

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ИНТЕРВАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ СО СВЯЗЯМИ

Р. С. ИВЛЕВ

*Институт проблем информатики и управления МОН РК,
Алматы, Казахстан*

e-mail: ivlevruslan@newmail.ru

Dependent interval matrices, i.e. interval matrices with the elements, which depend on each other, are considered. The possibility to represent a dependent interval matrix as a matrix polytope is shown. Some algebraic conditions of positive definiteness and asymptotic stability for matrix polytopes are obtained.

Введение

Проблема исследования устойчивости динамических систем в условиях параметрической неопределенности интервального типа является объектом пристального внимания современной теории управления и смежных научных дисциплин. Несмотря на то что наибольших успехов в этом направлении удалось достигнуть в классе линейных стационарных систем с интервальными параметрами, некоторые из вопросов, касающиеся исследования устойчивости заданных в пространстве состояний линейных интервальных динамических систем, остаются открытыми. Так, решение задачи исследования устойчивости интервальных матриц получено для специальных случаев интервальных матриц (например, [1]) либо в виде достаточных условий [2, 3]. В общем случае согласно результатам [4] задача исследования устойчивости интервальной матрицы является NP-трудной. Наряду с указанными сложностями при построении математической модели некоторые параметры модели могут оказаться зависимыми друг от друга и оставаться в пределах заданных интервалов. В результате этого истинные значения параметров могут принимать не произвольные сочетания значений из заданных интервалов, а только те, которые удовлетворяют существующим зависимостям. Для случая линейных динамических систем, заданных в пространстве состояний, значения элементов матрицы состояния будут зависеть друг от друга. Матрицы, значения элементов которых, оставаясь в пределах заданных интервалов, зависят друг от друга, будем называть согласно [5–9] *интервальными матрицами со связями*. Исследование свойств таких интервальных матриц представляет большой научный интерес.

1. Обозначения и постановка задачи

Специальной нотации в данной работе будут подчинены интервальные величины, для обозначения которых в дальнейшем будет использован полужирный шрифт. Неинтервальные (точечные) величины будут обозначаться обычным шрифтом. Символами подчеркивания и надчеркивания будут обозначаться нижняя и верхняя границы интервала соответственно. Применительно к интервальным матрицам и векторам символы подчеркивания и надчеркивания будут пониматься в поэлементном смысле.

В данной работе рассматривается линейный характер зависимостей элементов матрицы от неопределенных параметров. Пусть $\mathbf{c} = [\underline{c}, \bar{c}] = ([\underline{c}_k, \bar{c}_k])_{k=1}^m \in \mathbb{IR}^m$ — некоторый интервальный вектор [10, 11] и $d_{ij} \in \mathbb{R}^m$ — неинтервальные (точечные) векторы, $i, j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$; \mathbb{IR} — множество всех вещественных интервалов [10, 11]. Введем матрицы $D \in \mathbb{R}^{n \times nm}$ и $C \in \mathbb{R}^{nm \times n}$ блочного вида

$$D = (d_{ij}^T)_{ij=1}^n = \begin{pmatrix} d_{11}^T & d_{12}^T & \dots & d_{1n}^T \\ d_{21}^T & d_{22}^T & \dots & d_{2n}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1}^T & d_{n2}^T & \dots & d_{nn}^T \end{pmatrix}, \quad C = \text{Block Diag}\{\underbrace{c, c, \dots, c}_n\}, \quad c \in \mathbf{c}.$$

Определение 1. Назовем множество матриц

$$\mathbf{A}^{\text{dep}} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = DC, c \in \mathbf{c}\} \quad (1)$$

интервальной матрицей со связями линейного типа относительно интервального вектора $\mathbf{c} \in \mathbb{IR}^m$ и матричного множителя $D \in \mathbb{R}^{n \times nm}$.

Для краткости изложения будем использовать термин “интервальная матрица со связями”, опуская слова “линейного типа относительно интервального вектора и матричного множителя”, при этом будем подразумевать эквивалентное значение. Из определения 1 видно, что в общем случае $\mathbf{A}^{\text{dep}} \notin \mathbb{IR}^{n \times n}$ в классическом смысле.

В работе [8] рассматриваются зависимые интервальные векторы для случая, когда $j = 1$, $d_{i1} = d_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in J$, и все значения элементов векторов d_i , кроме одного, равны нулю. В указанной работе интервальные векторы со связями представляются иным образом: пусть $(J_q)_{q=1}^l$ — разбиение множества индексов $J = \{1, 2, \dots, n\}$, т. е.

$$J_q \subseteq J, \quad J_{q_1} \cap J_{q_2} = \emptyset \text{ для } q_1 \neq q_2, \quad \bigcup_{q=1}^l J_q = J.$$

Далее, пусть $\mathbf{y}_q \in \mathbb{IR}$, $q = 1, 2, \dots, l$ и $s \in \mathbb{R}^n$, тогда согласно [8] имеем следующее представление интервального вектора со связями:

$$\mathbf{b}^{\text{dep}} = \{b \in \mathbb{R}^n \mid b_r = s_r y_q, r = 1, 2, \dots, n, \text{ где } y_q \in \mathbf{y}_q \text{ при } r \in J_q\}.$$

Легко видеть, что приведенные два представления эквивалентны для случая, когда $j = 1$, $l = m$, $\mathbf{c} = (\mathbf{y}_q)_{q=1}^l$, и векторы d_i , $i \in J$, имеют в качестве q -й компоненты величину s_i при $i \in J_q$, $q = 1, 2, \dots, l$, а остальные компоненты равны нулю, т. е.

$$d_i = (0, 0, \dots, \overset{q}{s}_i, \dots, \overset{m}{0})^T, \quad i \in J_q, \quad q = 1, 2, \dots, l.$$

Для случая, когда $m = n^2$, векторы d_{ij} являются столбцами единичной матрицы порядка n^2 , т. е.

$$\begin{aligned} d_{11}^T &= (1, 0, \dots, 0), \\ d_{12}^T &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\vdots \\ d_{1n}^T &= (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0), \\ d_{21}^T &= (0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 0), \\ &\vdots \\ d_{nn}^T &= (0, 0, \dots, 1), \end{aligned}$$

имеем интервальную матрицу (1), понимаемую в классическом смысле, т. е. $\mathbf{A}^{\text{dep}} = \mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$.

