Вычислительные технологии **Том 9, № 2, 2004**

ОБ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М. А. Ляшко
Балашовский филиал
Саратовского государственного университета, Россия
e-mail: mail@bf.sgu.ru

Sufficient conditions for the coincidence of the interval hull $\mathbf{X}^H$ for the combined set Σ of solutions of the interval system $x = \mathbf{A}x + \mathbf{b}$ with $\rho(|\mathbf{A}|) < 1$ and the fixed point $\mathbf{x}^*$ of the mapping $\mathbf{Ax} + \mathbf{b} : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^n$ are proved. When $\underline{\mathbf{x}}_i^H < \overline{\mathbf{x}}_i^H$, $\underline{\mathbf{a}}_{ij} \neq 0$ and $\overline{\mathbf{a}}_{ij} \neq 0$ $(i, j = \overline{1, n})$ these conditions also become the necessary ones.

1. Постановка задачи

Для интервальной системы линейных алгебраических уравнений

$$x = \mathbf{A}x + \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n, \tag{1}$$

одной из важных задач является задача нахождения объединенного множества решений (ОМР)

$$\Sigma = \{x | (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(x = Ax + b)\}.$$

При условии невырожденности всех вещественных матриц, входящих в интервальную матрицу $I - \mathbf{A}$, множество Σ ограничено и актуальной является задача нахождения интервального вектора минимальной ширины, содержащего множество Σ, т. е. так называемой интервальной оболочки $\mathbf{X}^H = \left(\mathbf{x}_1^H, \mathbf{x}_2^H, \ldots, \mathbf{x}_n^H\right)^\top$ множества Σ, где

$$\mathbf{x}_i^H = \left[\underline{\mathbf{x}}_i^H, \overline{\mathbf{x}}_i^H\right], \ \underline{\mathbf{x}}_i^H = \min\{x_i | x \in \Sigma\}, \ \overline{\mathbf{x}}_i^H = \max\{x_i | x \in \Sigma\}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

В дальнейшем будем предполагать, что Σ ограничено, т. е. $\mathbf{X}^H$ существует. Точные значения $\min\{x_i | x \in \Sigma\}$ и $\max\{x_i | x \in \Sigma\}$ достигаются при решении систем $x = Ax + b$, когда значения коэффициентов равны концевым значениям соответствующих интервальных коэффициентов матрицы $\mathbf{A}$ и вектора $\mathbf{b}$. Таким образом, решение $2^{n(n+1)}$ точечных систем гарантирует точное получение $\mathbf{X}^H$.

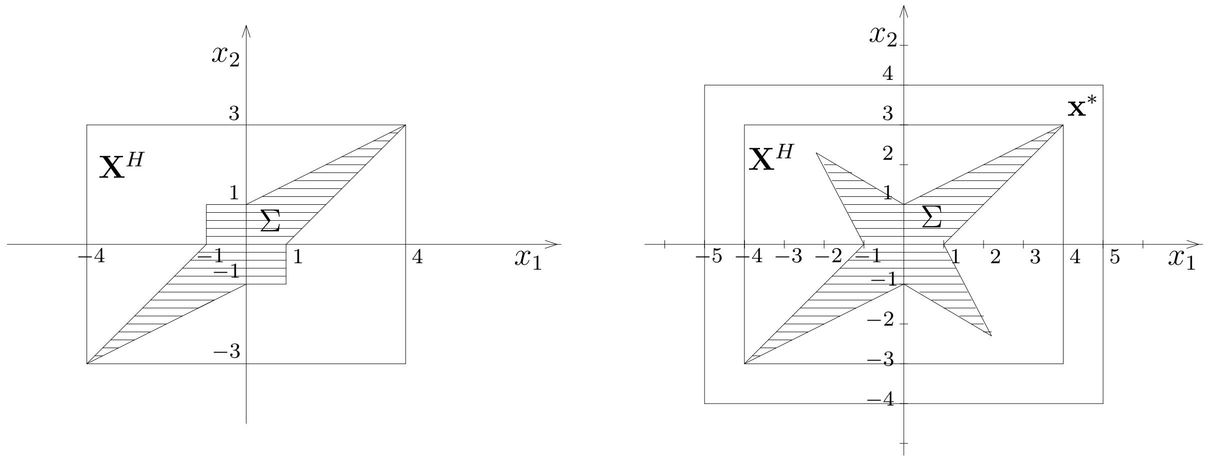

Рис. 1.

Если в системе (1) $\rho(|\mathbf{A}|) < 1$ (т. е. отображение $\mathbf{Ax} + \mathbf{b} : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^n$ является сжимающим), то единственный неподвижный интервальный вектор (неподвижная точка) $\mathbf{x}^*$ этого отображения в силу определения обращающий уравнение (1) в верное равенство

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{b} \tag{3}$$

может быть найден с заданной точностью каким-либо итерационным методом. При этом выполняется включение

$$\mathbf{X}^H \subseteq \mathbf{x}^*. \tag{4}$$

В некоторых случаях $\mathbf{x}^*$ совпадает с $\mathbf{X}^H$. Например, система

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [0.6, 0.8] & [\ \ 0, 0.2] \\ [\ \ 0, 0.1] & [0.6, 0.8] \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{pmatrix} [-0.2, 0.2] \\ [-0.2, 0.2] \end{pmatrix}$$

имеет ОМР Σ, изображенное на рис. 1 слева [3]. Здесь $\rho(|\mathbf{A}|) = 0.94\ldots < 1$, вектор $\mathbf{x}^* = ([-4, 4], [-3, 3])^\top$ и $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}^H$.

Измененная система

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [\ \ 0.6\ \ , 0.8] & [-0.1, 0.2] \\ [-0.12, 0.1] & [\ \ 0.6, 0.8] \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{pmatrix} [-0.2, 0.2] \\ [-0.2, 0.2] \end{pmatrix}$$

имеет множество Σ, изображенное на рис. 1 справа. При этом $\rho(|\mathbf{A}|) = 0.95\ldots < 1$ и $\mathbf{x}^* = ([-5, 5], [-4, 4])^\top$, в то время как интервальная оболочка остается прежней: $\mathbf{X}^H = ([-4, 4], [-3, 3])^\top$.

Вопрос о совпадении или несовпадении $\mathbf{X}^H$ и $\mathbf{x}^*$ во включении (4) в общем случае до сих пор остается открытым [6]. Основная задача, рассмотренная в этой статье, состоит в следующем: найти условия, при которых неподвижная точка $\mathbf{x}^*$ отображения $\mathbf{Ax} + \mathbf{b} : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^n$ совпадает с интервальной оболочкой $\mathbf{X}^H$ объединенного множества решений системы $x = \mathbf{A}x + \mathbf{b}$. При выполнении этих условий $\mathbf{X}^H$ может быть найдена с помощью итерационных методов, достаточно простых в реализации.

2. Основной результат

Приведем доказанные ранее автором [2] как достаточные, так и необходимые условия совпадения $\mathbf{X}^H$ и вектора $\mathbf{x}^*$ для некоторого класса систем (1). Интервал $\mathbf{a} = [\underline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}]$ будем считать неотрицательным, если $\underline{\mathbf{a}} \geq 0$, и неположительным, если $\overline{\mathbf{a}} \leq 0$. Неотрицательным интервалам поставим в соответствие знак "+", а неположительным – знак "−". Интервалу, для которого $\underline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}} = 0$, можно поставить в соответствие любой знак. Оказывается, некоторой закономерности в распределении знаков интервальных коэффициентов матрицы $\mathbf{A}$ достаточно, а при более жестких условиях и необходимо для совпадения $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{X}^H$, а именно справедлива

Теорема 1 ([2]). *Пусть матрица $\mathbf{A}$ в системе (1) состоит только из неположительных и неотрицательных коэффициентов. Для того чтобы интервальная оболочка $\mathbf{X}^H$ множества Σ совпадала с неподвижной точкой $\mathbf{x}^*$, отображения $\mathbf{Ax} + \mathbf{b}$ достаточно, а если при $i, j = \overline{1, n}$ выполняются требования $\underline{\mathbf{x}}_i^H < \overline{\mathbf{x}}_i^H$ и $\mathbf{a}_{ij} \neq [0, 0]$, $i \neq j$, то необходимо, чтобы в матрице $\mathbf{A}$:*

1) главная диагональ была неотрицательная;

2) существовало целое число $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что если знаки коэффициентов $\mathbf{a}_{ip}$ и $\mathbf{a}_{iq}$, $\quad p, q = \overline{1, n}, p \neq q$, совпадают, то коэффициенты $\mathbf{a}_{pq}$ и $\mathbf{a}_{qp}$ неотрицательны, а если знаки $\mathbf{a}_{ip}$ и $\mathbf{a}_{iq}$ не совпадают, то коэффициенты $\mathbf{a}_{pq}$ и $\mathbf{a}_{qp}$ неположительны.

