

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРУПП СИММЕТРИЙ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Е. В. НИКУЛЬЧЕВ

*Московская государственная академия приборостроения и информатики,  
Москва, Россия*

e-mail: nikulchev@mail.ru

The paper is devoted to the modeling of dynamically complex systems by the methods of symmetry theory. The questions of identification in the local domain and the reconstruction of the phase-plane portrait of the dynamical systems are considered.

## Введение

В настоящее время широко проводятся исследования по моделированию сложных динамических систем [1]. Это объясняется тем, что динамическое поведение большого числа систем и технических устройств имеет динамически сложный характер: нерегулярные и хаотические явления, бифуркации и т. д. Однако эти процессы могут быть получены и с помощью более вычислительно-надежных моделей регулярной динамики. При этом на систему действуют заранее запрограммированные возмущения, приводящие управляемую систему к периодической орбите с желаемыми свойствами, т. е. близко к “хаотическому” поведению.

В статье обсуждаются вопросы идентификации сложных систем на основе группового анализа и построения линеаризованных уравнений в пространстве состояний.

Значение групп симметрий в теории управляемых систем признано множеством авторов [2, 3], но при этом групповой анализ не занимает значительного места в современной теории управления. Эффективность применения дифференциальной геометрии может быть проиллюстрирована при моделировании распределенных систем. В системах, в которых проходят химические реакции, процессы теплообмена, имеют место симметрии сдвига.

Присутствие симметрии обычно затрудняет анализ динамики, но в то же время делает систему идентифицируемой. Также наличие симметрии, явное или подразумеваемое, делает управление многопараметрическим, при этом увеличивается качество управления техническими объектами.

## 1. Объект исследования

В качестве объекта исследования рассмотрим динамические управляемые системы с дискретным временем, которые локально могут быть описаны отображением  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  —  $n$ -мерный вектор состояния системы;  $\mathbf{x}(t)$  —  $r$ -мерный вектор параметров системы;  $t$  — дискретное время. Цель управления состоит в выполнении заданной программы движения, т. е. система должна моделировать периодическую, возможно неустойчивую, траекторию  $\bar{\mathbf{x}}(t)$ . Линеаризуем уравнение (1) вдоль этой траектории:

$$\Delta\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t)\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\Delta\mathbf{u}(t), \quad (2)$$

где  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}})$  — матрица Якоби, которая определяет свойства устойчивости системы по Ляпунову;  $\mathbf{B}(t) = \mathbf{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}})$  — матрица, определяющая линейный отклик системы на возмущения.

Будем рассматривать в рамках проблемы идентификации системы задачу реконструкции фазового портрета сложной динамической системы. Априори предполагается, что сложная система допускает группы симметрий.

Определим симметрию систем как линейное преобразование  $g : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = g(\mathbf{x})$  в пространстве состояний, при котором нелинейное уравнение динамики (1) сохраняет свою структуру. Более формально уравнение (1), процесс которого обладает симметрией и описывается группой симметрий  $G$ , если отображение  $\mathbf{F}$  коммутирует по всем групповым операциям:

$$\mathbf{F}(g(\mathbf{x}), \mathbf{u}) = g(\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})) \quad \forall g \in G; \forall \mathbf{x} \in Q \quad (3)$$

или, другими словами, группа  $G$  делает функцию инвариантной по первому аргументу. Группа  $G$  обычно является продуктом симметрии физического интервала, например, симметрия вращения или симметрия сдвига пространства фазы —  $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$  и т. п. Как правило, все группы симметрий, допускаемые уравнениями, описывающими реальные технические системы, однопараметрические, мы также будем считать, что группа  $G$  — однопараметрическая.

