

# ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ И КРУПНОМАСШТАБНАЯ ЗАВИХРЕННОСТЬ В МОДЕЛИРОВАНИИ БОЛЬШИМИ ВИХРЯМИ

А. М. БАЛОНИШНИКОВ

*Санкт-Петербургский государственный инженерно-экономический  
университет, Россия*

e-mail: balonalex@yahoo.co.uk, balonale@engec.ru

The new parametrization of turbulent viscosity coefficient taking into account the large-scale vorticity for turbulent flow incompressible liquid is offered. This parametrization has only one empirical coefficient as well-known Smagorinsky parametrization. The model qualitatively agrees with other multiparameter models, which give a decrease of turbulent viscosity coefficient in the presence of large-scale vorticity.

## Введение

Подсеточное моделирование было введено как попытка преодолеть трудности прямого численного моделирования развитой турбулентности на основе исходных уравнений Навье — Стокса, поскольку современным компьютерам не хватает быстродействия для расчета динамики вихрей [1]. В подсеточных моделях выбирают некоторый масштаб  $h$  (шаг разностной сетки по пространству) и рассматривают вихри, диаметр которых превосходит  $h$ . Из-за нелинейности уравнений Навье — Стокса, описывающих движение несжимаемой жидкости, возникают существенные трудности. В уравнения, описывающие крупные вихри, входят подсеточные напряжения Рейнольдса, которые определяются скоростями мелкомасштабных вихрей, чей диаметр меньше  $h$ . Подсеточные напряжения Рейнольдса зависят от масштаба  $h$  и градиентов (и/или более высоких производных) скоростей больших вихрей и описывают переход энергии от крупных вихрей к более мелким с последующим переходом в тепло. Масштаб  $h$  не должен превышать диаметра энергосодержащих вихрей [2].

В идеальном случае выражение для подсеточных напряжений Рейнольдса желательно выводить аналитически из уравнений для скоростей мелкомасштабных вихрей с последующим осреднением произведения компонент мелкомасштабной скорости, которое определяет напряжения Рейнольдса по объему кубической ячейки с длиной ребра  $h$ . В этом случае подсеточное моделирование было бы свободно от эмпирических констант и такую модель можно было бы применять для всех типов течений, включая внутренние течения, свободную турбулентность, ламинарно-турбулентный переход. К настоящему моменту исследователи далеки от решения этой задачи. Различные подходы к подсеточному моделированию отражены, например, в работе [3].

Простейшей и наиболее используемой параметризацией является следующее выражение Смагоринского для подсеточного коэффициента турбулентной вязкости [4],  $\nu_t = ch^2 S$ , величина которого определяет напряжения Рейнольдса, где  $c$  — некоторая константа;  $h$  — шаг разностной сетки по пространству при дискретизации уравнений гидродинамики;  $S$  — инвариант тензора деформации крупномасштабной скорости. Величина  $S$  вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ji}}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i U_j + \partial_j U_i),$$

где  $U_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — компонента крупномасштабной скорости. В действительности коэффициент турбулентной вязкости может зависеть и от антисимметричной части  $\Omega_{ij} = 1/2(\partial_i U_j - \partial_j U_i)$  тензора градиента скорости. Имеется простая связь этой антисимметричной части с завихренностью крупномасштабного движения  $\Omega_i : (\Omega = \text{rot } \mathbf{U}) : \Omega_i = 2\varepsilon_{ijk}\Omega_{jk}$ , где  $\varepsilon_{ijk}$  — тензор Леви-Чевитта. В работе [5] показано, что для несжимаемой жидкости имеются всего пять независимых инвариантов симметричной и антисимметричной частей тензора градиента деформации крупномасштабной скорости:  $Tr\{\mathbf{S}^2\}$ ,  $Tr\{\Omega^2\}$ ,  $Tr\{\mathbf{S}^3\}$ ,  $Tr\{\Omega^2\mathbf{S}\}$ ,  $Tr\{\Omega^2\mathbf{S}^2\}$ , где  $Tr$  — след матрицы. Получить зависимость коэффициента турбулентной вязкости от этих пяти инвариантов эмпирическим путем весьма затруднительно [6]. Зная коэффициент турбулентной вязкости как функцию производных крупномасштабной скорости, можно определить подсеточные напряжения Рейнольдса и тем самым получить замкнутое описание динамики крупномасштабных вихрей.