Например, указанные ниже распределения знаков интервальных коэффициентов в матрице $\mathbf{A}$ размера 5×5 достаточны для совпадения $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{X}^H$:

$$\begin{matrix} + & + & + & - & - \\ + & + & + & - & - \\ + & + & + & - & - \\ - & - & - & + & + \\ - & - & - & + & + \end{matrix}\ , \quad \begin{matrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{matrix}\ , \quad \begin{matrix} + & - & + & + & + \\ - & + & - & - & - \\ + & - & + & + & + \\ + & - & + & + & + \\ + & - & + & + & + \end{matrix}\ .$$

Не умаляя общности, проверку условий теоремы можно осуществлять с помощью первой строки ($i = 1$). Процесс легко алгоритмизируется и требует $n(n+1)/2$ повторений цикла проверки соответствия знаков коэффициентов (для $i = 1, \ldots, n-1$ и $j = i, \ldots, n$).

В данной статье результат, сформулированный выше, распространяется на системы, интервальные коэффициенты которых могут содержать нуль внутри. Произведение интервалов в классической интервальной арифметике определяется так, что можно менять один из операндов, не меняя результат. Например, $[-1, 2] \cdot [-4, 5] = [-8, 10] = [0, 2] \cdot [-4, 5] = [1, 2] \cdot [-4, 5]$ и т.д. То есть интервал $[-1, 2]$, содержащий 0, дает в этом примере такой же результат, как и положительный интервал $[1, 2]$. Произвольная матрица $\mathbf{A}$ из системы (1) при умножении на вектор из окрестности неподвижной точки $\mathbf{x}^*$ может давать результат, как если бы она состояла из интервальных коэффициентов фиксированного знака. Это и позволяет сформулировать для таких систем результат, аналогичный изложенному выше.

Рассмотрим $\mathbf{a} = [-0.8, 0.5]$, $\mathbf{x} = [-0.1, 0.2]$. Тогда $\mathbf{ax} = [-0.16, 0.1]$, причем $\underline{\mathbf{ax}} = \underline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}} = -0.8 \cdot 0.2 = -0.16$ и $\overline{\mathbf{ax}} = \overline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}} = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1$. Представим полученное произведение в виде

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{ax}} \\ \overline{\mathbf{ax}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{x}} \\ \overline{\mathbf{x}} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где элементы 2×2-матрицы $a_{ij} \in \{0, \underline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}\}$, $i, j = 1, 2$. Получим

$$\begin{pmatrix} -0.16 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.8 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Очевидно, что произведение $\mathbf{a}\cdot\mathbf{y}$ того же самого интервала $\mathbf{a}$ и достаточно близкого к $\mathbf{x}$ интервала $\mathbf{y}$ также может быть представлено в виде (5), где матрица 2×2 совпадает с матрицей из равенства (6):

$$\begin{pmatrix}\underline{\mathbf{ay}}\\ \overline{\mathbf{ay}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -0.8\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\underline{\mathbf{y}}\\ \overline{\mathbf{y}}\end{pmatrix}.$$

В другом случае, например при $\mathbf{a}=[-0.8,0.5]$, $\mathbf{x}=[-0.1,0.16]$, получим произведение $\mathbf{ax}=[-0.128,0.08]$. Здесь $\overline{\mathbf{ax}}=\underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}=\overline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}=0.08$. Поэтому, представляя результат перемножения $\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}$ в виде (5), получим

$$\begin{pmatrix}-0.128\\ 0.08\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -0.8\\ -0.8 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.1\\ 0.16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -0.8\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.1\\ 0.16\end{pmatrix}.$$

Ясно, что для интервалов, достаточно близких к $\mathbf{x}$, не удастся добиться представления в виде (5) с одной и той же матрицей 2×2: для одних такой матрицей будет $\begin{pmatrix}0 & -0.8\\ -0.8 & 0\end{pmatrix}$, а для других — матрица $\begin{pmatrix}0 & -0.8\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}$.

Обозначим через $W(\mathbf{a})$ множество интервалов $\mathbf{x}\in\mathbb{IR}$ таких, что произведения $\mathbf{ax}$ и $\mathbf{ay}$ интервала $\mathbf{a}$ и интервала $\mathbf{x}$ и достаточно близкого к $\mathbf{x}$ интервала $\mathbf{y}$ представляются в виде (5) с одинаковой матрицей 2×2.

Анализируя возникающие ситуации, можно дать следующее описание множества $W(\mathbf{a})$. Пусть $\mathbf{a}=[\underline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{a}}]$, тогда при вырождении $\mathbf{a}$ в точку $W(\mathbf{a})=\mathbb{IR}$. Если же $\mathbf{a}$ — знакопостоянный интервал, не вырождающийся в точку, т. е. $0\le\underline{\mathbf{a}}<\overline{\mathbf{a}}$ или $\underline{\mathbf{a}}<\overline{\mathbf{a}}\le 0$, то $W(\mathbf{a})$ состоит из интервалов $\mathbf{x}$, ни один из концов которых не равен нулю. Если же $\mathbf{a}$ содержит нуль внутри, т. е. $\underline{\mathbf{a}}<0<\overline{\mathbf{a}}$, то $W(\mathbf{a})$ состоит из таких интервалов, для которых $\underline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{x}}\ne\overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{x}}$ и $\underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{x}}\ne\overline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{x}}$.

Обозначим через $W(\mathbf{A})$ множество векторов $\mathbf{x}\in\mathbb{IR}^n$ таких, что произведения $\mathbf{a}_{ij}\cdot\mathbf{x}_j$ и $\mathbf{a}_{ij}\cdot\mathbf{y}_j$ элементов матрицы $\mathbf{A}=(\mathbf{a}_{ij})_{i,j=1}^n$ из системы (1) и компонент вектора $\mathbf{x}=(\mathbf{x}_j)_{j=1}^n$ и достаточно близкого к $\mathbf{x}$ вектора $\mathbf{y}=(\mathbf{y}_j)_{j=1}^n$ представляются в виде (5) с одинаковыми матрицами 2×2 при $i,j=\overline{1,n}$. Далее, пусть в равенстве (3) $\mathbf{x}^*\in W(\mathbf{A})$. Поскольку при этом произведения $\mathbf{a}_{ij}\mathbf{x}_j^*$ можно представить в виде (5), интервальную n-матрицу $\mathbf{A}$ и интервальные n-векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{x}^*$ можно заменить точечными $2n\times 2n$-матрицей $A(\mathbf{x}^*)$ и $2n$-векторами b и x^*, которые будут выглядеть так:

$$x^*=(\underline{\mathbf{x}}_1^*,\overline{\mathbf{x}}_1^*,\underline{\mathbf{x}}_2^*,\overline{\mathbf{x}}_2^*,\dots,\underline{\mathbf{x}}_n^*,\overline{\mathbf{x}}_n^*)^\top, b=(\underline{\mathbf{b}}_1,\overline{\mathbf{b}}_1,\underline{\mathbf{b}}_2,\overline{\mathbf{b}}_2,\dots,\underline{\mathbf{b}}_n,\overline{\mathbf{b}}_n)^\top.$$

Такая замена соответствует отображению

$$\sigma\colon\mathbb{IR}^n\to\mathbb{R}^{2n},\quad \sigma(\mathbf{x}):=x=(\underline{\mathbf{x}}_1,\overline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2,\overline{\mathbf{x}}_2,\dots,\underline{\mathbf{x}}_n,\overline{\mathbf{x}}_n)^\top. \tag{7}$$

При этом для определения коэффицентов $a_{ij}, i,j=\overline{1,2n}$, вещественной $2n\times 2n$-матрицы $A(\mathbf{x}^*)$ используем равенство

$$\sigma(\mathbf{A}\mathbf{x}^*)=A(\mathbf{x}^*)\cdot\sigma(\mathbf{x}^*), \tag{8}$$

