

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ ПРИ РЕШЕНИИ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ (ТОМОГРАФИЯ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ)\*

А. А. ШВАБ

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,  
Новосибирск, Россия*  
e-mail: [schwab@ngs.ru](mailto:schwab@ngs.ru)

An estimation of accuracy of the numerical schemes for problems of static elasticity theory is considered. The problem of the error estimation is formulated as a non classical boundary problem. Boundary conditions for such problem are based on the results of the numerical solution of the tested problem of the theory of elasticity. The problem of diagnostics is reduced to the solution of the integral equations. A possibility of the estimation of the accuracy of the solution is shown numerically.

В настоящее время существует много программ метода конечных элементов (МКЭ) с разработанными интерфейсами для расчета задач упругого и неупругого деформирования тел с различной реологией. В большей степени расчет задач длительной прочности и пластичности основан на пошаговом интегрировании с решением на каждом шаге систем уравнений теории упругости с ненулевой правой частью. В целом, при всей универсальности МКЭ, точность метода зависит от плотности сетки разбиения и точности обращения матрицы большого порядка. Причем при увеличении плотности сетки возрастает порядок матрицы, что ведет к возрастанию ошибки обращения матрицы. Следует заметить, что в целом лицензионные комплексы вполне удовлетворительно описывают состояние конструкций в области упругого и термоупругого деформирования.

При расчете на длительную прочность зависимость деформаций от напряжений носит экспоненциальный или степенной характер, что в свою очередь приводит к подобному росту ошибки решения задачи на фиксированном шаге по времени. Это меняет картину распределения напряжений в конструкции и ведет к значительному расхождению по времени до разрушения (свыше 300%). Аналогичное замечание можно сделать для упругопластических задач, а именно задач, связанных с технологическими процессами (например, задач формообразования). Для материалов с физически нелинейными свойствами по той же причине фактически невозможно оценить адекватность численного счета реальному поведению конструкции.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00673) и Президентской программы “Ведущие научные школы РФ” (грант № НШ-6481.2006.1).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2007.

Общепринятая диагностика программ основана на проверке соответствия численного и аналитического решений для известных задач. Это, как правило, одномерные или двумерные задачи. Для пространственных задач исследуется сходимость при уплотнении сетки, что несет косвенную количественную информацию о точности решения. Можно отметить также методы оценки по аппроксимации исходных уравнений, позволяющие сделать выводы о приближении дифференциального оператора дискретным аналогом, но при этом такая оценка напрямую никак не связана с точностью решения.

Как было сказано выше, решение нелинейных задач связано с решением задач теории упругости при использовании метода пошагового интегрирования. Поэтому оценка точности решения задачи теории упругости представляет как самостоятельный интерес, так и определенный интерес для нелинейных задач. В данной работе оценка проводится на основе формулировки и решения существенно переопределенной задачи теории упругости [1].

Приведем основные определения и теоремы, касающиеся существенно переопределенной задачи. В работе [1], была сформулирована и рассмотрена существенно переопределенная задача теории упругости, где было введено определение.

**Определение.** *Существенно переопределенными назовем условия, когда на всей поверхности тела заданы одновременно вектор смещения и вектор нагрузки.*

В дальнейшем задачу с существенно переопределенными условиями будем называть **существенно переопределенной задачей**.

Для однородной упругой среды очевидно, что существенно переопределенные условия не могут быть произвольными, т. е. векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{p}$  функционально зависимы. Получим необходимые условия согласования и вытекающие из них следствия. Рассмотрим тело объема  $\Omega$  с поверхностью  $\partial\Omega$ . Пусть векторы

$$\mathbf{A}(\xi) = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{a}(x)U^0(x, \xi)dS_x,$$

$$\mathbf{B}(\xi) = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{b}(x)R^0(x, \xi)dS_x$$

являются потенциалами простого и двойного слоев теории упругости. Здесь  $U^0(x, \xi) = U_{ij}^*(x, \xi)$  — тензор Кельвина — Сомильяны,  $R^0(x, \xi) = P_{ij}^*(x, \xi)$  — силовой тензор влияния,  $\mathbf{a}(x)$  и  $\mathbf{b}(x)$  — плотности слоев [2]. Значения  $U_{ij}^*(x, \xi)$  и  $P_{ij}^*(x, \xi)$  соответствуют перемещениям и напряжениям, возникающим в точке  $x$  в направлении от единичной сосредоточенной нагрузки, действующей в  $j$ -м направлении и приложенной в точке  $\xi$ . Для пространственного случая имеем [2]

$$U_{lk}^*(x, \xi) = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} \left[ (3-4\nu)\delta_{lk} + \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right],$$

$$P_{lk}^*(x, \xi) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} \left( (1-2\nu)\delta_{lk} + 3\frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_l} \right) + \right. \\ \left. + (1-2\nu) \left( \frac{\partial r}{\partial x_l} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_l \right) \right] \quad (l, k = 1, 2).$$