## 1. Вывод выражения для коэффициента подсеточной турбулентной вязкости

Покажем, что согласно максимально упрощенной теории устойчивости имеется единый основной инвариант, который и должен определять подсеточный коэффициент турбулентной вязкости.

Предположим, что крупномасштабную скорость и ее тензор градиента можно считать постоянными при рассмотрении динамики мелкомасштабной компоненты скорости [7], т.е. откажемся от широко используемого предположения Праудмена — Бэтчелора [8] о линейности крупномасштабной или средней скорости (что дает вклад в спектр скорости мелкомасштабных вихрей). Тогда уравнение для Фурье-компонент мелкомасштабной скорости будет иметь следующий вид [9]:

$$(\partial_t + \nu k^2)u_\alpha(\mathbf{k}, t) = -\frac{i}{2}P_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}) \sum_p u_\beta(\mathbf{p}, t)u_\gamma(\mathbf{k} - \mathbf{p}, t) + P_{\alpha\beta}\partial_m U_\beta u_m(\mathbf{k}, t), \quad (1)$$

где  $P_{ij} = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ ,  $P_{\alpha\beta\gamma} = k_\beta P_{\alpha\gamma} + k_\gamma P_{\alpha\beta}$ ; индексы в этих формулах пробегают значения 1, 2, 3 (здесь и всюду по тексту по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Если жидкость или газ для простоты считать несжимаемыми ( $k_i u_i = 0$ ), то уравнение (1) можно трансформировать к двум независимым компонентам мелкомасштабной скорости, направленным вдоль единичных векторов  $\varepsilon_j^1$  и  $\varepsilon_j^2$  ( $j = 1, 2, 3$ ), ортогональных вектору  $\mathbf{k}$ , как это было сделано для изотропной турбулентности в отсутствие градиентов крупномасштабной скорости  $d\mathbf{U}$  [10]:

$$(\partial_t + \nu k^2)u^\gamma(\mathbf{k}, t) = a^{\gamma\mu}u^\mu + \sum_{p, q, p+q=k} \Phi^{\gamma\alpha\beta}u^\alpha(\mathbf{p}, t)u^\beta(\mathbf{q}, t), \quad (2)$$

где  $a^{\gamma\mu} = \varepsilon_j^\gamma \varepsilon_m^\mu \partial_m U_j$ ;  $\Phi^{\gamma\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = -ik_m \varepsilon_j^\gamma(\mathbf{k}) \varepsilon_j^\alpha(\mathbf{p}) \varepsilon_m^\beta(\mathbf{q})$ , верхние индексы пробегают значения 1, 2, а нижние — 1, 2, 3. Входящие в эти формулы векторы имеют следующие декартовы компоненты, выраженные через углы Эйлера [10]:

$$\mathbf{k} = (k \cos \theta \cos \eta, k \sin \theta \cos \eta, k \sin \eta),$$

где  $\cos \theta = k_1/k''$ ,  $\sin \theta = k_2/k''$ ,  $\cos \eta = k''/k$ ,  $\sin \eta = k_3/k$ ,  $k'' = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ . Если выбрать единичный вектор  $\mathbf{e} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ , то единичный вектор  $\varepsilon^1(\mathbf{k})$  определится соотношением

$$\varepsilon^1 = \mathbf{e} \times \mathbf{k} / |\mathbf{e} \times \mathbf{k}|$$