которое является обобщением равенства (5). Поэтому $A(\mathbf{x}^*)$ удовлетворяет равенству

$$x^*=A(\mathbf{x}^*)\cdot x^*+b, \tag{9}$$

которое по существу является другой записью равенства (3). Эта матрица состоит из n^2 блоков 2×2. При этом ij-й 2×2-блок соответствует распределению концов интервала $\mathbf{a}_{ij}$ при умножении на $\mathbf{x}_j^*$ для формирования концов $\mathbf{x}_i^*$. Например, для системы

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [\ \ 0.6\ \ , 0.8] & [-0.1, 0.2] \\ [-0.12, 0.1] & [\ \ 0.6, 0.8] \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{pmatrix} [-0.2, 0.2] \\ [-0.2, 0.2] \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{x}^* = ([-5, 5], [-4, 4])^\top$, равенство (9) выглядит так:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0 & -0.12 & 0.6 & 0 \\ -0.12 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.2 \\ -0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

Как показывает анализ всевозможных вариантов, возникающие в формуле (5) 2×2-матрицы, а значит, и 2×2-блоки в формуле (8) можно разделить на четыре типа:

$$a) \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 0 & n_1 \\ n_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ n_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} 0 & n_1 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix},$$

где $p_1, p_2 \geq 0$, $\quad n_1, n_2 \leq 0$, причем в блоках a и b элементы могут обращаться в нуль, а блоки c и d обязательно содержат два ненулевых элемента, иначе их можно отнести к блокам типа a или b.

Теорема 2. *Для того чтобы интервальная оболочка $\mathbf{X}^H$ множества Σ совпадала с неподвижной точкой $\mathbf{x}^*$ отображения $\mathbf{Ax} + \mathbf{b}$ достаточно, а если при $i, j = \overline{1, n}$ выполняются требования $\underline{\mathbf{x}}_i^H < \overline{\mathbf{x}}_i^H$, $\underline{\mathbf{a}}_{ij} \neq 0$ и $\overline{\mathbf{a}}_{ij} \neq 0$, то и необходимо, чтобы в блочной матрице $A(\mathbf{x}^*)$:*

1) главная диагональ состояла из 2×2-блоков типа a;

2) вне главной диагонали не было 2×2-блоков, кроме блоков типа a и b;

3) существовало целое число $i \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что если типы 2×2-блоков a_{ip} и a_{iq}, p, $q = \overline{1, n}$, $p \neq q$, совпадают, то 2×2-блоки a_{pq} и a_{qp} являются блоками типа a, а если типы a_{ip} и a_{iq} не совпадают, то блоки a_{pq} и a_{qp} являются блоками типа b.

При проверке достаточных условий нулевому 2×2-блоку можно приписать любой тип. Таким образом, условия теоремы 2 указывают на то, что для совпадения $\mathbf{X}^H$ и $\mathbf{x}^*$ интервальная матрица $\mathbf{A}$ с произвольными по знаку коэффициентами должна вести себя точно так же, как матрица со знакопостоянными коэффициентами, удовлетворяющими условиям теоремы 1.

В основе доказательства необходимости свойств 2 и 3 лежит результат Хансена [4], приводимый ниже. Он касается совпадения или несовпадения концов интервального расширения рациональной функции нескольких переменных и границ множества значений этой функции.

Пусть $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — рациональная функция n переменных. Обозначим $x = (x_1, \ldots, x_n)$, а входящие в $f(x)$ постоянные коэффициенты — $a = (a_1, \ldots, a_m)$. *Множеством значений* $f(x)$ называется интервал

$$\mathrm{Range}_{x \in \mathbf{x}, a \in \mathbf{a}} f(x) = \left[\min_{x \in \mathbf{x}, a \in \mathbf{a}} f(x), \max_{x \in \mathbf{x}, a \in \mathbf{a}} f(x) \right],$$

а *естественным интервальным расширением* $f(x)$ — интервал $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [\underline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{F}}]$, получающийся в результате замены x, a соответственно на $\mathbf{x}, \mathbf{a}$ и всех вещественных арифметических операций на интервальные. Значение $\underline{\mathbf{F}}$ ($\overline{\mathbf{F}}$) называется *оптимальным*, если $\underline{\mathbf{F}} = \min_{x\in\mathbf{x}, a\in\mathbf{a}} f(x)$ ($\overline{\mathbf{F}} = \max_{x\in\mathbf{x}, a\in\mathbf{a}} f(x)$).

Лемма 1 ([4]). *Если $\underline{\mathbf{F}}$ является функцией обоих концов одной или более компонент вектора $\mathbf{x}$, то $\underline{\mathbf{F}}$ не является оптимальным. То же самое справедливо и для $\overline{\mathbf{F}}$. Если $\underline{\mathbf{F}}$ является функцией только одного конца каждой компоненты вектора $\mathbf{x}$, то $\underline{\mathbf{F}}$ является оптимальным. То же самое справедливо и для $\overline{\mathbf{F}}$.*

С помощью результата Хансена докажем важную лемму.

Лемма 2. *Если в блочной $2n \times 2n$-матрице $A^k(\mathbf{x}^*)$, состоящей из 2×2-блоков, для некоторого $k = 2, 3, \ldots$ существует ij-блок ($i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$), содержащий в какой-либо строке два ненулевых элемента, и $\underline{\mathbf{x}}_j^* < \overline{\mathbf{x}}_j^*$, то $\mathbf{X}^H \neq \mathbf{x}^*$.*

Доказательство леммы 2 проведем для $k = 2$. Пусть $\left(a_{ij}^{(2)}\right)_{i,j=1}^{n}$ обозначает блочную матрицу $A^2(\mathbf{x}^*)$. Пусть в матрице $A^2(\mathbf{x}^*)$ блок $a_{ij}^{(2)}$ ($i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$) содержит в какой-либо строке два ненулевых элемента. Вектор $\mathbf{x}^*$ обращает в верное равенство уравнение (1) и уравнение

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) + \mathbf{b}, \tag{10}$$

при этом выполняются равенства (2), включение (4), а ОМР системы (10) совпадает с Σ:

$$\Sigma = \{x | (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(x = Ax + b)\} = \{x | (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(x = A(Ax + b) + b)\}. \tag{11}$$

Используя (7)–(9), получим

$$\begin{aligned}
x^* = \sigma(\mathbf{x}^*) &= \sigma\left(\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{b}) + \mathbf{b}\right) = \\
&= \sigma\left(\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{b})\right) + \sigma(\mathbf{b}) = A(\mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{b}) \cdot \sigma(\mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{b}) + \sigma(\mathbf{b}) = \\
&= A(\mathbf{x}^*) \cdot (A(\mathbf{x}^*)\sigma(\mathbf{x}^*) + \sigma(\mathbf{b})) + \sigma(\mathbf{b}) = \\
&= A^2(\mathbf{x}^*)x^* + A(\mathbf{x}^*)b + b.
\end{aligned} \tag{12}$$

Рассмотрим непрерывную вещественную функцию

$$f_i(x) = (A(Ax + b) + b)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(Ax + b)_j + b_i.$$

Значением интервального расширения этой функции при замене x, A, b соответственно на $\mathbf{x}^*, \mathbf{A}, \mathbf{b}$ является интервал $\mathbf{x}_i^*$. Пусть в матрице $A^2(\mathbf{x}^*)$ существует блок $a_{ij}^{(2)}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, содержащий в какой-либо строке два ненулевых элемента. Из соотношения (12) выпишем строки с номерами $2i-1$ и $2i$:

$$\underline{\mathbf{x}}_i^* = (A^2(\mathbf{x}^*)x^* + A(\mathbf{x}^*)b + b)_{2i-1}, \quad \overline{\mathbf{x}}_i^* = (A^2(\mathbf{x}^*)x^* + A(\mathbf{x}^*)b + b)_{2i}.$$