Введем матрицы $\underline{C}, \overline{C} \in \mathbb{R}^{nm \times n}$ блочно-диагонального вида

$$\underline{C} = \text{Block Diag}\{\underbrace{\underline{c}, \underline{c}, \dots, \underline{c}}_n\}, \quad \overline{C} = \text{Block Diag}\{\underbrace{\overline{c}, \overline{c}, \dots, \overline{c}}_n\}$$

и, используя арифметические операции классической интервальной арифметики [10, 11], построим интервальную матрицу $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$

$$\mathbf{A} = DC, \tag{2}$$

где $\mathbf{C} = [\underline{C}, \overline{C}] \in \mathbb{IR}^{nm \times n}$. Нетрудно показать [11], что интервальная матрица (2) является интервальной оболочкой для \mathbf{A}^{dep} , т. е.

$$\mathbf{A} = \square \mathbf{A}^{\text{dep}}; \quad \mathbf{A}^{\text{dep}} \subseteq \mathbf{A}. \tag{3}$$

Определение 2. Будем говорить, что интервальная матрица со связями \mathbf{A}^{dep} обладает некоторым свойством \mathcal{P} , если этим свойством обладает любая матрица $A \in \mathbf{A}^{\text{dep}}$.

В настоящей работе исследуются асимптотическая устойчивость и положительная определенность интервальной матрицы со связями \mathbf{A}^{dep} .

Задача: требуется определить конечное множество специальным образом построенных точечных матриц порядка n таких, что наличие исследуемого свойства у этих матриц влечет наличие этого свойства у матрицы \mathbf{A}^{dep} в смысле определения 2.

Из соотношения (3) можно заключить, что для решения поставленной задачи достаточно воспользоваться, например, результатами работы [1] применительно к интервальной матрице $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$. Однако во многих случаях интервальная оболочка матрицы \mathbf{A}^{dep} может оказаться слишком грубой аппроксимацией множества (1), что повлечет за собой большую избыточность полученных условий.

2. Предварительный результат: геометрические свойства

В данном разделе нами будет установлено, что интервальная матрица со связями \mathbf{A}^{dep} представима в пространстве $\mathbb{R}^{n \times n}$ в виде выпуклой комбинации конечного числа точечных

матриц. Для этого выполним сначала некоторые вспомогательные построения и приведем необходимые определения.

Рассмотрим матрицы $D_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in K = \{1, 2, \dots, m\}$, построенные следующим образом: ij -й элемент матрицы D_k определяется равным k -му элементу вектора d_{ij} , $i, j \in J$, т. е.

$$D_k = (d_{ijk})_{ij=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

где d_{ijk} — k -й элемент вектора d_{ij} , $i, j \in J$. Для любого $k \in K$ имеем $D_k \neq 0_{n \times n}$, поскольку в противном случае ни один элемент матрицы \mathbf{A}^{dep} не зависел бы от \mathbf{c}_k и, следовательно, элемент \mathbf{c}_k можно было бы исключить из рассмотрения, сделав соответствующие изменения в векторах \mathbf{c} и d_{ij} . Множество матриц D_k обозначим через

$$\mathcal{D}_K = \{D_k \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid D_k \neq 0_{n \times n}, k \in K\} \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}.$$

С использованием введенных матриц D_k интервальная матрица со связями \mathbf{A}^{dep} представима в виде

$$\mathbf{A}^{\text{dep}} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = \sum_{k=1}^m D_k \mathbf{c}_k, \mathbf{c}_k \in \mathbf{c}_k\}. \quad (4)$$

Аналогичное представление можно получить для интервальной матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{n \times n}$. Применяя арифметические операции классической интервальной арифметики, имеем

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^m D_k \mathbf{c}_k.$$

На множестве \mathcal{D}_K матриц D_k , $k \in K$, введем отношение φ_D следующим образом.

Определение 3. Будем говорить, что две матрицы $D_{k'} \in \mathcal{D}_K$ и $D_{k''} \in \mathcal{D}_K$, $k', k'' \in K$, находятся в отношении φ_D , и будем записывать $D_{k'} \varphi_D D_{k''}$, если существует такое число $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, что имеет место равенство

$$D_{k'} = \mu D_{k''}. \quad (5)$$

Это отношение является отношением эквивалентности, поскольку свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности очевидным образом выполняются. Введенному отношению φ_D соответствует разбиение $(\mathcal{D}_{K_q})_{q=1}^p$ множества \mathcal{D}_K на классы, которое индуцирует разбиение $(K_q)_{q=1}^p$ множества индексов $K = \{1, 2, \dots, m\}$:

$$K_q \subseteq K, \quad K_{q_1} \cap K_{q_2} \neq \emptyset, \quad \text{для } q_1 \neq q_2, \quad \bigcup_{q=1}^p K_q = K.$$

Из соотношения (5) и определения 3 видно, что класс K_q , $q \in \{1, 2, \dots, p\}$, содержит номера только тех индексов, которым соответствуют матрицы D_k с пропорциональными элементами.

