1+\lambda}+2d_1 f\right)$$

выполняется в силу (28), (39). Используем теперь граничные условия для Φ, которые с точностью до констант можно представить в следующем виде [2]:

$$d_2\Phi=R_x,\quad d_1\Phi=-R_y. \tag{52}$$

Отсюда, в частности, следует

$$\Phi_\Gamma=\int\limits_0^{(x,y)}\left(-R_y\mathrm{d}x+R_x\mathrm{d}y\right).$$

Последний интеграл не зависит от пути интегрирования в силу

$$-d_2R_y=d_1R_x.$$

С учетом (51), (52) сформулируем граничные условия вида

$$\begin{aligned}&-\alpha x\omega+2d_2 f=R_x,\\ &x\Theta+\frac{\xi}{1+\lambda}+2d_1 f=-R_y.\end{aligned} \tag{53}$$

Легко убедиться, что найденные ранее выражения граничных условий получены дифференцированием (53). Первое уравнение (53) можно получить другим способом, учитывая (38). Действительно, преобразуем выражения σ_x,τ_{xy} к виду

$$\sigma_x=-\alpha x d_2\omega-\kappa,$$

$$\tau_{xy} = \alpha x d_1(x\omega) - \chi$$

и, подставляя их в (33), получаем

$$l\sigma_x + m\tau_{xy} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\alpha x\omega) - (l\kappa + m\chi) = \tilde{X}_n.$$

Откуда

$$-\alpha x\omega = R_x + \int\limits_0^{S_1}(l\kappa + m\chi)\mathrm{d}S.$$

Учитывая (34) и представление функции $2d_2 f$ через полный дифференциал

$$2d_2 f = \int\limits_0^{(x,y)}(\chi\mathrm{d}x - \kappa\mathrm{d}y),$$

получаем искомый результат. Второе уравнение (53) можно получить точно таким же способом.

8. Примеры решения простейших одномерных и двумерных задач

С использованием двух пар сопряженно-гармонических функций Θ, ω и κ, χ схема решения плоских задач теории упругости в напряжениях принимает следующий вид.

1. Граничная задача для $\Theta = \Theta(x, y)$ (задача Дирихле). Уравнение равновесия в области и граничное условие:

$$\Delta\Theta = 0, \quad \Theta_\Gamma = \frac{1}{2}(d_2R_x - d_1R_y).$$

2. Определение сопряженно-гармонической функции $\omega = \omega(x, y)$ по $\Theta(x, y)$:

$$\alpha\omega(x, y) = \int\limits_0^{(x,y)}(-d_2\Theta\mathrm{d}x + d_1\Theta\mathrm{d}y) + C.$$

Последнее соотношение справедливо для любой точки области.

3. Граничная задача для $\kappa = \kappa(x, y)$ (задача Дирихле). Уравнение равновесия в области и граничное условие:

$$\Delta\kappa = 0, \quad \kappa|_\Gamma = -(d_2R_x + xd_1\Theta_\Gamma) = -d_2R_x - \frac{x}{2}(d_1d_2R_x - d_1^2R_y).$$

4. Определение $\chi = \chi(x, y)$ по κ:

$$\chi(x, y) = \int\limits_0^{(x,y)}(d_2\kappa\mathrm{d}x - d_1\kappa\mathrm{d}y) + C'.$$

5. Определение компонент напряженного состояния по (38).

В рассмотренных ниже примерах *А* — *Д* константы C, C' полагались равными нулю.

А. Простое растяжение (сжатие) полосы

Пусть прямоугольная полоса (рис. 1) подвергается действию равномерно распределенной по двум граням растягивающей нагрузки интенсивностью $q = 2a = \mathrm{const}$. Граничные напряжения зададим следующим образом:

$$X_n = 0, \quad Y_n = 2am,$$

где $m = \cos(n, y)$. Суммарные напряжения, действующие вдоль осей x, y, будут равны

$$R_x = 0, \quad R_y = \int\limits_0^{S_1} Y_n \mathrm{d}S = \int\limits_0^{x} (-2a)\mathrm{d}x = -2ax.$$

Здесь интеграл по дуге заменен интегралом по x, поскольку $m\mathrm{d}S = -\mathrm{d}x$. Гармоническая функция Θ должна согласно (40) удовлетворять условию

$$\Theta_\Gamma = a.$$

Полагая $\Theta = \Theta_\Gamma$ в области, найдем $\alpha\omega$ по (43):

$$\alpha\omega = \int\limits_0^{(x,y)} (-d_2\Theta \mathrm{d}x + d_1\Theta \mathrm{d}y) = 0.$$

Расчет граничного условия для κ по (41) дает нулевое значение. Принимаем $\chi = 0$ по (45). Тогда выражения для напряжений будут

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 2a, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Б. Задача о растяжении полосы нагрузкой, распределенной по треугольному закону (рис. 2)