Здесь  $r = r(x, \xi) = (r_l r_l)^{0.5}$ ,  $r_l = x_l(x) - x_l(\xi)$ . Полагаем, что  $\partial\Omega$  кусочно-гладкая, по Ляпунову, и  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  удовлетворяют условию Гёльдера. Пусть  $\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{A}(\xi) - \mathbf{B}(\xi)$ . Запишем аналог формулы Сомильяны:

$$\iint_{\partial\Omega} [\mathbf{a}(x)U^0(x, \xi) - \mathbf{b}(x)R^0(x, \xi)] dS_x = \begin{cases} \mathbf{u}^+(\xi), & \xi \in \Omega^+, \\ \mathbf{u}^-(\xi), & \xi \in \Omega^-. \end{cases} \quad (1)$$

Будем говорить, что плотности  $\mathbf{a}(x)$  и  $\mathbf{b}(x)$  согласованы между собой, если вектор  $\mathbf{u}^+(\xi) \rightarrow \mathbf{b}(x)$  при  $\xi \rightarrow x$ ,  $x \in \partial\Omega$ . Согласованность плотностей можно трактовать следующим образом. Если на однородное упругое тело действует усилие  $\mathbf{p} = \mathbf{a}|_{\partial\Omega}$ , то оно вызовет перемещения  $\mathbf{u}(x)$ , которые на  $\partial\Omega$  совпадут с плотностью  $\mathbf{b}(x)$ , а в  $\Omega$  — с вектором  $\mathbf{u}^+(\xi)$ . В силу единственности решения первой и второй основных задач теории упругости, по плотности  $\mathbf{a}(x)$  однозначно восстанавливается согласованная с ней  $\mathbf{b}(x)$  (с точностью до жесткого смещения), и обратно, по  $\mathbf{b}(x)$  определяется однозначно  $\mathbf{a}(x)$ . В дальнейшем множество пар  $(\mathbf{b}, \mathbf{a})$  согласованных плотностей обозначим через  $H(\partial\Omega)$ . Наряду с обозначением пары  $(\mathbf{b}, \mathbf{a})$  используем эквивалентное обозначение  $(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ . Сформулируем следующую теорему [1].

**Теорема 1.** (Теорема о согласовании плотностей). *Плотности  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  согласованы, т. е.  $(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \in H(\partial\Omega)$   $[(\mathbf{u}, \mathbf{p}) \in H(\partial\Omega)]$  тогда и только тогда, когда выполнено равенство*

$$\Delta(\xi) = 0, \quad \xi \in \Omega^-, \quad (2)$$

где

$$\Delta(\xi) = \iint_{\partial\Omega} [\mathbf{a}(x)U^0(x, \xi) - \mathbf{b}(x)R^0(x, \xi)] dS_x.$$

Теорема 1 аналогична теореме о граничных значениях аналитической функции в теории функций комплексной переменной (ТФКП), в которой определены условия непрерывного продолжения функции с контура в область. В теории упругости эта теорема дает условия связи между векторами  $\mathbf{u}, \mathbf{p}$ , при которых решение уравнений Ламе непрерывно продолжается в область с поверхности тела. Эту теорему по аналогии с ТФКП можно назвать теоремой о граничных значениях решения теории упругости или теоремой о граничных значениях для задачи теории упругости.

При решении задачи теории упругости первой, второй основных или смешанной задач вычисляются поля перемещений, деформаций и напряжений в области. На границе области из решения можно доопределить данные по векторам  $\mathbf{u}$  или  $\mathbf{p}$  в зависимости от поставленной задачи таким образом, чтобы на всей поверхности  $\partial\Omega$  были заданы одновременно существенно переопределенные условия. Эти данные могут принадлежать или не принадлежать классу согласованных условий, т. е. классу  $H(\partial\Omega)$ . В зависимости от выполнения или невыполнения соотношения (2) можно оценивать результаты численного счета либо существование “дефектов” в численной схеме или ошибок в численном счете. Подобную проверку можно назвать условно *томографией численных схем*. Термин *томография* используется в смысле восстановления ошибки по ее проекции на выходные данные программы.