Для управления важно, что при линеаризации около траектории  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  структурная симметрия уравнения (1) не исчезает, но заменяется связанной симметрией. На самом деле, используя определение (3) и то, что преобразования симметрии линейные, получаем в линейной аппроксимации для произвольных  $g$ :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} + g(\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}) &= g(\bar{\mathbf{x}}) + g(\mathbf{A}\Delta\bar{\mathbf{x}}) = g(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}) = g(\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}) = \\ &= g(\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}})) = \mathbf{F}(g(\bar{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}), \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{F}(g(\bar{\mathbf{x}} + g(\Delta\mathbf{x})), \bar{\mathbf{u}}) = \\ &= \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}} + g(\Delta\mathbf{x}), \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{A}g(\Delta\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{A}g(\Delta\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Определим  $L$  как полную группу симметрий линеаризованного уравнения (2) автономной системы ( $\mathbf{u}(t) = 0$ ):

$$g(\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}) = \mathbf{A}g(\Delta\mathbf{x}), \quad \forall g \in L.$$

Таким образом, группа  $L$  описывает динамическую симметрию системы около программной траектории  $\bar{\mathbf{x}}$  и включает все преобразования  $g$ . Следовательно,  $G \subseteq L$ . Как правило,  $L$  совпадает с  $G$ . На практике невозможно определить независимо группу  $G$ , которая исчерпывает динамические симметрии системы или группа  $L$  содержит “скрытые”

симметрии. Однако можно показать, что множество ограничений при определении управляющих параметров может быть получено на основании произвольной подгруппы  $L' \in L$ . Группа  $L'$  в соответствии с инвариантами может быть разложена:

$$L' = p_1 T^1 \oplus p_2 T^2 \oplus \dots \oplus p_q T^q \quad (4)$$

с

$$n = p_1 d_1 + p_2 d_2 + \dots + p_q d_q,$$

где  $p_r$  — число эквивалентных представлений  $T^r$  в декомпозиции (4),  $q$  — общее число инфинитезимальных образующих в базисе.

## 2. Реконструкция фазового пространства системы

Рассмотрим в контексте группового анализа проблему реконструкции фазового портрета. Основой для реконструкции фазового портрета служат экспериментальные данные, полученные в процессе функционирования систем. Необходимо построить динамические уравнения с точностью, требуемой управляющими алгоритмами и исполнительными механизмами. В условиях недоступности полной информации о состоянии системы требуется оценить структурную и смоделировать динамическую сложность по единственному измеряемому скалярному выходу. Этот выход  $y(t)$  является функцией неизвестного вектора внутренних состояний  $\mathbf{s}(t)$  системы:

$$y(t) = H(\mathbf{s}(t)). \quad (5)$$

Метод, позволяющий восстанавливать пространство состояний системы и ее динамику, был предложен Н. Паккардом и др., он состоит в последовательном измерении времени выхода  $y(t)$  [4]. Алгоритм основывается на реконструкции состояний системы со скалярного выходного сигнала с использованием временных задержек  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ :

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} y(t + \tau_1) \\ y(t + \tau_2) \\ \dots \\ y(t + \tau_n) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Ф. Такенс показывал [5], что для скалярного выходного процесса (5), выбранных времени задержки  $\tau_i$  и размерности  $n$  реконструированного аттрактора ( $n \geq n^h + 1$ , где  $n^h$  — хаусдорфова размерность) идентифицируется отображение  $\mathbf{P}: \mathbf{s}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t)$ , которое обеспечивает глобальное взаимно-однозначное представление аттрактора.

В результате применения метода Паккарда — Такенса восстанавливается отображение (1) определением состояния  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$ , где  $t_0, t_1, t_2, \dots$  — время последовательных пересечений соответствующим образом выбранного сечения Пуанкаре в пространстве  $\mathbb{R}^n$  восстановленных состояний  $\mathbf{x}(t)$ . Теорема Такенса вводится для достаточно общего случая систем без учета симметрии, однако она не удовлетворяется для большинства технических систем из-за следствия наличия симметрии — вырождения операторов эволюции. Другими словами, для таких систем теорема неприменима, т. е. пространство состояний системы не может быть восстановлено на основании единственного выходного процесса независимо от того, как велика размерность реконструкции. Более того, фазовое пространство не может быть восстановлено ни локально, около периодических траекторий аттрактора, ни вдоль