Матрицы D_k , находящиеся в отношении φ_D , обладают следующим свойством: если для некоторых $k', k'' \in K$ имеет место $D_{k'} \varphi_D D_{k''}$, то

$$\frac{|D_{k'}|}{\|D_{k'}\|} = \frac{|D_{k''}|}{\|D_{k''}\|}, \quad (6)$$

где $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^2}$ для $X = (x_{ij})_{ij=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Соотношение (6) выполняется для любых двух матриц, принадлежащих одному классу \mathcal{D}_{K_q} . Это позволяет поставить каждому классу в соответствие матрицу

$$N_q = \frac{|D_{k_q}|}{\|D_{k_q}\|}, \quad (7)$$

где $D_{k_q} \in \mathcal{D}_{K_q}$ однозначно определяет свой класс. Здесь и далее матрицы, принадлежащие классу \mathcal{D}_{K_q} , обозначаются через D_{k_q} , $k_q \in K_q$, $q \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Для каждого класса \mathcal{D}_{K_q} введем в рассмотрение числа μ_{k_q} , определяемые согласно выражению

$$\mu_{k_q} N_q = D_{k_q}, \quad k_q \in K_q.$$

Из соотношения (7) видно, что $|\mu_{k_q}| = \|D_{k_q}\|$. Также для каждого класса \mathcal{D}_{K_q} , применяя классическую интервальную арифметику, вычислим интервалы

$$\mathbf{v}_q = \sum_{k_q \in K_q} \mu_{k_q} \mathbf{c}_{k_q}, \quad q \in \{1, 2, \dots, p\}.$$

Используя множество

$$Z_p = \{z \in \mathbb{R}^p \mid z_i \in \{-1, 1\}, \text{ для всех } i\},$$

вычислим матрицы

$$G_z = \sum_{q=1}^p N_q (\text{mid } \mathbf{v}_q + z_q \text{rad } \mathbf{v}_q),$$

где $\text{mid } \mathbf{v}_q = (\underline{v}_q + \bar{v}_q)/2$ и $\text{rad } \mathbf{v}_q = (\bar{v}_q - \underline{v}_q)/2$ — середина и радиус интервала \mathbf{v}_q соответственно.

Теорема 1. Пусть \mathbf{A}^{dep} — интервальная матрица со связями линейного типа относительно интервального вектора $\mathbf{c} \in \mathbb{IR}^m$ и матричного множителя $D \in \mathbb{R}^{n \times nm}$. Тогда

$$\mathbf{A}^{\text{dep}} = \text{sch} \{G_z\} = \mathbb{G},$$

где sch — выпуклая оболочка.

Доказательство. Используя соотношение (4) для интервальной матрицы со связями

\mathbf{A}^{dep} , имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{\text{dep}} &= \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = \sum_{k=1}^m D_k c_k, c_k \in \mathbf{c}_k\} = \\
&= \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = \sum_{q=1}^p \sum_{k_q \in K_q} D_{k_q} c_{k_q}, c_{k_q} \in \mathbf{c}_{k_q}\} = \\
&= \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = \sum_{q=1}^p \sum_{k_q \in K_q} \mu_{k_q} N_q c_{k_q}, c_{k_q} \in \mathbf{c}_{k_q}\} = \\
&= \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = \sum_{q=1}^p N_q \sum_{k_q \in K_q} \mu_{k_q} c_{k_q}, c_{k_q} \in \mathbf{c}_{k_q}\} = \\
&= \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = \sum_{q=1}^p N_q v_q, v_q \in \mathbf{v}_q\} = \\
&= \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = \sum_{q=1}^p N_q (\lambda_q \underline{v}_q + (1 - \lambda_q) \bar{v}_q), 0 \leq \lambda_q \leq 1\} = \\
&= \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = \sum_{q=1}^p (\lambda_q \underline{v}_q N_q + (1 - \lambda_q) \bar{v}_q N_q), 0 \leq \lambda_q \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Выражение $\sum_{q=1}^p (\lambda_q \underline{v}_q N_q + (1 - \lambda_q) \bar{v}_q N_q)$ представляет собой сумму отрезков в пространстве $\mathbb{R}^{n \times n}$, понимаемую в теоретико-множественном смысле. Покажем по индукции, что получаемое при этом множество матриц порядка n представимо в виде выпуклой комбинации конечного числа матриц того же порядка. Имеем для $p = 2$ (случай $p = 1$ очевиден):

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \underline{v}_1 N_1 + (1 - \lambda_1) \bar{v}_1 N_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 N_2 + (1 - \lambda_2) \bar{v}_2 N_2 = \\
&= (\lambda_2 + (1 - \lambda_2)) \lambda_1 \underline{v}_1 N_1 + (\lambda_2 + (1 - \lambda_2)) (1 - \lambda_1) \bar{v}_1 N_1 + \\
&+ (\lambda_1 + (1 - \lambda_1)) \lambda_2 \underline{v}_2 N_2 + (\lambda_1 + (1 - \lambda_1)) (1 - \lambda_2) \bar{v}_2 N_2 = \\
&= \lambda_1 \lambda_2 \underline{v}_1 N_1 + \lambda_1 (1 - \lambda_2) \underline{v}_1 N_1 + \lambda_2 (1 - \lambda_1) \bar{v}_1 N_1 + (1 - \lambda_1) (1 - \lambda_2) \bar{v}_1 N_1 + \\
&+ \lambda_1 \lambda_2 \underline{v}_2 N_2 + \lambda_2 (1 - \lambda_1) \underline{v}_2 N_2 + \lambda_1 (1 - \lambda_2) \bar{v}_2 N_2 + (1 - \lambda_1) (1 - \lambda_2) \bar{v}_2 N_2 = \\
&= \lambda_1 \lambda_2 (\underline{v}_1 N_1 + \underline{v}_2 N_2) + \lambda_1 (1 - \lambda_2) (\underline{v}_1 N_1 + \bar{v}_2 N_2) + \\
&+ \lambda_2 (1 - \lambda_1) (\bar{v}_1 N_1 + \underline{v}_2 N_2) + (1 - \lambda_1) (1 - \lambda_2) (\bar{v}_1 N_1 + \bar{v}_2 N_2) = \\
&= \tilde{\lambda}_1 ((\text{mid } \mathbf{v}_1 - \text{rad } \mathbf{v}_1) N_1 + (\text{mid } \mathbf{v}_2 - \text{rad } \mathbf{v}_2) N_2) + \\
&+ \tilde{\lambda}_2 ((\text{mid } \mathbf{v}_1 - \text{rad } \mathbf{v}_1) N_1 + (\text{mid } \mathbf{v}_2 + \text{rad } \mathbf{v}_2) N_2) + \\
&+ \tilde{\lambda}_3 ((\text{mid } \mathbf{v}_1 + \text{rad } \mathbf{v}_1) N_1 + (\text{mid } \mathbf{v}_2 - \text{rad } \mathbf{v}_2) N_2) + \\
&+ \tilde{\lambda}_4 ((\text{mid } \mathbf{v}_1 + \text{rad } \mathbf{v}_1) N_1 + (\text{mid } \mathbf{v}_2 + \text{rad } \mathbf{v}_2) N_2) = \\
&= \text{cch } \{G_z\},
\end{aligned}$$