или  $\varepsilon^1 = (\sin \theta, -\cos \theta, 0)$ , а единичный вектор  $\varepsilon_2(\mathbf{k})$  — соотношением  $\varepsilon^2 = \mathbf{k} \times \varepsilon^1(\mathbf{k}) / |\mathbf{k} \times \varepsilon^1|$  или

$$\varepsilon^2 = (\cos \theta \sin \eta, \sin \theta \sin \eta, -\cos \eta).$$

При инверсии вектора  $\mathbf{k}$  справедливы соотношения  $\varepsilon^1(k) = -\varepsilon^1(-k)$ ,  $\varepsilon^2(k) = \varepsilon^2(-k)$ . Верно соотношение  $\varepsilon^1 \times \varepsilon^2 = \mathbf{k}/k$ . Связь обычных Фурье-компонент мелкомасштабной скорости с ее поляризационными компонентами выражается соотношением

$$u_i(\mathbf{k}, t) = \varepsilon_i^\mu(\mathbf{k}) u^\mu(\mathbf{k}, t), \quad (3)$$

причем

$$\mathbf{k} \cdot \varepsilon^\mu = 0, \quad \varepsilon^\mu(\mathbf{k}) \cdot \varepsilon^\lambda(\mathbf{k}) = \delta_{\mu\lambda}, \quad \varepsilon_i^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_j^\mu(\mathbf{k}) = P_{ij}(\mathbf{k}). \quad (4)$$

С помощью замены переменных  $\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{v}$ , где матрица  $\mathbf{B}$  составлена из собственных векторов матрицы  $\mathbf{A} = \{a^{\alpha\beta}\}$ , можно привести матрицу  $\mathbf{A}$  к диагональной форме (в общем случае к жордановой матрице) [11], а само уравнение для поляризационных компонент мелкомасштабной скорости примет вид

$$(\partial_t + \nu k^2) v^\lambda = J^{\lambda\mu} v^\mu + (B^{-1})^{\lambda\gamma} \sum \Phi^{\gamma\alpha\beta} (Bv)^\alpha (Bv)^\beta, \quad (5)$$

где  $J^{\lambda\mu}$  — элемент диагональной матрицы, на диагонали которой стоят собственные числа матрицы  $\mathbf{A}$  —  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , определяющиеся как

$$\lambda_{1,2} = \frac{P}{2} \pm \sqrt{\frac{P^2}{4} - Q}, \quad (6)$$

где  $P = \varepsilon_j^1 \varepsilon_m^1 \partial_m U_j + \varepsilon_j^2 \varepsilon_m^2 \partial_m U_j$ ;

$$Q = (\varepsilon_j^1 \varepsilon_m^1 \partial_m U_j)(\varepsilon_l^2 \varepsilon_p^2 \partial_p U_l) - (\varepsilon_j^1 \varepsilon_m^2 \partial_m U_j)(\varepsilon_l^2 \varepsilon_j^1 \partial_j U_l).$$

Если разложить  $\mathbf{dU}$  на симметричную и антисимметричную части  $\partial_m U_j = S_{jm} + \Omega_{jm}$  и ввести единичный вектор  $\mathbf{n}$  с компонентами  $n_i = k_i/k$ , то, используя свойства векторов  $\varepsilon^\lambda$  и условие несжимаемости, можно выражения для  $P$  и  $Q$  упростить:

$$P = -n_i n_j S_{ij}, \quad (7)$$

$$Q = (\varepsilon_j^1 \varepsilon_m^1 S_{mj})(\varepsilon_l^2 \varepsilon_p^2 S_{lp}) - (\varepsilon_j^1 \varepsilon_m^2 S_{mj})^2 + \frac{1}{4}(\mathbf{n} \cdot \Omega)^2. \quad (8)$$

Покажем, что в действительности величина  $Q$  определяется непосредственно ориентацией вектора  $\mathbf{k}$  (или единичным вектором  $\mathbf{n}$ ), за исключением вспомогательных векторов  $\varepsilon^\lambda$ :

$$Q = (\varepsilon_m^1 \varepsilon_l^2 - \varepsilon_l^1 \varepsilon_m^2) \varepsilon_j^1 \varepsilon_p^2 S_{mj} S_{lp} + \frac{1}{4}(\mathbf{n} \cdot \Omega)^2.$$