В одной из них справа от знака равенства имеются отличные от нуля коэффициенты при $\underline{\mathbf{x}}_j^*$ и $\overline{\mathbf{x}}_j^*$ и по условию $\underline{\mathbf{x}}_j^* \neq \overline{\mathbf{x}}_j^*$. В силу непрерывности одна из функций $\underline{\mathbf{f}}_i(x)$ или $\overline{\mathbf{f}}_i(x)$ будет иметь ненулевые коэффициенты при $\underline{\mathbf{x}}_j$ и $\overline{\mathbf{x}}_j$ для всех векторов, достаточно близких к $\mathbf{x}^*$. Поэтому множество значений функции $f_i(x)$

$$\mathrm{Range}_{x\in\mathbf{x}^*, A\in\mathbf{A}, b\in\mathbf{b}} f_i(x) = \left[\min_{x\in\mathbf{x}^*, A\in\mathbf{A}, b\in\mathbf{b}} f_i(x), \max_{x\in\mathbf{x}^*, A\in\mathbf{A}, b\in\mathbf{b}} f_i(x)\right]$$

по лемме 1 не совпадает со значением ее интервального расширения, а следовательно, компонента $\mathbf{x}_i^H$, в силу (2) и (11) удовлетворяющая $\mathbf{x}_i^H \subseteq \mathrm{Range}_{x\in\mathbf{x}^*,A\in\mathbf{A},b\in\mathbf{b}} f_i(x)$, также не совпадает с $\mathbf{x}_i^*$. Итак, $\mathbf{X}^H \neq \mathbf{x}^*$. Рассуждения можно продолжить для $k = 3, 4, \ldots$ $\square$

Доказательство теоремы 2. Докажем необходимость свойства 1 методом "от противного". Пусть на главной диагонали имеется блок 2×2 с номером qq типа b, c или d, причем в нем содержится хотя бы один отрицательный коэффициент (n_1 или n_2). По условию теоремы $\mathbf{X}^H = \left(\mathbf{x}_1^H, \mathbf{x}_2^H, \ldots, \mathbf{x}_n^H\right)^\top$, $\mathbf{x}_i^H = \left[\underline{\mathbf{x}}_i^H, \overline{\mathbf{x}}_i^H\right]$, $\underline{\mathbf{x}}_i^H < \overline{\mathbf{x}}_i^H$, $i = \overline{1,n}$. Как уже было сказано выше, координатные компоненты точек из множества решений достигают своих экстремальных значений $\underline{\mathbf{x}}_i^H = \min\{x_i | x \in \Sigma\}$ и $\overline{\mathbf{x}}_i^H = \max\{x_i | x\in\Sigma\}$ в вершинах множества Σ, являющихся решениями систем вида $x = Ax + b$, где $a_{ij} \in \{\underline{\mathbf{a}}_{ij}, \overline{\mathbf{a}}_{ij}\}$, $b_i \in \{\underline{\mathbf{b}}_i, \overline{\mathbf{b}}_i\}$, $i, j = \overline{1,n}$. Рассмотрим систему $x = A'x + b'$, решение $x' = \left(x_1', x_2', \ldots, \overline{\mathbf{x}}_q^H, \ldots, x_n'\right)^\top$ которой удовлетворяет равенству

$$\overline{\mathbf{x}}_q^H = a_{q1}'x_1' + \cdots + a_{qq}'\overline{\mathbf{x}}_q^H + \cdots + a_{qn}'x_n' + b_q'. \tag{13}$$

Аналогично пусть $x'' = \left(x_1'', x_2'', \ldots, \underline{\mathbf{x}}_q^H, \ldots x_n''\right)^\top$ — решение системы $x = A''x + b''$, причем

$$\underline{\mathbf{x}}_q^H = a_{q1}''x_1'' + \cdots + a_{qq}''\underline{\mathbf{x}}_q^H + \cdots + a_{qn}''x_n'' + b_q''. \tag{14}$$

В матрицах A' и A'' коэффициенты a_{qq}' и a_{qq}'' заменим на $\mathbf{a}_{qq}$, обозначив новые матрицы соответственно $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{A}''$. Подействуем отображением $\mathbf{A}'x + b'$ на интервальный вектор $\left(x_1', x_2', \ldots, \mathbf{x}_q^H, \ldots, x_n'\right)^\top$, а отображением $\mathbf{A}''x + b''$ — на вектор $\left(x_1'', x_2'', \ldots, \mathbf{x}_q^H, \ldots x_n'',\right)^\top$. Выпишем q-е компоненты векторов, полученных в результате этих отображений:

$$\mathbf{x}_q' = a_{q1}'x_1' + \cdots + \mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H + \cdots + a_{qn}'x_n' + b_q',$$

$$\mathbf{x}_q'' = a_{q1}''x_1'' + \cdots + \mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H + \cdots + a_{qn}''x_n'' + b_q''.$$

В силу монотонности по включению $\mathbf{x}_q' \subseteq \mathbf{x}_q^*$, $\mathbf{x}_q'' \subseteq \mathbf{x}_q^*$, $\overline{\mathbf{x}}_q' \geq \overline{\mathbf{x}}_q^H$, $\underline{\mathbf{x}}_q'' \leq \underline{\mathbf{x}}_q^H$, и если хотя бы одно из двух последних неравенств строгое, то $\overline{\mathbf{x}}_q^* \geq \overline{\mathbf{x}}_q' > \overline{\mathbf{x}}_q^H$ или $\underline{\mathbf{x}}_q^* \leq \underline{\mathbf{x}}_q'' < \underline{\mathbf{x}}_q^H$, откуда $\left[\underline{\mathbf{x}}_q^H, \overline{\mathbf{x}}_q^H\right] \neq \left[\underline{\mathbf{x}}_q^*, \overline{\mathbf{x}}_q^*\right]$ и $\mathbf{X}^H \neq \mathbf{x}^*$. Для доказательства неравенства $\overline{\mathbf{x}}_q' > \overline{\mathbf{x}}_q^H$ покажем, что $\overline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H} > a_{qq}'\overline{\mathbf{x}}_q^H$ для любого из двух возможных значений a_{qq}' : $a_{qq}' = \underline{\mathbf{a}}_{qq}$ или $a_{qq}' = \overline{\mathbf{a}}_{qq}$. В случае же выполнения равенства $\overline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H} = a_{qq}'\overline{\mathbf{x}}_q^H$ покажем, что выполняется строгое неравенство $\underline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H} < a_{qq}''\underline{\mathbf{x}}_q^H$ при $a_{qq}'' = \underline{\mathbf{a}}_{qq}$ или $a_{qq}'' = \overline{\mathbf{a}}_{qq}$, из которого следует, что $\underline{\mathbf{x}}_q'' < \underline{\mathbf{x}}_q^H$.

Поскольку блок a_{qq} является блоком типа b, c или d, $\underline{\mathbf{a}}_{qq} < 0$, и либо $\mathbf{a}_{qq} \leq 0$, либо $\underline{\mathbf{a}}_{qq} < 0 < \overline{\mathbf{a}}_{qq}$ $(0 \in \mathrm{int}(\mathbf{a}_{qq}))$. В произведении $\mathbf{a}_{qq} \cdot \mathbf{x}_q^H$ будем иметь

$$\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H = \begin{cases} 1.\ \left[\underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H, \overline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H\right], \text{если } \mathbf{a}_{qq} \leq 0, \quad \mathbf{x}_q^H \geq 0. \\[2ex] 2.\ \left[\overline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H, \underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H\right], \text{если } \mathbf{a}_{qq} \leq 0, \quad \mathbf{x}_q^H \leq 0. \\[2ex] 3.\ \left[\underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H, \underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H\right], \text{если } \mathbf{a}_{qq} \leq 0, \quad 0 \in \mathrm{int}(\mathbf{x}_q^H). \\[2ex] 4.\ \left[\underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H, \overline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H\right], \text{если } 0 \in \mathrm{int}(\mathbf{a}_{qq}), \quad \mathbf{x}_q^H \geq 0. \\[2ex] 5.\ \left[\overline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H, \underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H\right], \text{если } 0 \in \mathrm{int}(\mathbf{a}_{qq}), \quad \mathbf{x}_q^H \leq 0. \\[2ex] 6.\ \left[\min\left(\underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H, \overline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H\right), \max\left(\underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H, \overline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H\right)\right], \text{если } 0 \in \mathrm{int}(\mathbf{a}_{qq}), 0 \in \mathrm{int}(\mathbf{x}_q^H). \end{cases} \tag{15}$$

Пусть $a'_{qq} = \underline{\mathbf{a}}_{qq} < 0$ и по условию $\underline{\mathbf{x}}_q^H < \overline{\mathbf{x}}_q^H$. Тогда в указанных в (15) случаях:

1. $\underline{\mathbf{a}}_{qq} < 0, \overline{\mathbf{a}}_{qq} \leq 0, 0 \leq \underline{\mathbf{x}}_q^H < \overline{\mathbf{x}}_q^H$, следовательно, $a'_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H = \underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H < \underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H \leq \overline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}$.