где $\tilde{\lambda}_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\sum_{i=1}^4 \tilde{\lambda}_i = 1$. Далее, пусть $2 < p' < p$ и

$$\text{cch } \{Z_{p'}\} = \sum_{z \in Z_{p'}} \hat{\lambda}_z G_z = \sum_{q=1}^{p'} (\lambda_q \underline{v}_q N_q + (1 - \lambda_q) \bar{v}_q N_q), 0 \leq \lambda_q \leq 1, \hat{\lambda}_z \geq 0, \sum_{z \in Z_{p'}} \hat{\lambda}_z = 1.$$

Тогда, выполняя аналогичные действия, можно показать, что

$$\sum_{z \in Z_{p'}} \hat{\lambda}_z G_z + (\lambda_{p'+1} \underline{v}_{p'+1} N_{p'+1} + (1 - \lambda_{p'+1}) \bar{v}_{p'+1} N_{p'+1}) = \sum_{z \in Z_{p'+1}} \tilde{\lambda}_z G_z,$$

где $\tilde{\lambda}_z \geq 0$, $z \in Z_{p'+1}$, $\sum_{z \in Z_{p'+1}} \tilde{\lambda}_z = 1$. Из приведенных соотношений утверждение теоремы следует немедленно. Теорема доказана. \square

Заметим, что представление интервальной матрицы со связями \mathbf{A}^{dep} в виде выпуклой комбинации конечного числа точечных матриц может быть получено иным способом. Вводя в рассмотрение матрицы

$$C^{\text{vert}} = \text{Block Diag} \underbrace{\{c, c, \dots, c\}}_n, \quad c \in \text{vert } \mathbf{c},$$

где $\text{vert } \mathbf{c}$ — множество всех угловых векторов интервального вектора \mathbf{c} , имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{\text{dep}} &= \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = DC, \quad c \in \mathbf{c}\} = \\ &= \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = DC, \quad c \in \text{cch } \text{vert } \mathbf{c}\} = \\ &= \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = DC, \quad C \in \text{cch } \{C^{\text{vert}}\}\} = \\ &= \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \in \text{cch } \{DC^{\text{vert}}\}\} = \\ &= \text{cch } \{DC^{\text{vert}}\}. \end{aligned}$$

При этом

$$\text{cch } \{G_z\} = \text{cch } \{DC^{\text{vert}}\}$$

и

$$\{G_z\} \subseteq \{DC^{\text{vert}}\}.$$

Последнее соотношение показывает преимущества представления интервальной матрицы со связями \mathbf{A}^{dep} в виде выпуклой комбинации матриц G_z , поскольку

$$\text{card } \{G_z\} = 2^p \leq 2^m = \text{card } \{DC^{\text{vert}}\},$$

так как $p \leq m$.

3. Основной результат

В предыдущем разделе показано, что интервальная матрица со связями \mathbf{A}^{dep} представима в виде выпуклой оболочки $\mathbb{G} = \text{cch } \{G_z\}$ конечного числа точечных матриц (матрично-го политопа). Это позволяет свести задачу исследования свойств интервальной матрицы со связями \mathbf{A}^{dep} к задаче исследования свойств матричных политопов, в отношении которых и будут сформулированы дальнейшие результаты. По аналогии с интервальными матрицами со связями будем говорить, что матричный политоп положительно определен (асимптотически устойчив), если любая матрица, принадлежащая данному политопу, положительно определена (асимптотически устойчива). Некоторые подходы к исследованию устойчивости матричного политопа обсуждаются в работе [12], в которой приведены убедительные контрпримеры, показывающие, что для устойчивости матричного политопа недостаточно устойчивости его ребер, равно как и не является необходимой устойчивостью

выпуклой оболочки множества характеристических полиномов, соответствующих всевозможным матрицам исследуемого политопа.

Для того чтобы сформулировать основной результат данного раздела, приведем известное определение из теории выпуклых многогранников [13] применительно к рассматриваемому случаю.

Определение 4. Множество матриц $\{G_z\}$ называется выпукло-независимым, если ни одна из этих матриц $G_{z'}$ не представима в виде выпуклой комбинации остальных, т. е.

$$\forall z' \in Z_p : G_{z'} \neq \sum_{z \in Z_p, z \neq z'} \lambda_z G_z, \text{ где } \lambda_z \geq 0, z \in Z_p \setminus \{z'\}, \sum_{z \in Z_p, z \neq z'} \lambda_z = 1.$$

Теорема 2. Для положительной определенности матричного политопа \mathbb{G} достаточно, а в случае выпуклой независимости матриц G_z и необходимо, чтобы все матрицы G_z были положительно определены.