определенных кривых в пространстве фазы, ни глобально. Используя язык теории автоматического управления, такие системы можно считать локально и глобально ненаблюдаемыми. Вопрос о непригодности метода реконструкции фазового пространства систем, допускающих симметрии, был впервые поднят в работе [6], где определено, что причина неудачи применения теоремы Такенса — нарушение одного из предположений, что наблюдаемый процесс, определяемый уравнением (5), не имеет вырожденных собственных значений для периодических траекторий. Однако симметричные системы обычно (но не всегда) имеют вырожденные собственные значения из-за того, что в базисе инвариантов нетривиальные инфинитезимальные образующие являются многомерными. Ж. Кинг и И. Стюарт [6] доказали обобщение теоремы о вложениях, в которой требуется, чтобы наблюдаемый выход был векторной, а не скалярной функцией состояния системы  $\mathbf{s}(t)$ :

$$\mathbf{y}(t) = G(\mathbf{s}(t)) \quad (7)$$

при отображении пространства состояний  $Q$  идентифицируемой системы в  $m$ -мерное евклидово пространство. (К сожалению, этот результат в основном проигнорирован в работах по нелинейной динамике.) Состояние системы затем может быть аналогично представлено координатным вектором задержки

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t + T_1) \\ \dots \\ \mathbf{y}(t + T_{n_e}) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где теперь размерность вложенного пространства  $n = mn_e$ . Так как вид уравнений эволюции неизвестен, получить ответ на вопрос о возможности построения функции  $G$  можно на основании свойств симметрии системы, которые часто легко установить на базе основных преобразований — групп сдвига.

В связи с тем, что для техники представляет интерес реконструкция пространства состояний в рамках линейного управления, определим, что система локально наблюдаема. Согласно анализу, проведенному в [6], для определения локального вложения около периодической траектории  $\mathbf{s}(t)$  требуется, чтобы в  $\mathbb{R}^m$  содержалась по крайней мере одна копия каждого инвариантного подпространства  $M_{L'}^{T^r}$ , которое получено однопараметрическим разложением  $T^r$  соответствующей группы симметрии  $L' = G$ . Это условие должно выполняться, чтобы допускать, что минимальное измерение  $m$ -мерного выходного процесса включало  $T^r$ , образованное инфинитезимальной образующей самой большой размерности в базисе инвариантов.

Это предположение может быть тривиально определено на основании симметрий. Рассмотрим неизменяемое во времени состояние  $\bar{\mathbf{s}}$ . Линеаризуем выход (7) в окрестности этого состояния и, обозначая смещение  $\Delta\mathbf{y}(t) = G(\mathbf{s}(t)) - G(\bar{\mathbf{s}})$ , получим

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\mathbf{s}(t)), \quad (9)$$

где матрица  $\mathbf{C}$  определена таким образом, что

$$\mathbf{C} = D_{\mathbf{s}}\mathbf{G}(\bar{\mathbf{s}}).$$

Напомним, что динамическая система, определяемая уравнениями (2) и (9), или пара  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  называется наблюдаемой, если в течение любого времени начальное состояние  $\Delta\mathbf{s}(t_i) = \Delta\mathbf{s}_i$  может быть определено из измерения управляющих возмущений  $\Delta\mathbf{u}(t)$  и выхода  $\Delta\mathbf{y}(t)$ . В противном случае система или пара  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  называется ненаблюдаемой.