Введем антисимметричный тензор  $\tau_{ml} = \varepsilon_m^1 \varepsilon_l^2 - \varepsilon_l^1 \varepsilon_m^2$ . Выписав члены в  $Q$ , отличные от 0 с  $m \neq l$ , после очевидных преобразований получим

$$Q = (\tau_{12}S_{1j}S_{2p} + \tau_{13}S_{1j}S_{3p} + \tau_{23}S_{2j}S_{3p})\tau_{jp} + \frac{1}{4}(\mathbf{n} \cdot \Omega)^2.$$

Нетрудно убедиться в том, что  $\tau_{12} = n_3$ ,  $\tau_{23} = n_1$ ,  $\tau_{13} = -n_2$ . Поэтому

$$Q = n_3^2(S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}) + n_2^2(S_{11}S_{33} - S_{13}S_{31}) + n_1^2(S_{22}S_{33} - S_{23}S_{32}) + 2n_1n_2(S_{23}S_{13} - S_{12}S_{33}) + 2n_1n_3(S_{12}S_{23} - S_{22}S_{13}) + 2n_2n_3(S_{12}S_{13} - S_{11}S_{23}) + \frac{1}{4}(\mathbf{n} \cdot \Omega)^2. \quad (9)$$

В инвариантном виде  $Q = -1/2Tr[(\mathbf{n} \times \mathbf{S})^2] + 1/4(\mathbf{n} \cdot \Omega)^2$ , где  $Tr[(\mathbf{n} \times \mathbf{S})^2] = \varepsilon_{ijk}n_j S_{kp} \varepsilon_{pab}n_a S_{bi}$ . Окончательно собственные числа матрицы линеаризованных уравнений для мелкомащтабной скорости (без вязких членов) получаются следующим образом:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}Tr(\mathbf{CS}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}[Tr(\mathbf{CS})]^2 + \frac{1}{2}Tr[(\mathbf{n} \times \mathbf{S})^2] - \frac{1}{4}(\mathbf{n} \cdot \Omega)^2}, \quad (10)$$

учтем, что  $C_{ij} = n_i n_j$ .

Согласно принципу подчинения Хакена [12], неустойчивые моды подчиняют себе устойчивые. Если имеется набор неустойчивых мод, подчиняющихся одному и тому же уравнению, то следует ожидать, что наиболее существенный вклад в подсеточные напряжения Рейнольдса дадут наиболее неустойчивые моды. Если дискриминант квадратного уравнения, определяющий собственные числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , положителен, то эти собственные числа действительны. Если оба собственных числа положительны или одно положительно, а другое отрицательно, то, по-видимому, основной вклад дадут моды с наибольшим числом  $\lambda_1$ .

Среди направлений вектора  $\mathbf{k}$  следует выбрать то, которое дает максимальное значение  $\lambda_1$ .

Для нахождения этого максимума по угловым переменным считаем, что предварительно был осуществлен переход с помощью ортогонального преобразования в систему координат, в которой тензор  $\mathbf{S}$  диагонален. Тогда выражения (??) и (10), определяющие величины  $P$  и  $Q$ , существенно упрощаются:

$$P = -n_1^2 S_1 - n_2^2 S_2 - n_3^2 S_3, \quad (11)$$

$$Q = n_3^2 S_1 S_2 + n_2^2 S_1 S_3 + n_1^2 S_2 S_3 + \frac{1}{4}(\mathbf{n} \cdot \Omega)^2, \quad (12)$$