Доказательство. Необходимость очевидна, поэтому докажем достаточность. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, тогда для произвольной матрицы $G \in \mathbb{G}$ квадратичная форма имеет вид

$$x^T G x = x^T \left(\sum_{z \in Z_p} \lambda_z G_z \right) x = \sum_{z \in Z_p} \lambda_z x^T G_z x \geq 0, \lambda_z \geq 0, z \in Z_p, \sum_{z \in Z_p} \lambda_z = 1,$$

поскольку $x^T G_z x \geq 0$ для любого $z \in Z_p$. Теорема доказана. \square

Нетрудно проверить, что данная теорема остается верной и для случая отрицательной определенности матричного политопа. К сожалению, аналогичное утверждение в отношении асимптотической устойчивости матричного политопа в общем случае остается неверным. И тем не менее можно выделить частный случай матричного политопа, когда такое утверждение будет справедливым.

Теорема 3. Пусть $G_z = G_z^T$ для любого $z \in Z_p$. Тогда для асимптотической устойчивости матричного политопа \mathbb{G} достаточно, а в случае выпуклой независимости матриц G_z и необходимо, чтобы все матрицы G_z были асимптотически устойчивы.

Доказательство. Необходимость очевидна. Для того чтобы доказать достаточность, заметим, что любая матрица $G \in \mathbb{G}$ симметрическая, т. е. $G = G^T$, поскольку

$$G^T = \left(\sum_{z \in Z_p} \lambda_z G_z \right)^T = \sum_{z \in Z_p} \lambda_z G_z^T = \sum_{z \in Z_p} \lambda_z G_z = G, \lambda_z \geq 0, z \in Z_p, \sum_{z \in Z_p} \lambda_z = 1.$$

По теореме 2 матрица G является отрицательно-определенной в силу симметричности и асимптотической устойчивости матриц G_z . С учетом симметричности матрицы G заключаем, что собственные значения матрицы G вещественны и строго отрицательны. Следовательно, матрица G асимптотически устойчива. Теорема доказана. \square

Условия асимптотической устойчивости матричного политопа в общем случае дает следующая теорема.

Теорема 4. Пусть существует симметрическая положительно-определенная матрица $H = H^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ такая, что матрицы $G_z^T H + H G_z$ для любого $z \in Z_p$ асимптотически устойчивы, тогда матричный политоп \mathbb{G} асимптотически устойчив.

Доказательство. Асимптотически устойчивые матрицы $G_z^T H + H G_z$ являются симметрическими и, следовательно, отрицательно-определенными. По теореме 3 матричный полином

$$\text{sch} \{G_z^T H + H G_z\} \quad (8)$$

является отрицательно-определенным. Из построения $\text{sch} \{G_z^T H + H G_z\}$ имеем

$$\begin{aligned} \text{sch} \{G_z^T H + H G_z\} &= \\ &= \{G_H \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid G_H = \sum_{z \in Z_p} \lambda_z (G_z^T H + H G_z), \lambda_z \geq 0, z \in Z_p, \sum_{z \in Z_p} \lambda_z = 1\} = \\ &= \{G_H \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid G_H = (\sum_{z \in Z_p} \lambda_z G_z)^T H + H \sum_{z \in Z_p} \lambda_z G_z, \lambda_z \geq 0, z \in Z_p, \sum_{z \in Z_p} \lambda_z = 1\} = \\ &= \{G_H \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid G_H = G^T H + H G, G \in \mathbb{G}\}. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения заключаем, что для произвольной матрицы $G \in \mathbb{G}$ матрица $G_H = G^T H + H G$ отрицательно определена в силу отрицательной определенности (8). Следовательно, матрица $G \in \mathbb{G}$ асимптотически устойчива. Теорема доказана. \square

4. Пример

В качестве примера рассмотрим систему автоматической подстройки частоты гетеродинного приемника, математическая модель которой имеет вид [14]:

$$\begin{cases} \frac{dU_d}{dt} = -\frac{1}{T_d} U_d - \frac{K_d}{T_y} \omega_r + \frac{K_d}{T_y} \omega_{\text{сигн}}, \\ \frac{dU_y}{dt} = -\frac{1}{T_d} U_y + \frac{1}{T_d} U_d, \\ \frac{d\omega_r}{dt} = -\frac{1}{T_r} \omega_r + \frac{K_r}{T_r} U_y \end{cases}$$

или в векторно-матричной форме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U_d \\ U_y \\ \omega_r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_y} & 0 & -\frac{K_d}{T_y} \\ \frac{1}{T_d} & -\frac{1}{T_d} & 0 \\ 0 & \frac{K_r}{T_r} & -\frac{1}{T_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_d \\ U_y \\ \omega_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{K_d}{T_y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \omega_{\text{сигн}}, \\ \omega_r &= (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} U_d \\ U_y \\ \omega_r \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где U_d, U_y — напряжение на выходе дискриминатора и на выходе усилителя напряжения соответственно; $\omega_{\text{сигн}}$ и ω_r — угловая частота сигнала и на выходе гетеродина соответственно; T_y, T_d и T_r — постоянные времени усилителя промежуточной частоты, усилителя напряжения и гетеродина; K_d и K_r — коэффициенты передачи дискриминатора и гетеродина.

Элементы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_y} & 0 & -\frac{K_d}{T_y} \\ \frac{1}{T_d} & -\frac{1}{T_d} & 0 \\ 0 & \frac{K_r}{T_r} & -\frac{1}{T_r} \end{pmatrix}$$

системы имеют сложную зависимость от ее конструктивных параметров. Рассмотрим случай, когда постоянные времени T_y , T_d и T_r заданы интервально, т. е. $T_y \in \mathbf{T}_y = [\underline{T}_y, \overline{T}_y]$, $T_d \in \mathbf{T}_d = [\underline{T}_d, \overline{T}_d]$ и $T_r \in \mathbf{T}_r = [\underline{T}_r, \overline{T}_r]$, а остальные параметры известны точно. Тогда $n = m = 3$,

$$\mathbf{c}^T = (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3) = \left(\begin{bmatrix} \overline{T}_y^{-1} & \underline{T}_y^{-1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \overline{T}_d^{-1} & \underline{T}_d^{-1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \overline{T}_r^{-1} & \underline{T}_r^{-1} \end{bmatrix} \right),$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -K_d \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_r & -1 \end{pmatrix}.$$