Известно, что понятие наблюдаемости дуальное понятию управляемости: условие наблюдаемости для пары  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  — эквивалент условия управляемости для пары  $(\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*)$ . Наличие группы симметрий непосредственно подразумевает, что

$$T(g)^* \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* T(g)^* \quad \forall g \in L',$$

свойства симметрии матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}^*$  по существу идентичны (одинаковы структуры спектров собственных значений, жордановых нормальных форм, и т. п.). В результате известное ранговое условие управляемости [7], накладываемое на матрицу  $\mathbf{B}$ , должно также удовлетворяться и для матрицы  $\mathbf{C}^*$ . Ясно, что наблюдаемость линеаризованной системы является эквивалентом наблюдаемости собственных векторов матрицы Якоби исходной системы. Собственный вектор  $\mathbf{e}$  матрицы  $\mathbf{A}$  наблюдаемый, если там существует  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , такое, что  $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}_i) \neq 0$ , где  $\mathbf{c}_i$  — строка матрицы  $\mathbf{C}$ .

В случае, если нет случайных вырождений и группа  $T$  содержит самое большее одну копию каждого элемента декомпозиции (4) представления группы  $L'$ , то для того, чтобы восстанавливать динамику около неизменяемого во времени состояния  $\bar{\mathbf{s}}$ , необходимо, чтобы  $m$  измеренных скалярных выходных сигналов  $y_i(t)$  равнялось числу параметров  $r$ . Это значит, что при существовании симметрии сдвига динамика системы (1) может быть смоделирована системой (2), при этом размерность вектора параметров равна  $r$ , а сами параметры могут быть порождены групповой операцией сдвига по времени и, следовательно, представляют собой линейные функции времени.

### 3. Алгоритм идентификации и примеры

Метод моделирования сложных систем может быть сведен к известным вычислительно-надежным методам параметрической идентификации, например разработанным и реализованным Л. Льюнгом [8].

Алгоритм решения задачи следующий:

- применение метода Такенса — Паккарда [1] для первых точек исходных процессов с произвольной размерностью, в результате получается матрица  $\mathbf{A}^*$ ;
- вычисление минимальной размерности вложений как базиса инвариантов групп симметрий;
- параметрическая идентификация с найденной размерностью и  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ , где  $u = (\alpha t + \beta)$  (можно взять  $u = t$ ), получение уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t); \end{aligned}$$

- оценка адекватности.

Алгоритм был проверен на большом количестве различных хаотических процессов. В данной работе приведем два примера. Первый пример — модельный, выходные процессы получены в результате моделирования в среде Simulink, второй — с датчиков реального технологического процесса.

**Пример 1.** Имеется два дискретных процесса, измеренные на выходе нелинейной системы (рис. 1). В результате вычислений получено: размерность пространства состояний 4, задержка — 14. Для проверки существования аттрактора реконструируем фазовый портрет системы (рис. 2). Видно, что система хаотическая. Результат идентификации показан