Как было отмечено выше, можно использовать критерий  $H(\partial\Omega)$ . Мерой отклонения от критерия  $H(\partial\Omega)$  примем значения

$$\Delta_j(\xi) = \iint_{\partial\Omega} [p_i(x)U_{ij}^*(x, \xi) - u_i(x)P_{ij}^*(x, \xi)] dS_x, \quad \xi \in \Omega^-, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Соотношение (3) дает значение отклонения от критерия, но не позволяет оценить точность самого решения. Рассмотрим соотношения для оценки точности решения.

Предположим, что решается прямая задача, когда на поверхности  $\partial\Omega_u$  заданы значения вектора  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^T$ , а на  $\partial\Omega_p$  — вектора  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^T$ , где  $\partial\Omega_u + \partial\Omega_p = \partial\Omega$ . Если  $\partial\Omega_u = 0$ , то имеем первую основную задачу теории упругости, а если  $\partial\Omega_p = 0$ , то — вторую основную задачу. Обозначим  $\mathbf{u}^c, \mathbf{p}^c$  результат численного решения на  $\partial\Omega_p$  и  $\partial\Omega_u$  соответственно. Соотношения (2) и (3) запишем для численного решения

$$\begin{aligned} \Delta_j(\xi) = & \int \int_{\partial\Omega_u} \left[ p_i^c(x) U_{ij}^*(x, \xi) - u_i^T(x) P_{ij}^*(x, \xi) \right] dS_x + \\ & + \int \int_{\partial\Omega_p} \left[ p_i^T(x) U_{ij}^*(x, \xi) - u_i^c(x) P_{ij}^*(x, \xi) \right] dS_x, \quad \xi \in \Omega^-. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь и в дальнейшем через  $\mathbf{u}^T$  и  $\mathbf{p}^T$  будем обозначать точные значения векторов на всей поверхности  $\partial\Omega$ . Перепишем (2) и (3) для согласованных значений:

$$0 = \int \int_{\partial\Omega_p + \partial\Omega_u} \left[ p_i^T(x) U_{ij}^*(x, \xi) - u_i^T(x) P_{ij}^*(x, \xi) \right] dS_x, \quad \xi \in \Omega^-,$$

вычитая последние соотношения из  $\Delta_j(\xi)$ , находим

$$\int \int_{\partial\Omega_u} \Delta p_i(x) U_{ij}^*(x, \xi) dS_x + \int \int_{\partial\Omega_p} \Delta u_i(x) P_{ij}^*(x, \xi) dS_x = \Delta_j(\xi), \quad \xi \in \partial\Omega^-. \quad (5)$$

Соотношения (5) можно рассматривать как уравнения для определения ошибки на  $\partial\Omega_u$  и  $\partial\Omega_p$ .

Запишем дискретный аналог (5). Разобьем область  $\partial\Omega$  на площадки  $\Delta S_i$ , т. е.  $\partial\Omega = \sum_{i=1}^n \Delta S_i$ . Пусть  $\xi_{NO}$  — предельная точка к площадке  $\Delta S_N$  ( $\xi_{NO}$  — точка над площадкой  $\Delta S_N$ ),  $x_N$  — точка в центре площадки  $\Delta S_N$ . Перепишем (5):

$$\Delta p_i(x_N) A_{1ij} + B_{1j} + C_{1j} = \Delta_j(\xi_{NO}), \quad (6)$$

$$\Delta u_i(x_N) A_{2ij} + B_{2i} + C_{2i} = \Delta_j(\xi_{NO}), \quad (7)$$

где

$$A_{1ij} = \int \int_{\Delta S_N} U_{ij}^*(x, \xi_{NO}) dS_x, \quad B_{1j} = \sum_{k=1, k \neq N}^n \Delta p_i(x_k) \int \int_{\Delta S_k} U_{ij}^*(x, \xi_{NO}) dS_x,$$

$$C_{1j} = \sum_{k=1}^n \Delta u_i(x_k) \int \int_{\Delta S_k} P_{ij}^*(x, \xi_{NO}) dS_x,$$

$$A_{2ij} = \int \int_{\Delta S_N} P_{ij}^*(x, \xi_{NO}) dS_x, \quad B_{2j} = \sum_{k=1, k \neq N}^n \Delta u_i(x_k) \int \int_{\Delta S_k} P_{ij}^*(x, \xi_{NO}) dS_x,$$

$$C_{2j} = \sum_{k=1}^n \Delta p_i(x_k) \int \int_{\Delta S_k} U_{ij}^*(x, \xi_{NO}) dS_x.$$