2. $\underline{\mathbf{a}}_{qq} < 0, \underline{\mathbf{x}}_q^H < \overline{\mathbf{x}}_q^H \leq 0$, следовательно, $a'_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H = \underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H < \underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}$.

3. $\underline{\mathbf{a}}_{qq} < 0, \underline{\mathbf{x}}_q^H < 0 < \overline{\mathbf{x}}_q^H$, следовательно, $a'_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H = \underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H < \underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}$.

4. $\underline{\mathbf{a}}_{qq} < 0 < \overline{\mathbf{a}}_{qq}, \overline{\mathbf{x}}_q^H > 0$, следовательно, $a'_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H = \underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H < \overline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}$.

5. $\underline{\mathbf{a}}_{qq} < 0 < \overline{\mathbf{a}}_{qq}, \underline{\mathbf{x}}_q^H < \overline{\mathbf{x}}_q^H \leq 0$, следовательно, $a'_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H = \underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H < \underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}$.

6. $\underline{\mathbf{a}}_{qq} < 0 < \overline{\mathbf{a}}_{qq}, \underline{\mathbf{x}}_q^H < 0 < \overline{\mathbf{x}}_q^H$, следовательно, $\underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H < \underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H, \underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H < \overline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H$, значит, $a'_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H = \underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H < \max\left(\underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H, \overline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H\right) = \overline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}$.

Таким образом, если $a'_{qq} = \underline{\mathbf{a}}_{qq} < 0$ и $\underline{\mathbf{x}}_q^H < \overline{\mathbf{x}}_q^H$, то $a'_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H < \overline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}$ и $\mathbf{X}^H \neq \mathbf{x}^*$.

Пусть теперь $a'_{qq} = \overline{\mathbf{a}}_{qq}$ и по условию $\underline{\mathbf{x}}_q^H < \overline{\mathbf{x}}_q^H$. Тогда в указанных в (15) случаях:

1. $\overline{\mathbf{a}}_{qq} \leq 0, 0 \leq \underline{\mathbf{x}}_q^H < \overline{\mathbf{x}}_q^H$, и если $\overline{\mathbf{a}}_{qq} < 0$, то $a'_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H < \overline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}$, иначе при $\overline{\mathbf{a}}_{qq} = 0$ получим $a'_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}$. Таким образом, возможно совпадение $a'_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H$ и $\overline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}$ при $\overline{\mathbf{a}}_{qq} = 0$. Но в этом случае выполняется строгое неравенство $\underline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H} < a''_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H$. Действительно, при $a''_{qq} = \underline{\mathbf{a}}_{qq}$ получаем $\underline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H} = \underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H < \underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H = a''_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H$, а при $a''_{qq} = \overline{\mathbf{a}}_{qq}$ получим, что $\underline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H} < 0 = \overline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H = a''_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H$.

2. $\underline{\mathbf{a}}_{qq} < 0, \overline{\mathbf{a}}_{qq} \leq 0, \underline{\mathbf{x}}_q^H < \overline{\mathbf{x}}_q^H \leq 0$, следовательно, $a'_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H \leq \underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H < \underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}$.

3. $\underline{\mathbf{a}}_{qq} < 0, \overline{\mathbf{a}}_{qq} \leq 0, \underline{\mathbf{x}}_q^H < 0 < \overline{\mathbf{x}}_q^H$, следовательно, $a'_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H \leq 0 < \underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}$.

4. В случае $\underline{\mathbf{a}}_{qq} < 0 < \overline{\mathbf{a}}_{qq}$, $0 \leq \underline{\mathbf{x}}_q^H < \overline{\mathbf{x}}_q^H$ значения $a'_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H$ и $\overline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}$ совпадают: $a'_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}$. Покажем, что выполняется строгое неравенство $\underline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H} < a''_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H$. Действительно, при $a''_{qq} = \underline{\mathbf{a}}_{qq}$ получаем $\underline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H} = \underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H < \underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H = a''_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H$, а при $a''_{qq} = \overline{\mathbf{a}}_{qq}$ получим, что $\underline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H} = \underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H < \underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H \leq \overline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H = a''_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H$.

5. $\underline{\mathbf{a}}_{qq} < 0 < \overline{\mathbf{a}}_{qq}, \underline{\mathbf{x}}_q^H < \overline{\mathbf{x}}_q^H \leq 0$, следовательно, $a'_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H \leq \underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H < \underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}$.

6. Если $\max\left(\underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H, \overline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H\right) = \underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H$, то $a'_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H < \underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}$. Если же

$$\max\left(\underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H, \overline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H\right) = \overline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H,$$

то $a'_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}$. Но поскольку $\underline{\mathbf{a}}_{qq} < 0 < \underline{\mathbf{a}}_{qq}$, $\underline{\mathbf{x}}_q^H < 0 < \overline{\mathbf{x}}_q^H$, при $a''_{qq} = \underline{\mathbf{a}}_{qq}$ выполняется

$$a''_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H = \underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H > \min\left(\underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H, \overline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H\right) = \underline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}.$$

При $a''_{qq} = \overline{\mathbf{a}}_{qq}$ в случае

$$\min\left(\underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H, \overline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H\right) = \underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H$$

имеем

$$a''_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H > \underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H = \underline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}.$$

Если же

$$\min\left(\underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H, \overline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H\right) = \overline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H,$$

то $a''_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H = \overline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H = \underline{\mathbf{a}_{qq}\mathbf{x}_q^H}$.

Допустим, что одновременно

$$\max\left(\underline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H, \overline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H\right) = \overline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H,$$

$$\min\left(\underline{\mathbf{a}}_{qq}\overline{\mathbf{x}}_q^H, \overline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H\right) = \overline{\mathbf{a}}_{qq}\underline{\mathbf{x}}_q^H$$

и $\mathbf{x}_q^H = \mathbf{x}_q^*$. Следовательно, блок a_{qq} является блоком типа a, что противоречит первоначальному допущению. Необходимость выполнения первого свойства доказана.

Докажем теперь необходимость второго свойства матрицы $A(\mathbf{x}^*)$ при условии, что $\underline{\mathbf{x}}_i^H < \overline{\mathbf{x}}_i^H$, $\underline{\mathbf{a}}_{ij} \neq 0$ и $\overline{\mathbf{a}}_{ij} \neq 0$, $i, j = \overline{1, n}$. Это означает, что во всех блоках матрицы $A(\mathbf{x}^*)$ имеются два ненулевых элемента. Покажем, что наличие в матрице $A(\mathbf{x}^*)$ вне главной диагонали 2×2-блоков вида c или d влечет получение на главной диагонали в матрице $A^2(\mathbf{x}^*)$ 2×2-блока, содержащего в какой-либо строке два ненулевых элемента. Пусть блок a_{ij} является блоком вида c или d. При умножении 2×2-блоков любого вида на блоки вида c или d с любой стороны получаются только блоки вида c или d. Вычисляя

$$a_{ii}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki} = \ldots + a_{ii}^2 + \ldots + a_{ij}a_{ji} + \ldots,$$

получим блок с двумя ненулевыми элементами в какой-либо строке, откуда по лемме 2 $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{X}^H$.

Докажем необходимость третьего свойства матрицы $A(\mathbf{x}^*)$. Необходимость симметричного расположения блоков одного типа относительно главной диагонали следует из рассуждений, проведенных выше: иначе в $A^2(\mathbf{x}^*)$ будет существовать блок $a_{ii}^{(2)}$, содержащий два ненулевых коэффициента в какой-либо строке. Допустим далее, что выполняется одно из условий:

1) блоки a_{ip} и $a_{iq}, p \neq q$, являются блоками типа a, в то время как a_{pq} и a_{qp} являются блоками типа b, и $p \neq i$;

2) блоки a_{ip},a_{iq}, a_{pq} и a_{qp} являются блоками типа b, и $p \neq q$, $p \neq i$;

3) блок a_{ip} является блоком типа a, a_{iq} — блоком типа b, $p \neq q$, а a_{pq} и a_{qp} являются блоками типа a, и $p \neq i$;

4) блок a_{ip} является блоком типа b, a_{iq} — блоком типа a, $p \neq q$, а a_{pq} и a_{qp} являются блоками типа a, и $p \neq i$.