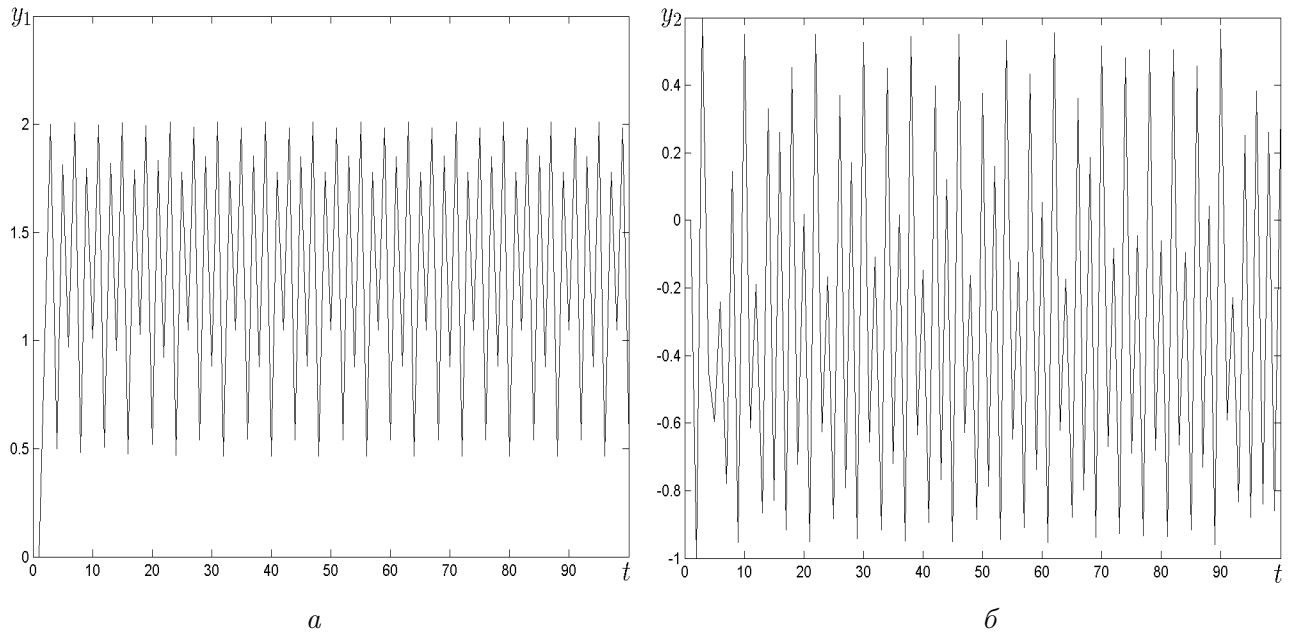


Рис. 1. Выходные процессы:  $a - y_1(t)$ ,  $б - y_2(t)$ .

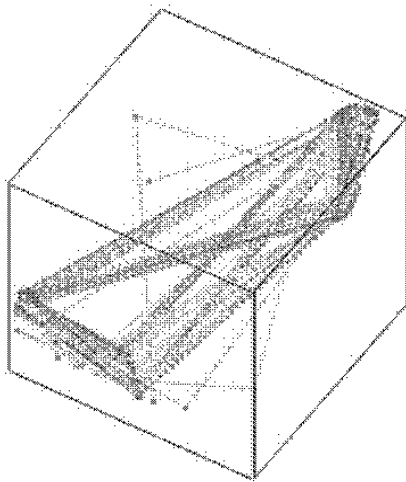


Рис. 2. Реконструированный аттрактор системы.

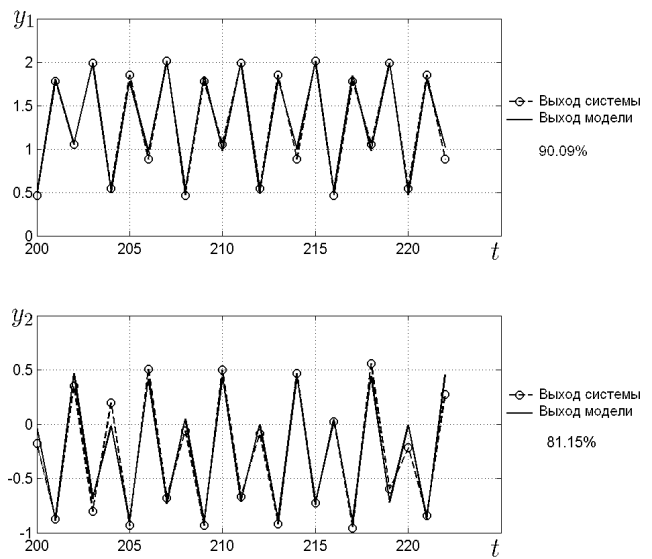


Рис. 3. Оценка адекватности моделирования.

на рис. 3. Матрицы идентифицируемой системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.9755 & -0.18879 & -0.1167 & 0.0013756 \\ -0.11943 & 0.0011553 & 0.96261 & -0.001488 \\ 0.18096 & -0.95403 & -0.005751 & -0.2764 \\ 0.017716 & -0.11469 & 0.24917 & 0.20189 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.088151 \\ 0.24325 \\ -0.21885 \\ -1.7214 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 14.471 & -1.7559 & 0.87886 & -0.17531 \\ -11.888 & -5.2264 & 1.8535 & -0.74647 \end{pmatrix}.$$

Высокая оценка адекватности (80-90 %) объясняется тем, что пример был взят модельный и в нем отсутствуют шумы и ошибка измерений.