Далее, $p = m$ и

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \right\}.$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} \{G_z\} &= \left\{ \overline{T}_y^{-1} D_1 + \overline{T}_d^{-1} D_2 + \overline{T}_r^{-1} D_3, \underline{T}_y^{-1} D_1 + \overline{T}_d^{-1} D_2 + \overline{T}_r^{-1} D_3, \right. \\ &\quad \overline{T}_y^{-1} D_1 + \underline{T}_d^{-1} D_2 + \overline{T}_r^{-1} D_3, \underline{T}_y^{-1} D_1 + \underline{T}_d^{-1} D_2 + \overline{T}_r^{-1} D_3, \\ &\quad \overline{T}_y^{-1} D_1 + \overline{T}_d^{-1} D_2 + \underline{T}_r^{-1} D_3, \underline{T}_y^{-1} D_1 + \overline{T}_d^{-1} D_2 + \underline{T}_r^{-1} D_3, \\ &\quad \left. \overline{T}_y^{-1} D_1 + \underline{T}_d^{-1} D_2 + \underline{T}_r^{-1} D_3, \underline{T}_y^{-1} D_1 + \underline{T}_d^{-1} D_2 + \underline{T}_r^{-1} D_3 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -\overline{T}_y^{-1} & 0 & -K_d \overline{T}_y^{-1} \\ \overline{T}_d^{-1} & -\overline{T}_d^{-1} & 0 \\ 0 & K_r \overline{T}_r^{-1} & -\overline{T}_r^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\underline{T}_y^{-1} & 0 & -K_d \underline{T}_y^{-1} \\ \overline{T}_d^{-1} & -\overline{T}_d^{-1} & 0 \\ 0 & K_r \overline{T}_r^{-1} & -\overline{T}_r^{-1} \end{pmatrix}, \right. \\ &\quad \begin{pmatrix} -\overline{T}_y^{-1} & 0 & -K_d \overline{T}_y^{-1} \\ \underline{T}_d^{-1} & -\underline{T}_d^{-1} & 0 \\ 0 & K_r \overline{T}_r^{-1} & -\overline{T}_r^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\underline{T}_y^{-1} & 0 & -K_d \underline{T}_y^{-1} \\ \overline{T}_d^{-1} & -\overline{T}_d^{-1} & 0 \\ 0 & K_r \overline{T}_r^{-1} & -\overline{T}_r^{-1} \end{pmatrix}, \\ &\quad \begin{pmatrix} -\overline{T}_y^{-1} & 0 & -K_d \overline{T}_y^{-1} \\ \overline{T}_d^{-1} & -\overline{T}_d^{-1} & 0 \\ 0 & K_r \underline{T}_r^{-1} & -\underline{T}_r^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\underline{T}_y^{-1} & 0 & -K_d \underline{T}_y^{-1} \\ \overline{T}_d^{-1} & -\overline{T}_d^{-1} & 0 \\ 0 & K_r \underline{T}_r^{-1} & -\underline{T}_r^{-1} \end{pmatrix}, \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} -\overline{T}_y^{-1} & 0 & -K_d \overline{T}_y^{-1} \\ \underline{T}_d^{-1} & -\underline{T}_d^{-1} & 0 \\ 0 & K_r \overline{T}_r^{-1} & -\overline{T}_r^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\underline{T}_y^{-1} & 0 & -K_d \underline{T}_y^{-1} \\ \overline{T}_d^{-1} & -\overline{T}_d^{-1} & 0 \\ 0 & K_r \overline{T}_r^{-1} & -\overline{T}_r^{-1} \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Для сравнения

$$\{C^{\text{vert}}\} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccccccccc} \bar{T}_y^{-1} & \bar{T}_d^{-1} & \bar{T}_r^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{T}_y^{-1} & \bar{T}_d^{-1} & \bar{T}_r^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{T}_y^{-1} & \bar{T}_d^{-1} & \bar{T}_r^{-1} \end{array} \right)^T, \\ \left(\begin{array}{ccccccccc} \underline{T}_y^{-1} & \bar{T}_d^{-1} & \bar{T}_r^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{T}_y^{-1} & \bar{T}_d^{-1} & \bar{T}_r^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{T}_y^{-1} & \bar{T}_d^{-1} & \bar{T}_r^{-1} \end{array} \right)^T, \\ \left(\begin{array}{ccccccccc} \bar{T}_y^{-1} & \underline{T}_d^{-1} & \bar{T}_r^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{T}_y^{-1} & \underline{T}_d^{-1} & \bar{T}_r^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{T}_y^{-1} & \underline{T}_d^{-1} & \bar{T}_r^{-1} \end{array} \right)^T, \\ \left(\begin{array}{ccccccccc} \underline{T}_y^{-1} & \underline{T}_d^{-1} & \bar{T}_r^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{T}_y^{-1} & \underline{T}_d^{-1} & \bar{T}_r^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{T}_y^{-1} & \underline{T}_d^{-1} & \bar{T}_r^{-1} \end{array} \right)^T, \\ \left(\begin{array}{ccccccccc} \bar{T}_y^{-1} & \bar{T}_d^{-1} & \underline{T}_r^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{T}_y^{-1} & \bar{T}_d^{-1} & \underline{T}_r^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{T}_y^{-1} & \bar{T}_d^{-1} & \underline{T}_r^{-1} \end{array} \right)^T, \\ \left(\begin{array}{ccccccccc} \underline{T}_y^{-1} & \bar{T}_d^{-1} & \underline{T}_r^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{T}_y^{-1} & \bar{T}_d^{-1} & \underline{T}_r^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{T}_y^{-1} & \bar{T}_d^{-1} & \underline{T}_r^{-1} \end{array} \right)^T, \\ \left(\begin{array}{ccccccccc} \bar{T}_y^{-1} & \underline{T}_d^{-1} & \underline{T}_r^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{T}_y^{-1} & \underline{T}_d^{-1} & \underline{T}_r^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{T}_y^{-1} & \underline{T}_d^{-1} & \underline{T}_r^{-1} \end{array} \right)^T, \\ \left(\begin{array}{ccccccccc} \underline{T}_y^{-1} & \underline{T}_d^{-1} & \underline{T}_r^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{T}_y^{-1} & \underline{T}_d^{-1} & \underline{T}_r^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{T}_y^{-1} & \underline{T}_d^{-1} & \underline{T}_r^{-1} \end{array} \right)^T \end{array} \right\},$$