Рассмотрим случай 1. При $q = i$ не выполняется требование симметричного расположения блоков и $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{X}^H$. Пусть $i \neq q$. Значит, блок $a_{iq}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kq}$, содержащий слагаемое $a_{ip}a_{pq}$, будет блоком типа b или будет содержать в какой-либо строке два ненулевых элемента. В последнем случае сразу получаем $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{X}^H$. То же самое можно сказать и о блоке $a_{ip}^{(2)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kp}$, содержащем слагаемое $a_{iq}a_{qp}$. Если $a_{ip}^{(2)}$ и $a_{iq}^{(2)}$ — блоки типа b, то $a_{ii}^{(3)} = \ldots + a_{ip}^{(2)}a_{pi} + \ldots + a_{iq}^{(2)}a_{qi} + \ldots$ содержит в какой-либо строке два ненулевых элемента. По лемме 2 получим $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{X}^H$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Доказательство достаточности, не теряя общности, можно провести для $i = 1$. Рассмотрим решение $\mathbf{x}^*$ системы (1) и определим векторы $u, v \in \mathbb{R}^n$:

$$u_i = \begin{cases} \underline{\mathbf{x}}_i^*, & \text{если} a_{1i} \text{— блок } a, \\ \overline{\mathbf{x}}_i^*, & \text{если} a_{1i} \text{ — блок } b, \end{cases} \quad v_i = \begin{cases} \overline{\mathbf{x}}_i^*, & \text{если } a_{1i} \text{ — блок } a, \\ \underline{\mathbf{x}}_i^*, & \text{если } a_{1i} \text{ — блок } b. \end{cases} \tag{16}$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы существуют матрицы $A_1, A_2 \in \mathbf{A}$ и векторы $b_1, b_2 \in \mathbf{b}$ такие, что u и v являются неподвижными точками отображений $A_1x + b_1$ и $A_2x + b_2$ и, следовательно, принадлежат Σ. То есть равенство $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{b}$ может быть представлено в виде двух равенств:

$$u = A_1u + b_1, \ v = A_2v + b_2, \tag{17}$$

где $A_1, A_2 \in \mathbf{A}$, $b_1, b_2 \in \mathbf{b}$. Для определения коэффициентов матриц A_1, A_2 и векторов b_1, b_2 последние соотношения выпишем покомпонентно:

$$u_i = \sum_{j=1}^n a_{1ij}u_j + b_{1i}, \quad v_i = \sum_{j=1}^n a_{2ij}v_j + b_{2i}, \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{18}$$

Равенство (3) можно записать покомпонентно $\mathbf{x}_i^* = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} \cdot \mathbf{x}_j^* + \mathbf{b}_i, \ i = 1, 2, \ldots, n$, или

$$\underline{\mathbf{x}}_i^* = \sum_{j=1}^n \underline{\mathbf{a}_{ij} \cdot \mathbf{x}_j^*} + \underline{\mathbf{b}}_i, \quad \overline{\mathbf{x}}_i^* = \sum_{j=1}^n \overline{\mathbf{a}_{ij} \cdot \mathbf{x}_j^*} + \overline{\mathbf{b}}_i, \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{19}$$

Поскольку в силу (16) u_i и v_i являются разными концами $\mathbf{x}_i^*$, для выполнения равенств (18) векторы $b_1, b_2 \in \mathbf{b}$ выберем с учетом (19):

$$b_{1i} = \begin{cases} \underline{\mathbf{b}}_i & \text{при } u_i = \underline{\mathbf{x}}_i^*, \\ \overline{\mathbf{b}}_i & \text{при } u_i = \overline{\mathbf{x}}_i^*, \end{cases} \quad b_{2i} = \begin{cases} \underline{\mathbf{b}}_i & \text{при } v_i = \underline{\mathbf{x}}_i^*, \\ \overline{\mathbf{b}}_i & \text{при } v_i = \overline{\mathbf{x}}_i^*. \end{cases} \tag{20}$$

В произведении $\mathbf{A}\mathbf{x}^*$ элементы $\mathbf{a}_{ij}\mathbf{x}_j^* = \left[\underline{\mathbf{a}_{ij}\mathbf{x}_j^*}, \overline{\mathbf{a}_{ij}\mathbf{x}_j^*}\right]$ соответствуют блокам $A(\mathbf{x}^*)$:

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{a}_{ij}\mathbf{x}_j^*} \\ \\ \overline{\mathbf{a}_{ij}\mathbf{x}_j^*} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} (a_{ij})_{11} & 0 \\ 0 & (a_{ij})_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}^* \\ \overline{\mathbf{x}}^* \end{pmatrix}, & \text{если } a_{ij} \text{ — блок типа } a; \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & (a_{ij})_{12} \\ (a_{ij})_{21} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}_j^* \\ \overline{\mathbf{x}}_j^* \end{pmatrix}, & \text{если } a_{ij} \text{ — блок типа } b. \end{cases} \tag{21}$$

Отсюда следует, что при совпадении типов a_{1p} и a_{1q} $(p, q \in \{1, \ldots, n\}, \ p \neq q)$ принадлежность a_{pq} и a_{qp} к типу a обеспечивает в равенствах (21) вычисление $\underline{\mathbf{x}}_p^*$ в соответствующем слагаемом только через $\underline{\mathbf{x}}_q^*$, $\underline{\mathbf{x}}_q^*$ — только через $\underline{\mathbf{x}}_p^*$, $\overline{\mathbf{x}}_p^*$ — только через $\overline{\mathbf{x}}_q^*$, и $\overline{\mathbf{x}}_q^*$ — только через $\overline{\mathbf{x}}_p^*$. Аналогично при несовпадении типов a_{1p} и a_{1q} $(p, q \in \{1, \dots, n\},\ p \neq q)$ принадлежность a_{pq} и a_{qp} к типу b обеспечивает в равенствах (21) вычисление $\underline{\mathbf{x}}_p^*$ только через $\overline{\mathbf{x}}_q^*$, $\underline{\mathbf{x}}_q^*$ — только через $\overline{\mathbf{x}}_p^*$, $\overline{\mathbf{x}}_p^*$ — только через $\underline{\mathbf{x}}_q^*$, $\overline{\mathbf{x}}_q^*$ — только через $\underline{\mathbf{x}}_p^*$. Принадлежность блоков $A(\mathbf{x}^*)$, расположенных на главной диагонали, к типу a обеспечивает для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ в равенствах (21) вычисление $\underline{\mathbf{x}}_i^*$ только через $\underline{\mathbf{x}}_i^*$, а $\overline{\mathbf{x}}_i^*$ — только через $\overline{\mathbf{x}}_i^*$.

Таким образом, при выполнении условий теоремы существуют матрицы A_1, $A_2 \in \mathbf{A}$ и векторы $b_1, b_2 \in \mathbf{b}$ такие, что любой из концов компонент $\mathbf{x}^*$ в равенстве (21) вычисляется с помощью некоторого определенного фиксированного набора концов остальных компонент и себя самого и любая компонента из этих наборов опять-таки вычисляется через его же компоненты. Эти наборы компонент — векторы u и v.