**Пример 2.** Рассматривается процесс охлаждения алюминиевого сплава. Слитки диаметром 190 мм из сплава АД31 (6063) охлаждаются, измеряемыми параметрами системы являются расход масла (рис. 4, *а*), давление охлаждающей воды (рис. 4, *б*). Моделируется автономный процесс при постоянном значении входного сигнала (постоянной скорости охлаждения сплава) и определенных технологических условиях. До процесса моделирования настройка этих параметров происходила вручную. Построенная модель используется для построения дополнительного регулятора в системе.

В результате применения разработанного алгоритма получены размерность пространства состояний  $n = 6$ , задержка — 12. Для проверки существования аттрактора реконструируем фазовый портрет системы (рис. 5). Полученный результат идентификации (рис. 6) позволил построить автоматический регулятор, управляющий расходом охлаждающей жидкости.

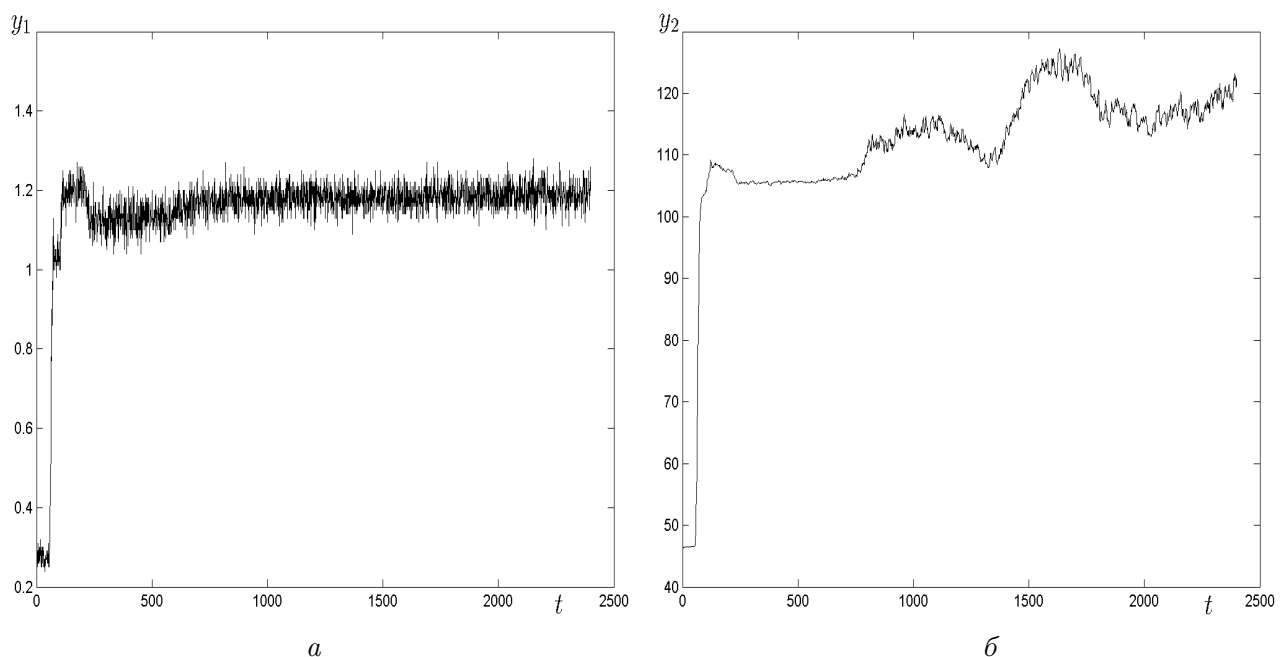


Рис. 4. Выходные процессы технической системы: *а* — расход масла, л/мин; *б* — давление охлаждающей воды, кг·с/см<sup>2</sup>.