В этих выражениях считается, что  $\Delta u(x_k) = 0$ , при  $x_k \in \partial\Omega_u$  в (6) и  $\Delta p(x_k) = 0$ , при  $x_k \in \partial\Omega_p$  в (7). Поскольку матрица системы имеет выраженную диагональную структуру, то для вычисления  $\Delta p$  и  $\Delta u$  можно организовать итерационный процесс:

$$\Delta p_i^L(x_N) A_{1ij} = \Delta_j(\xi_{NO}) - B_{1j}^{L-1} - C_{1j}^{L-1}, \quad (8)$$

$$\Delta u_i^L(x_N) A_{2ij} = \Delta_j(\xi_{NO}) - B_{2j}^{L-1} - C_{2j}^{L-1}. \quad (9)$$

Для приближения оценки ошибки используем только первые итерации.

При условии плоской деформации численно исследовались ошибки  $\Delta u$  для первой основной задачи теории упругости. В (5) подставлялись потенциалы [3]:

$$U_{lk}^*(x, \xi) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{lk} + \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right],$$

$$P_{lk}^*(x, \xi) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} \left( (1-2\nu)\delta_{lk} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_l} \right) + \right. \\ \left. + (1-2\nu) \left( \frac{\partial r}{\partial x_l} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_l \right) \right] \quad (l, k = 1, 2). \quad (10)$$

На сторонах квадрата задавались значения  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{p}$ , соответствующие некоторому точному решению задачи упругости для квадрата. Затем на одной из сторон последнего возмущался вектор  $\mathbf{u}$ . Ошибка моделировалась периодическими и ступенчатыми функциями на сетках с различной плотностью. Ступенчатые функции составляли от 2 до 15% от точного решения, а периодические — до 5%. На рис. 1–5 представлены результаты численного счета. Сплошная линия соответствовала заданному возмущению, а штриховая — вычисленному. Так, на рис. 1–3 возмущение моделировалось ступенчатыми функциями. Ошибка определялась как из решения интегрального уравнения (5) (рис. 1), так и из решения (9) (рис. 2 и 3) при  $L = 1$  (на первой итерации). Как видно из рис. 1 и 2, найденные ошибки по этим соотношениям различаются незначительно. На рис. 4 и 5 возмущение моделировалось периодическими функциями.