Зная векторы u и v и решение $\mathbf{x}^*$, с помощью равенств (21) можно определить матрицы $A_1, A_2 \in \mathbf{A}$:

$$
\begin{aligned}
a_{1ij} &= \begin{cases} (a_{ij})_{11}, & \text{если } u_i = \underline{\mathbf{x}}_i^* \text{ и } a_{ij} \text{ — блок типа } a, \\ (a_{ij})_{22}, & \text{если } u_i = \overline{\mathbf{x}}_i^* \text{ и } a_{ij} \text{ — блок типа } a, \\ (a_{ij})_{12}, & \text{если } u_i = \underline{\mathbf{x}}_i^* \text{ и } a_{ij} \text{ — блок типа } b, \\ (a_{ij})_{21}, & \text{если } u_i = \overline{\mathbf{x}}_i^* \text{ и } a_{ij} \text{ — блок типа } b; \end{cases} \\
a_{2ij} &= \begin{cases} (a_{ij})_{22}, & \text{если } v_i = \overline{\mathbf{x}}_i^* \text{ и } a_{ij} \text{ — блок типа } a, \\ (a_{ij})_{11}, & \text{если } v_i = \underline{\mathbf{x}}_i^* \text{ и } a_{ij} \text{ — блок типа } a, \\ (a_{ij})_{21}, & \text{если } v_i = \overline{\mathbf{x}}_i^* \text{ и } a_{ij} \text{ — блок типа} b, \\ (a_{ij})_{12}, & \text{если } v_i = \underline{\mathbf{x}}_i^* \text{ и } a_{ij} \text{ — блок типа } b. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Таким образом, доказано, что при выполнении условий теоремы векторы u и v, определенные по формулам (16), удовлетворяют соответственно равенствам $u = A_1 u + b_1$ и $v = A_2 v + b_2$, где векторы b_1 и b_2 определены по формулам (20), а матрицы A_1 и A_2 — по формулам (22). $\square$

Замечание 1. Для проверки требования теоремы $\underline{\mathbf{x}}_i^H < \overline{\mathbf{x}}_i^H$, $i = \overline{1, n}$, в значительном числе случаев можно использовать эффективную оценку ОМР Σ изнутри [5, 7]. Легко показать также, что данное требование будет удовлетворено при выполнении в системе (1) условий $\underline{\mathbf{b}}_i < \overline{\mathbf{b}}_i$, $i = \overline{1, n}$. В этом случае Σ содержит открытое множество, а значит, ни по одной компоненте $\mathbf{X}^H$ не вырождается в точку.

П р и м е р 1. Решением системы

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [-0.1, 0.7\ ] & [-0.2, 0.08] \\ [-0.2, 0.03] & [-0.1, 0.3\ ] \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{pmatrix} [0.1, 1.3] \\ [0.3, 1.2] \end{pmatrix}
$$

является вектор $\mathbf{x}^* = ([-1, 5], [-1, 2])^\top$. По формуле (8) получим матрицу

$$
A(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0.7 & -0.2 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.3 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}.
$$

Значит, данная система удовлетворяет достаточным условиям теоремы 2, и $\mathbf{X}^H = \mathbf{x}^*$. Так как $\mathbf{X}^H = ([-1,5],[-1,2])^\top$, система удовлетворяет и необходимым условиям. Объединенное множество решений Σ, векторы $\mathbf{X}^H$ и $\mathbf{x}^*$ указаны на рис. 2. По формулам (16), (20) и (22) получим

$$u = (\underline{\mathbf{x}}_1^*, \overline{\mathbf{x}}_2^*)^\top = (-1,2)^\top, \quad v = (\overline{\mathbf{x}}_1^*, \underline{\mathbf{x}}_2^*)^\top = (5,-1)^\top,$$

$$b_1 = (\underline{\mathbf{b}}_1, \overline{\mathbf{b}}_2)^\top = (0.1, 1.2)^\top, \quad b_2 = (\overline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2)^\top = (1.3, 0.3)^\top,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} (a_{11})_{11} & (a_{12})_{12} \\ (a_{21})_{21} & (a_{22})_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.2 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} (a_{11})_{22} & (a_{12})_{21} \\ (a_{21})_{12} & (a_{22})_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.2 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Векторы u и v удовлетворяют равенствам $u = A_1 u + b_1$ и $v = A_2 v + b_2$. Как видно из рис. 2, в этих точках обе координаты достигают на Σ экстремальных значений.

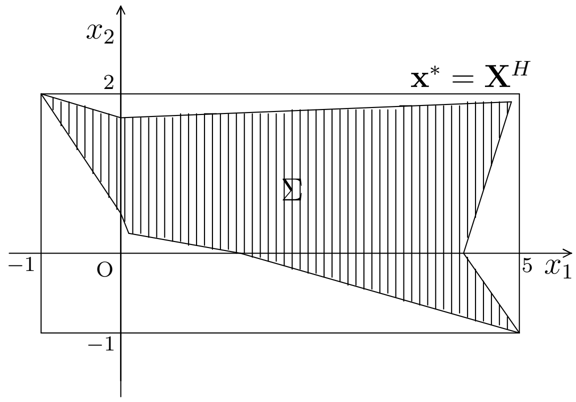

Рис. 2.

П р и м е р 2. Система

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [0, 0.5] & [-0.05, 0.2] \\ [0, 0.2] & [\ \ 0.3\ \ , 0.5] \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{pmatrix} [\ \ 1.2, 2.1] \\ [-0.5, 0\ \ ] \end{pmatrix}$$

имеет решение $\mathbf{x}^* = ([1,5],[-1,2])^\top$, с помощью которого находим

$$A(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Значит, данная система удовлетворяет достаточным условиям теоремы 2, и $\mathbf{X}^H = \mathbf{x}^*$. На рис. 3 изображены Σ, $\mathbf{X}^H$ и $\mathbf{x}^*$ для этой системы. Здесь $\underline{\mathbf{a}}_{11} = \underline{\mathbf{a}}_{21} = 0$, и необходимые условия для этого случая не доказывались. Как и в предыдущем примере, можно найти

$$u = (\underline{\mathbf{x}}_1^*, \underline{\mathbf{x}}_2^*)^\top = (1,-1)^\top, \quad v = (\overline{\mathbf{x}}_1^*, \overline{\mathbf{x}}_2^*)^\top = (5,2)^\top,$$

$$b_1 = (\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2)^\top = (1.2, -0.5)^\top, \quad b_2 = (\overline{\mathbf{b}}_1, \overline{\mathbf{b}}_2)^\top = (2.1, 0)^\top,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} (a_{11})_{11} & (a_{12})_{11} \\ (a_{21})_{11} & (a_{22})_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} (a_{11})_{22} & (a_{12})_{22} \\ (a_{21})_{22} & (a_{22})_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

В точках u и v обе координаты достигают на Σ экстремальных значений.

П р и м е р 3. Для системы

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [\ \ 0.6, \ \ 0.7] & 0 \\ [-0.3, -0.2] & [0.4, 0.5] \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{pmatrix} [0.4, 1.5] \\ [1 \ \ , 1.2] \end{pmatrix}$$

решение $\mathbf{x}^* = ([1, 5], [-1, 2])^\top$. Находим

$$A(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3 & 0.5 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

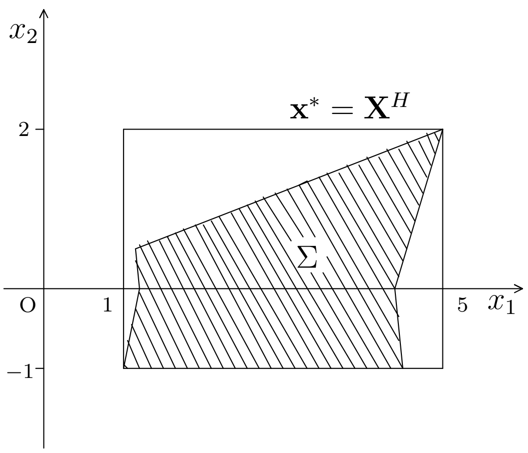

Рис. 3.

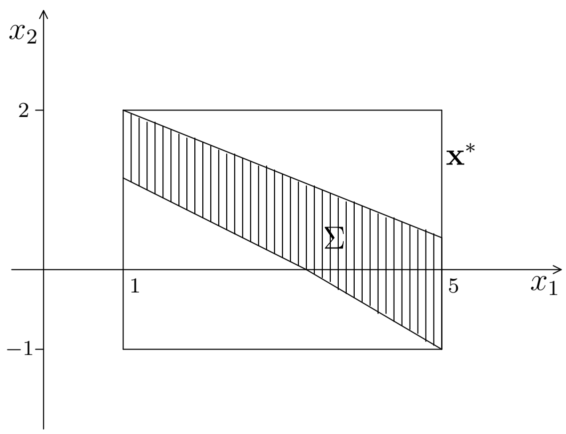

Рис. 4.