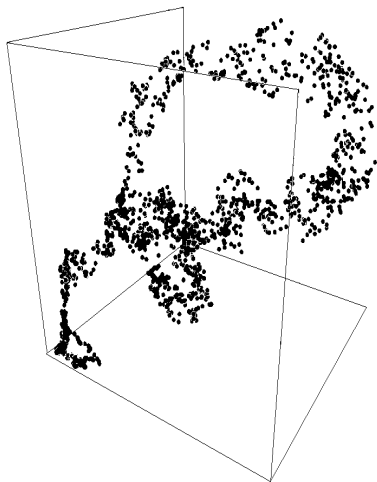


Рис. 5. Реконструированный аттрактор системы.

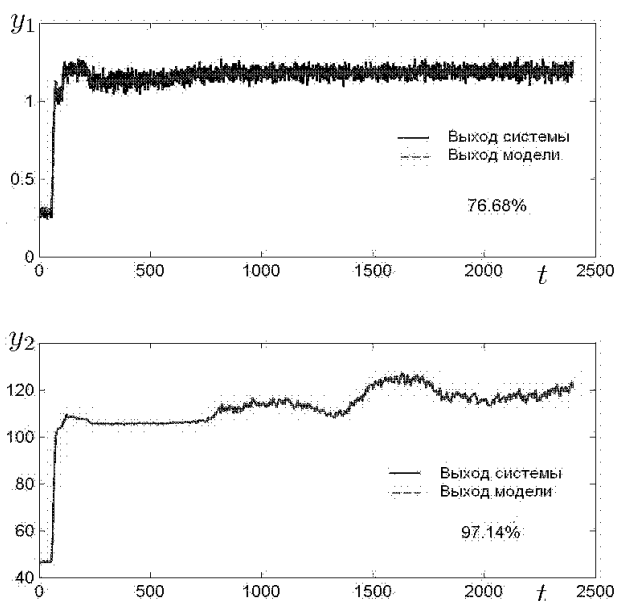


Рис. 6. Сравнение результатов моделирования с реальными данными.

## Заключение

Разработан метод математического моделирования дискретных моделей сложных технических систем, допускающих однопараметрические группы преобразований. В результате применения метода к экспериментальным данным могут быть получены регулярные модели, имеющие адекватное исходному хаотическому процессу поведение.

## Список литературы

- [1] МАЛИНЕЦКИЙ Г. Г., ПОТАПОВ А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 336 с.
- [2] БАБИЧЕВ А. В., БУТКОВСКИЙ А. Г., ПОХЬОЛАЙНЕН С. К единой геометрической теории управления. М.: Наука, 2001. 352 с.
- [3] ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ и алгебраические методы в теории управления / Н. Ю. Данилов, Ю. Н. Павловский, В. И. Соколов, Г. Н. Яковенко. М.: Изд-во МФТИ, 1999. 156 с.
- [4] PACKARD N. H., CRUTCHFIELD J. P., FARMER J. D., SHAW R. S. Geometry from a time series // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 712–716.
- [5] TAKENS F. Detecting strange attractors in turbulence // Dynamical Systems and Turbulence / Eds D. A. Rand, L.-S. Young. Berlin: Springer, 1981. P. 366–381.
- [6] KING G. P., STEWARD I. Phase space reconstruction for symmetric dynamical systems // Physica D: Nonl. Phenomena. 1992. Vol. 58. P. 216–228.



- [7] МЕТОДЫ классической и современной теории управления. Т. 3. Методы современной теории автоматического управления / Под общ. ред. Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. 748 с.
- [8] LJUNG L. System Identification — Theory for the User. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J. 2nd Edition, 1999.

*Поступила в редакцию 1 декабря 2003 г.*