$$\begin{aligned} d_{11}^T &= (-1 \ 0 \ 0), \quad d_{13}^T = (-K_d \ 0 \ 0), \quad d_{21}^T = (0 \ 1 \ 0), \quad d_{22}^T = (0 \ -1 \ 0), \\ d_{32}^T &= (0 \ 0 \ K_r), \quad d_{33}^T = (0 \ 0 \ -1), \quad d_{12}^T = d_{23}^T = d_{31}^T = (0 \ 0 \ 0). \end{aligned}$$

И, наконец, имеем

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_d & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_r & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$D\{C^{\text{vert}}\} = \{DC^{\text{vert}}\} = \{G_z\}.$$

Исследуем асимптотическую устойчивость рассматриваемой системы для следующих численных значений:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_y &= [0.0032, 0.004] \text{ с}; \quad \mathbf{T}_d = [0.0016, 0.002] \text{ с}; \quad \mathbf{T}_r = [0.0008, 0.001] \text{ с}; \\ K_d &= 2 \text{ В} \cdot \text{с/рад}; \quad K_r = 3 \text{ В} \cdot \text{с/рад}. \end{aligned}$$

Тогда

$$T_y^{-1} \in [250, 312.5], \quad T_d^{-1} \in [500, 625], \quad T_r^{-1} \in [1000, 1250].$$

Множество матриц G_z для указанных численных значений имеет вид

$$\begin{aligned} \{G_z\} &= \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -250 & 0 & -500 \\ 625 & -625 & 0 \\ 0 & 3000 & -1000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -312.5 & 0 & -625 \\ 625 & -625 & 0 \\ 0 & 3000 & -1000 \end{pmatrix}, \right. \\ &\quad \begin{pmatrix} -250 & 0 & -500 \\ 500 & -500 & 0 \\ 0 & 3000 & -1000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -312.5 & 0 & -625 \\ 500 & -500 & 0 \\ 0 & 3000 & -1000 \end{pmatrix}, \\ &\quad \begin{pmatrix} -250 & 0 & -500 \\ 625 & -625 & 0 \\ 0 & 3750 & -1250 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -312.5 & 0 & -625 \\ 625 & -625 & 0 \\ 0 & 3750 & -1250 \end{pmatrix}, \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} -250 & 0 & -500 \\ 500 & -500 & 0 \\ 0 & 3750 & -1250 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -312.5 & 0 & -625 \\ 500 & -500 & 0 \\ 0 & 3750 & -1250 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Для исследования асимптотической устойчивости системы автоматической подстройки частоты гетеродинного приемника применим теорему 4, где в качестве матрицы H выберем решение матричного уравнения Ляпунова

$$G_m^T H + H G_m = -Q, \quad (9)$$

где Q — некоторая положительно-определенная симметрическая матрица; G_m — геометрический центр матричного политопа, который вычисляется по формуле

$$G_m = \frac{1}{\text{card} \{G_z\}} \sum_{z \in Z_p} G_z.$$

Для рассматриваемого примера имеем

$$G_m = \begin{pmatrix} -281.25 & 0 & -562.5 \\ 562.5 & -562.5 & 0 \\ 0 & 3375 & -1125 \end{pmatrix}.$$

Для числовой матрицы

$$Q = \begin{pmatrix} 20 & -4 & -4 \\ -4 & 50 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

(главные диагональные миноры равны соответственно $\Delta_1 = 20 > 0$, $\Delta_2 = 984 > 0$, $\Delta_3 = 5640 > 0$) решение уравнения (9) имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} 0.07009524 & 0.01726984 & -0.02260317 \\ 0.01726984 & 0.16863492 & 0.02069841 \\ -0.02260317 & 0.02069841 & 0.01441270 \end{pmatrix}$$

и является симметрической положительно-определенной матрицей (главные диагональные миноры равны соответственно $\Delta_1 = 0.07009524 > 0$, $\Delta_2 = 0.01152226 > 0$, $\Delta_3 = 0.00003372 > 0$).

Для найденной числовой матрицы H множество матриц $G_z^T H + H G_z$ имеет вид

$$\{G_z^T H + H G_z\} = \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} -13.46031746 & 22.47619048 & 6.14285714 \\ 22.47619048 & -86.60317460 & 0.96825397 \\ 6.14285714 & 0.96825397 & -6.22222222 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -22.22222222 & 21.39682540 & -1.20634921 \\ 21.39682540 & -86.60317460 & -1.19047619 \\ -1.20634921 & -1.19047619 & -0.57142857 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -17.77777778 & 3.55555556 & 3.55555556 \\ 3.55555556 & -44.44444444 & 3.55555556 \\ 3.55555556 & 3.55555556 & -6.22222222 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -26.53968254 & 2.47619048 & -3.79365079 \\ 2.47619048 & -44.44444444 & 1.39682540 \\ -3.79365079 & 1.39682540 & -0.57142857 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -13.46031746 & 5.52380952 & 11.79365079 \\ 5.52380952 & -55.55555556 & 6.60317460 \\ 11.79365079 & 6.60317460 & -13.42857143 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -22.22222222 & 4.44444444 & 4.44444444 \\ 4.44444444 & -55.55555556 & 4.44444444 \\ 4.44444444 & 4.44444444 & -7.77777778 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -17.77777778 & -13.39682540 & 9.20634921 \\ -13.39682540 & -13.39682540 & 9.19047619 \\ 9.20634921 & 9.19047619 & -13.42857143 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -26.53968254 & -14.47619048 & 1.85714286 \\ -14.47619048 & -13.39682540 & 7.03174603 \\ 1.85714286 & 7.03174603 & -7.77777778 \end{pmatrix} \end{array} \right\}.$$