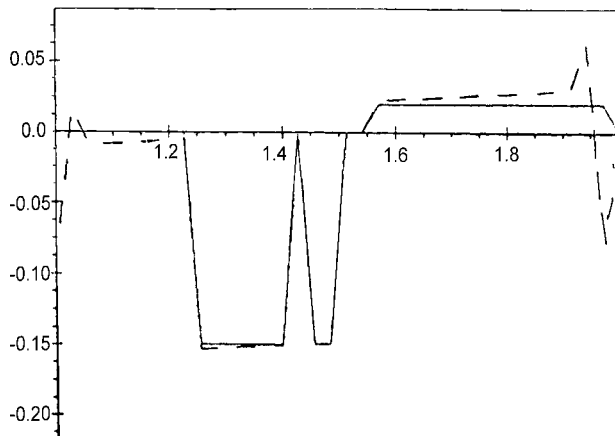


Рис. 1

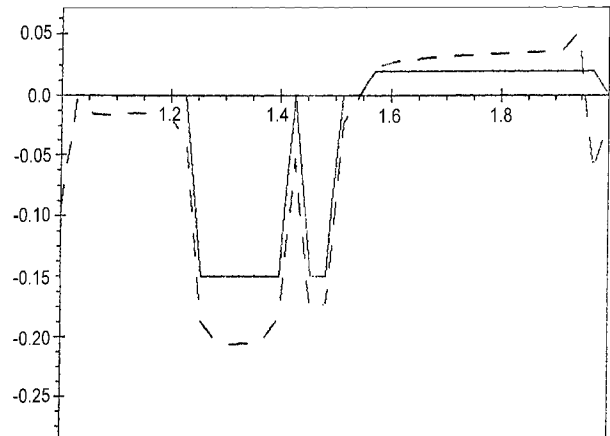


Рис. 2

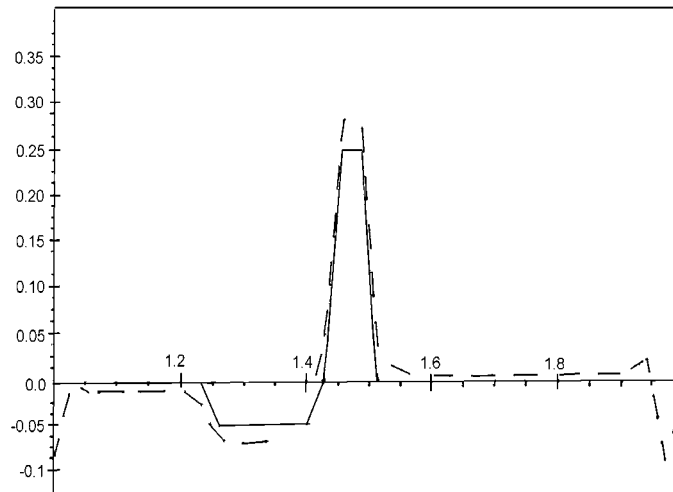


Рис. 3

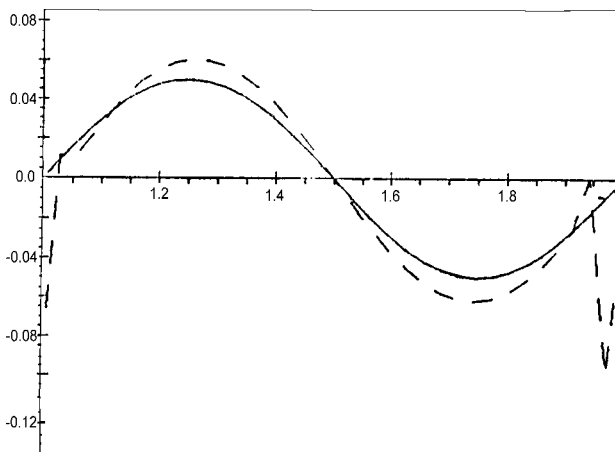


Рис. 4

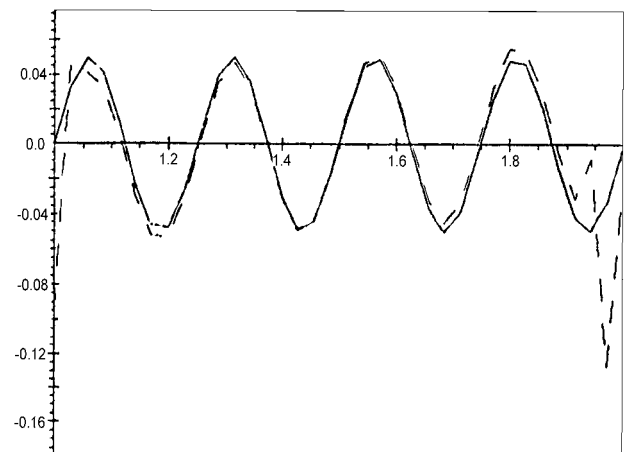


Рис. 5

рис. 4 и 5 соответствовали решению (9) при  $L = 1$ . Как видно из рисунков, соотношение (9) дает вполне удовлетворительные результаты. По результатам численного счета можно сделать вывод, что для оценки ошибки достаточно использовать только одну итерацию (9) и обойтись без обращения матрицы системы (7).

## Выводы

Численный эксперимент позволяет говорить о достоверном нахождении 3%-й ошибки, имеющей ступенчатый или циклический характер на базе 3...4 узлов на границе. Программа позволяет определять ошибку и на одном узле, только при этом точность оценки более низкая. Таким образом, условия согласования позволяют тестировать или оценивать точность численного счета по заданным векторам  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{p}$  на поверхности тела.

Рассмотренный метод основан на условии согласования  $H(\partial\Omega)$ . Представленное условие согласования не единственно и может иметь иной вид. При тестировании программ следует обращать внимание, чтобы уравнения, полученные из условия согласования, не были идентичны тестируемому.

## Список литературы

- [1] ШВАБ А.А. Существенно переопределенные задачи теории упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2001. Т. 4, № 1(7). С. 204–207.
- [2] НОВАЦКИЙ В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
- [3] БРЕЙББИЯ К., ТЕЛЛЕС Ж., БРОУБЕЛ Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1967. 524 с.

*Поступила в редакцию 10 августа 2006 г.,  
в переработанном виде — 12 марта 2007 г.*