Граничные напряжения задаются следующим образом:

$$X_n = 0, \quad Y_n = 6axm.$$

Погонная нагрузка

$$R_x = 0, \quad R_y = -3ax^2.$$

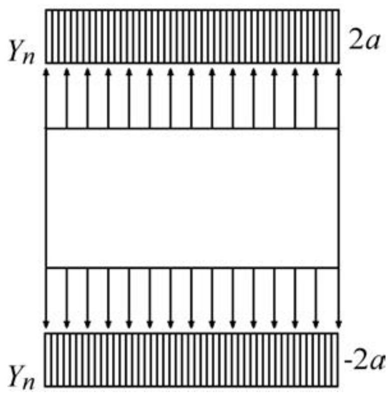

Рис. 1

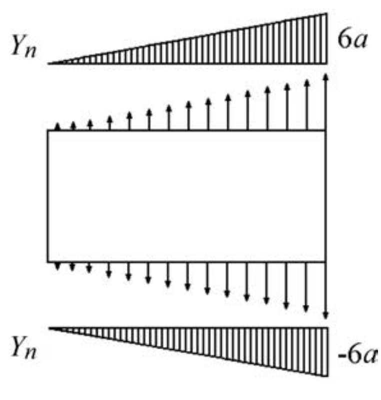

Рис. 2

Граничное условие для Θ по (40):

$$\Theta_\Gamma = 3ax.$$

Функция $\Theta = 3ax$ удовлетворяет гармоническому уравнению. Найдем $\alpha\omega$ по (43):

$$\alpha\omega = 3ay.$$

Для функции κ согласно (41) имеем граничное условие

$$\kappa_\Gamma = -3ax.$$

Принимаем $\kappa(x,y)$ в области, равной κ_Γ, поскольку эта функция удовлетворяет гармоническому уравнению. Значения $\chi(x,y)$ по (45) имеют вид

$$\chi(x,y) = 3ay.$$

Отсюда получаем напряжения

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 6ax, \quad \tau_{xy} = 0.$$

B. Случай, когда к полосе приложены нормальные и сдвиговые напряжения (рис. 3)

Граничные условия следующие:

$$X_n = -2axm, \quad Y_n = 2a(ym - xl),$$

где l, m определяются по (34). Вычисляем R_x, R_y:

$$R_x = ax^2, \quad R_y = -2axy.$$

Граничное условие для Θ

$$\Theta_\Gamma = ay.$$

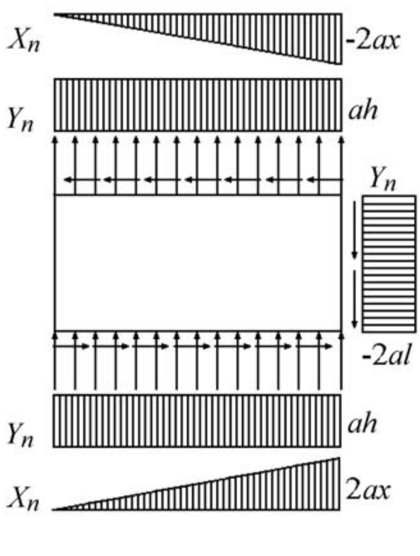

Рис. 3

Получаем $\Theta(x,y)=\Theta_\Gamma$. Тогда

$$\alpha\omega(x,y)=\int\limits_0^{(x,y)}(-d_2\Theta \mathrm{d}x+d_1\Theta \mathrm{d}y)=-ax.$$

Граничные условия для κ по (41)

$$\kappa_\Gamma=0.$$

Полагаем $\kappa=\kappa_\Gamma$, $\chi=0$, тогда

$$\sigma_x=0,\quad \sigma_y=2ay,\quad \tau_{xy}=-2ay.$$

Г. Другой способ задания растягивающих и сдвиговых напряжений (рис. 4)
Граничные напряжения:

$$X_n=2a(xl-ym),\quad Y_n=axyl,$$

$$R_x=2axy,\qquad R_y=ay^2.$$

Отсюда находим

$$\Theta=\Theta_\Gamma=ax,$$

$$\alpha\omega=ay.$$

Граничное условие для κ:

$$\kappa_\Gamma=-3ax,$$

$$\chi=3ay.$$

Напряжения:

$$\sigma_x=2ax,\quad \sigma_y=0,\quad \tau_{xy}=-2ay.$$

Д. Изгиб моментами, приложенными к боковым граням (рис. 5)
Имеем

$$X_n=6ayl,\quad Y_n=0,$$

$$R_x=3ay^2,\quad R_y=0.$$

Граничное условие для Θ:

$$\Theta_\Gamma=3ay.$$

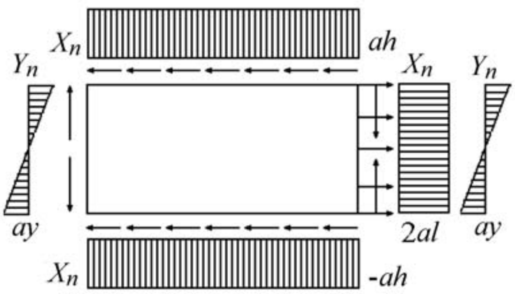

Рис. 4

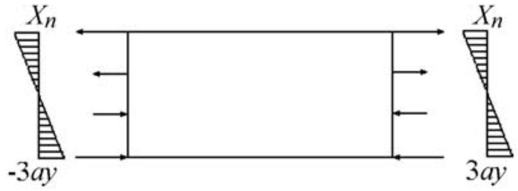

Рис. 5

Далее находим:

$$\alpha\omega = -3ax,$$
$$\kappa_\Gamma = -6ay,$$
$$\chi = -6ax.$$

В итоге компоненты напряжений принимают следующий вид:

$$\sigma_x = 6ay, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

Все найденные в задачах А — Г решения для компонент тензора напряжений совпадают с точностью до обозначений с решениями, полученными с помощью функции напряжений [12].