Все матрицы множества $\{G_z^T H + H G_z\}$ являются асимптотически устойчивыми, их

собственные числа соответственно равны

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= -92.9641653 & \lambda_2 &= -12.8511248 & \lambda_3 &= -0.4704241 \\
 \lambda_1 &= -93.0724164 & \lambda_2 &= -15.9062018 & \lambda_3 &= -0.4182073 \\
 \lambda_1 &= -45.1550120 & \lambda_2 &= -18.5639641 & \lambda_3 &= -4.7254683 \\
 \lambda_1 &= -44.8628846 & \lambda_2 &= -26.6882061 & \lambda_3 &= -0.0044649 \\
 \lambda_1 &= -56.9046334 & \lambda_2 &= -25.2209562 & \lambda_3 &= -0.3188549 \\
 \lambda_1 &= -56.4437650 & \lambda_2 &= -23.2049551 & \lambda_3 &= -5.9068354 \\
 \lambda_1 &= -36.4693516 & \lambda_2 &= -6.3197987 & \lambda_3 &= -1.8140244 \\
 \lambda_1 &= -36.8824086 & \lambda_2 &= -10.4287075 & \lambda_3 &= -0.4031696 .
 \end{aligned}$$

По теореме 4 заключаем, что система автоматической подстройки частоты гетеродинного приемника асимптотически устойчива.

Рассмотрим интервальную оболочку матричного политопа: \mathbb{G}

$$\mathbf{A} = DC,$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \overline{T}_y^{-1}, \underline{T}_y^{-1} \\ \overline{T}_d^{-1}, \underline{T}_d^{-1} \\ \overline{T}_r^{-1}, \underline{T}_r^{-1} \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \overline{T}_y^{-1}, \underline{T}_y^{-1} \\ \overline{T}_d^{-1}, \underline{T}_d^{-1} \\ \overline{T}_r^{-1}, \underline{T}_r^{-1} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} \overline{T}_y^{-1}, \underline{T}_y^{-1} \\ \overline{T}_d^{-1}, \underline{T}_d^{-1} \\ \overline{T}_r^{-1}, \underline{T}_r^{-1} \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполняя интервальные арифметические операции, получим

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-312.5, -250] & 0 & [-625, -500] \\ [500, 625] & [-625, -500] & 0 \\ 0 & [3000, 3750] & [-1250, -1000] \end{pmatrix}.$$

При этом матрица

$$A' = \begin{pmatrix} -250 & 0 & -625 \\ 625 & -500 & 0 \\ 0 & 3750 & -1000 \end{pmatrix} \in \mathbf{A}, \quad A' \notin \mathbf{A}^{\text{dep}}$$

имеет собственные числа, равные

$$\lambda_1 = -1764.6883713, \quad \lambda_{2,3} = 7.34418565 \pm j949.139853202, \quad j = \sqrt{-1},$$

т. е. матрица A' неустойчива!

Список литературы

- [1] ROHN J. An algorithm for checking stability of symmetric interval matrices // IEEE Trans. Automat. Contr. 1996. Vol. XX, N V. P. 1–4.
- [2] HEINEN J.A. Sufficient conditions for stability of interval matrices // Intern. J. Contr. 1984. Vol. 39, N 6. P. 1323–1328.
- [3] WANG K., MICHEL A. On sufficient conditions for the stability of interval matrices // Syst. Control Lett. 1993. Vol. 20. P. 345–351.
- [4] KREINOVICH V., LAKEYEV A., ROHN J., KAHL P. Computational Complexity and Feasibility of Data Processing and Interval Computations. Dordrecht: Kluwer, 1997.
- [5] ALEFELD G., KREINOVICH V., MAYER G. Symmetric linear systems with perturbed input data // Numer. Methods and Error Bounds. Berlin: Akad. Verlag, 1996. P. 16–22.
- [6] ALEFELD G., KREINOVICH V., MAYER G. The shape of the symmetric solution set // Appl. of Interval Computations Kearfott. Dordrecht: Kluwer, 1996. P. 61–79.
- [7] ALEFELD G., KREINOVICH V., MAYER G. On the shape of symmetric, persymmetric and skew-symmetric solution set // Mat. Nachrichten. 1998. Bd. 192. P. 23–36.
- [8] JANSSON C. Interval linear systems with symmetric matrices, skew-symmetric matrices and dependencies in the right hand side // Computing. 1991. Vol. 46. P. 265–274.
- [9] ШАРЫЙ С.П. Метод дробления параметров для интервальных линейных систем со связями // Перспективы систем информатики: Мат. Междунар. сов. по интервальной математике и методам распространения ограничений. Новосибирск, 2003. С. 1–12.
- [10] АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦБЕРГЕР Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.
- [11] NEUMAIER A. Interval Methods for Systems of Equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
- [12] BARMISH B. ROSS, FU M., SALEN S. Stability of a polytope of matrices: counterexamples // IEEE Trans. Autom. Contr. 1988. Vol. 33, N 6. P. 569–572.
- [13] БРЕНСТЕД А. Введение в теорию выпуклых многогранников: Пер. с англ. М.: Мир, 1988.
- [14] АФАНАСЬЕВ В.Н., КОЛМАНОВСКИЙ В.Б., НОСОВ В.Р. Математическая теория конструирования систем управления: Учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 1989.

*Поступила в редакцию 25 апреля 2003 г.,
в переработанном виде — 16 июля 2003 г.*