В матрице $A(\mathbf{x}^*)$ будем считать блок a_{12} блоком типа b. Значит, данная система удовлетворяет достаточным условиям теоремы 2, и $\mathbf{X}^H = \mathbf{x}^*$ (рис. 4). Здесь $\mathbf{a}_{12} = 0$, и необходимые условия не доказывались. Как и в предыдущем примере, можно найти неподвижные точки u и v отображений $A_1 x + b_1$ и $A_2 x + b_2$, матрицы A_1, A_2 и векторы b_1 и b_2, задающие эти отображения:

$$u = (\underline{\mathbf{x}}_1^*, \overline{\mathbf{x}}_2^*)^\top = (1, 2)^\top, \quad v = (\overline{\mathbf{x}}_1^*, \underline{\mathbf{x}}_2^*)^\top = (5, -1)^\top,$$

$$b_1 = (\underline{\mathbf{b}}_1, \overline{\mathbf{b}}_2)^\top = (0.4, 1.2)^\top, \quad b_2 = (\overline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2)^\top = (1.5, 1)^\top,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} (a_{11})_{11} & (a_{12})_{12} \\ (a_{21})_{21} & (a_{22})_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 \\ -0.2 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} (a_{11})_{22} & (a_{12})_{21} \\ (a_{21})_{12} & (a_{22})_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 \\ -0.3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

В точках u и v обе координаты достигают на Σ экстремальных значений.

П р и м е р 4. Для системы со знакопостоянными коэффициентами в матрице $\mathbf{A}$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [0.6, 0.7] & [-0.2, -0.1] \\ [0.2, 0.3] & [\ \ 0.3, \ \ 0.4] \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{pmatrix} [\ \ 0.8, \ \ 1.3] \\ [-0.8, -0.3] \end{pmatrix}$$

не выполняются необходимые условия теоремы 2 (и теоремы 1): блоки a_{12} и a_{21} будут, очевидно, иметь разные типы, а по замечанию 1 $\underline{\mathbf{x}}_i^H < \overline{\mathbf{x}}_i^H$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Эта система имеет решение $\mathbf{x}^* = ([1, 5], [-1, 2])^\top$ и ОМР Σ, изображенное на рис. 5. Здесь

$$\mathbf{X}^H = \left([1.8, 4.3], [-0.6, 1\tfrac{3}{7}]\right)^\top,$$

и $\mathbf{X}^H \neq \mathbf{x}^*$. Из рис. 5 видно, что каждая координата достигает экстремального значения в точке множества Σ, в которой другая координата экстремума не достигает.

Замечание 2. Если выполнены требования 1–3 теоремы 2 и $0 \in \operatorname{int}(\mathbf{x}_i^*)$, $i = \overline{1, n}$, то ненулевые коэффициенты в 2×2-блоках a_{ij} являются наиболее удаленными от нуля концами интервалов $\mathbf{a}_{ij}$ и вид формул (22) значительно упрощается: ij-коэффициенты $(i, j = \overline{1, n})$ матриц A_1 и A_2 находятся по формулам

$$a_{1ij} = a_{2ij} = \begin{cases} \overline{\mathbf{a}}_{ij}, & \text{если блоки } a_{1i}, a_{1j} \text{ одного типа,} \\ \underline{\mathbf{a}}_{ij}, & \text{если блоки } a_{1i}, a_{1j} \text{ разных типов.} \end{cases} \tag{23}$$

В качестве иллюстрации можно рассмотреть пример 1.

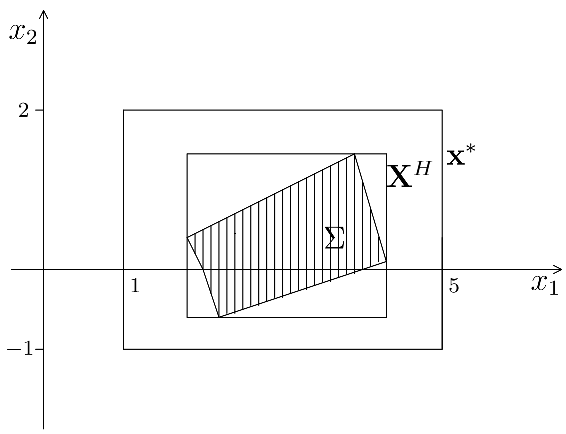

Рис. 5.

Таким образом, используя теорему 2, вопрос о совпадении или несовпадении $\mathbf{X}^H$ и $\mathbf{x}^*$ для систем общего вида можно решить только после нахождения решения $\mathbf{x}^*$ и построения матрицы $A(\mathbf{x}^*)$, но в некоторых случаях при выполнении достаточных условий теоремы 1 матрицы A_1 и A_2 и векторы b_1 и b_2 можно построить, используя только исходную систему (1). Решая вещественные системы (17) прямым или итерационным методом, можно найти границы компонент $\mathbf{x}^*$. Именно, справедлива

Теорема 3. *Пусть матрица* $\mathbf{A}$ *в системе (1) состоит только из неположительных и неотрицательных коэффициентов,* $0 \in \operatorname{int}(\mathbf{b}_i)$, $i = \overline{1, n}$, *и выполнены требования 1 и 2 теоремы 1. Тогда* $\mathbf{X}^H = \mathbf{x}^*$ *и концы компонент* $\mathbf{x}^*$ *находятся при решении вещественных систем (17), где i-е компоненты* $(i = \overline{1, n})$ *векторов* b_1 *и* b_2 *определяются по формулам*

$$b_{1i} = \begin{cases} \underline{\mathbf{b}}_i, & \textit{если } \mathbf{a}_{1i} \geq 0, \\ \overline{\mathbf{b}}_i, & \textit{если } \mathbf{a}_{1i} \leq 0, \end{cases} \quad b_{2i} = \begin{cases} \underline{\mathbf{b}}_i, & \textit{если } \mathbf{a}_{1i} \leq 0, \\ \overline{\mathbf{b}}_i, & \textit{если } \mathbf{a}_{1i} \geq 0, \end{cases} \tag{24}$$

а ij-коэффициенты $(i, j = \overline{1, n})$ *матриц* A_1 *и* A_2 *— по формулам (23).*

Лемма 3 ([1]). *Пусть* $\mathbf{A}$ *— интервальная матрица, для которой* $\rho(|\mathbf{A}|) < 1$. *Тогда для решения* $\mathbf{x}^*$ *(которое существует и единственно) уравнения* $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{b}$ *верно соотношение*

$$\left\{y = (I - A)^{-1}b | A \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{b}\right\} \subseteq \{x | x \in \mathbf{x}^*\}.$$

Доказательство теоремы 3. Используя лемму 3, получаем, что $0 \in \mathrm{int}(\mathbf{x}_i^*)$, $i = \overline{1,n}$. В этом случае формулы (24) сразу же получаются из формул (20). После нахождения решений u и v, соответствующих системам (17), концы i-х компонент ($i = \overline{1,n}$) решения $\mathbf{x}^*$, очевидно, определяются по формулам

$$\underline{\mathbf{x}}_i^* = \begin{cases} u_i, & \text{если } \mathbf{a}_{1i} \geq 0, \\ v_i, & \text{если } \mathbf{a}_{1i} \leq 0, \end{cases} \qquad \overline{\mathbf{x}}_i^* = \begin{cases} v_i, & \text{если } \mathbf{a}_{1i} \geq 0, \\ u_i, & \text{если } \mathbf{a}_{1i} \leq 0. \end{cases}$$

□

Список литературы

[1] Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.

[2] Ляшко М.А. О совпадении интервальной оболочки объединенного множества решений ИСЛАУ с итерационным решением. Балашов, 1996. Деп. в ВИНИТИ 08.02.96, № 429–В96.

[3] Barth W., Nuding E. Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen // Computing. 1994. Vol. 12. P. 117–125.

[4] Hansen E.R. Sharpness in Interval Computations // Reliable Computing. 1997. Vol. 3, N 1. P. 17–29.

[5] Kupriyanova L. Inner estimation of the united solution set of interval linear algebraic system // Reliable Computing. 1995. Vol. 1, N 1. P. 15–31.

[6] Neumaier A. Interval Methods for Systems of Equations // Cambrige: Cambrige Univ. Press, 1990.

[7] Шарый С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 3. С. 51–61.

Поступила в редакцию 28 февраля 2002 г.,
в переработанном виде — 31 июля 2002 г.