Е. Сосредоточенная нормальная сила

Рассмотрим напряжения в полуплоскости $y \geq 0$, вызванные сосредоточенной силой P, перпендикулярной к границе $y = 0$. Данная задача была решена Фламаном (1892 г.). Рассмотрим решение на основе краевой задачи для одной гармонической функции.

Зададимся общим решением гармонического уравнения для Θ в виде

$$\Theta = A\frac{y}{r^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad A = \text{const},$$

а функцию κ положим равной нулю во всей полуплоскости. Тогда

$$\begin{aligned} d_1\Theta &= -2A\frac{xy}{r^4}, \\ \sigma_x &= -xd_1\Theta = 2A\frac{x^2y}{r^4}, \\ \sigma_y &= 2\Theta + xd_1\Theta = 2A\frac{y^3}{r^4}. \end{aligned}$$

Функцию $\alpha\omega$, сопряженно-гармоническую Θ, найдем с помощью

$$\alpha\omega = -A\int\limits_0^{(x,y)} \frac{(x^2-y^2)}{r^4}\mathrm{d}x + \frac{2xy}{r^4}\mathrm{d}y.$$

Подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции. Вычисляя криволинейный интеграл по x, y, объединяя полученные выражения и беря каждый из одинаковых членов, входящих в оба интеграла, по одному разу, получим

$$\alpha\omega = A\frac{x}{r^2}.$$

Теперь рассчитаем τ_{xy}:

$$\tau_{xy} = \alpha\omega - xd_2\Theta = \frac{2Axy^2}{r^4}.$$

Постоянную A найдем, следуя методике, изложенной в [10]. Вычислим равнодействующую силу элементарных сил, распределенных на поверхности полуцилиндра, описанного около оси OZ, и приравняем ее $-P$. Имеем

$$-P = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} Y_n r\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sigma_y\frac{y}{r} + \tau_{xy}\frac{x}{r}\right) r\mathrm{d}\varphi.$$

Подставляя полученные выражения σ_y, τ_{xy}, найдем

$$A = -\frac{P}{\pi}.$$

Таким образом,

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi}\frac{x^2 y}{r^4}, \quad \sigma_y = -\frac{2P}{\pi}\frac{y^3}{r^4}, \quad \tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi}\frac{xy^2}{r^4},$$

что совпадает с решением, полученным с помощью функции напряжений.

9. Выводы

1. Получено диагональное представление дифференциальных уравнений равновесия плоской теории упругости в перемещениях.

2. Получены собственные значения и соотношения для собственных векторов матрицы системы уравнений равновесия; доказана тождественность разложения искомого вектора перемещений по собственным векторам и разложения Гельмгольца.

3. Найденные выражения собственных векторов через перемещения позволяют получить зависимость напряжений через пару сопряженно-гармонических функций и сформулировать граничные условия для искомых функций.

4. Показано, что решение краевой задачи теории упругости в напряжениях сводится к решению двух задач Дирихле для гармонических функций. При этом две другие функции, через которые выражаются компоненты тензора напряжений, находятся как сопряженно-гармонические.

5. Приведены решения нескольких одномерных и плоских задач теории упругости, полностью совпадающие с решениями, найденными с помощью функции напряжений.

Список литературы

[1] Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 674 с.

[2] Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. СПб.: Изд-во ГТУ, 1998. 532 с.

[3] Светашков А.А. Собственные преобразования системы уравнений теории упругости // Изв. вузов. Физика. 2004. № 10. Приложение. С. 98–101.

[4] Светашков А.А. О приведении системы дифференциальных уравнений пространственной теории упругости к диагональному виду // Изв. вузов. Физика. 2005. № 11. Приложение. С. 116–120.

[5] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: 1956. 708 с.

[6] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

[7] Шешенин С.В. Об одном типе итерационных методов для решения некоторых задач механики деформируемого твердого тела // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1997. № 2. С. 21–26.

[8] Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.

[9] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1968. 720 с.

[10] Лейбензон Л.С. Краткий курс теории упругости. М.; Л.: ОГИЗ ГТТЛ, 1942. 304 с.

[11] Кац А.М. Теория упругости. СПб.: Лань, 2002. 208 с.

[12] Жемочкин Б.Н. Теория упругости. М.: Госстройиздат, 1957. 256 с.

Поступила в редакцию 24 марта 2006 г.,
в переработанном виде — 6 февраля 2007 г.