где  $S_1 = S_{11}$ ,  $S_2 = S_{22}$ ,  $S_3 = S_{33}$  — собственные числа тензора  $\mathbf{S}$ ,  $S_1 \geq S_2 \geq S_3$ . Условие несжимаемости будет иметь вид

$$S_1 + S_2 + S_3 = 0. \quad (13)$$

Компоненты единичного вектора  $\mathbf{n}$  удовлетворяют соотношению

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \quad (14)$$

Используя соотношения (??)–(??), выражение (10) для величины  $\lambda_1$  запишем как

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}[(2n_1^2 + n_2^2 - 1)S_1 + (2n_2^2 + n_1^2 - 1)S_2] + Z, \quad (15)$$

где

$$Z = \sqrt{\frac{1}{4}[(2n_1^2 + n_2^2 - 1)S_1 + (2n_2^2 + n_1^2)S_2]^2 + [n_1^2 S_2(S_2 + 2S_1) + n_2^2 S_1(S_1 + 2S_2) - S_1 S_2] - R},$$

$$R = (n_1 \Omega_1 + n_2 \Omega_2 + n_3 \Omega_3)^2, \quad n_3 = \pm \sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}. \quad (16)$$

Необходимыми условиями максимума функции  $\lambda_1(\mathbf{n})$  являются:  $\partial \lambda_1 / \partial n_1 = 0$ ,  $\partial \lambda_1 / \partial n_2 = 0$ . Используя соотношение (15), получим систему двух алгебраических уравнений:

$$(2S_1 + S_2)n_1 Z - (2S_1 + S_2)n_1[(2n_1^2 + n_2^2 - 1)S_1 + (2n_2^2 + n_1^2 - 1)S_2] - n_1 S_2(2S_1 + S_2) +$$

$$+(\Omega_1 + \frac{\partial n_3}{\partial n_1} \Omega_3)(n_1 \Omega_1 + n_2 \Omega_2 + n_3 \Omega_3) = 0, \quad (17)$$

$$(2S_2 + S_1)n_2 Z - (2S_2 + S_1)n_2[(2n_1 + n_2^2 - 1)S_1 + (2n_2^2 + n_1^2 - 1)S_2] - n_2 S_1(2S_2 + S_1) +$$

$$+(\Omega_2 + \frac{\partial n_3}{\partial n_2} \Omega_3)(n_1 \Omega_1 + n_2 \Omega_2 + n_3 \Omega_3) = 0, \quad (18)$$

где  $\partial n_3 / \partial n_1 = \mp n_1 / \sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}$ ,  $\partial n_3 / \partial n_2 = \mp n_2 / \sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}$ .

Система уравнений (??) и (??) не становится проще при переходе к угловым переменным  $\eta, \theta$ . Однако при  $\Omega = 0$  можно получить решение  $\lambda_{1 \max} = 2S_1$ . В других случаях необходимо использовать приближенные численные методы, например метод Ньютона.

Таким образом, основным инвариантом будет  $I = \lambda_{1 \max}$ , если подкоренное выражение в (15) положительно и в нем максимум берется по различным направлениям вектора  $\mathbf{k}$ . Если подкоренное выражение отрицательно, то  $I = \sup\{\text{Re}(\lambda_1(\mathbf{n}))\}$  при  $\sup(\text{Re}(\lambda_1)) > 0$  или  $I = 0$  при  $\sup\{\text{Re}(\lambda_1)\} \leq 0$ , где  $\text{Re}$  — действительная часть числа. В этом случае возникновение неустойчивостей возможно лишь за счет нелинейных взаимодействий, а диссипацию будут обеспечивать вязкие члены. Физически первый случай (подкоренное выражение в (15) положительно) соответствует превалированию деформации крупномасштабным полем скорости мелкомасштабных вихрей над эффектом вращения. Второй случай (подкоренное выражение в (15) равно 0 или отрицательно) соответствует обратной ситуации. Ячейка со стороной  $h$  находится в ядре когерентного вихря [13], где использовался более грубый метод идентификации когерентных структур: инвариант  $q$  тензора  $\mathbf{dU}$  положителен ( $q = 1/2(\Omega_{ij}\Omega_{ji} - S_{ij}S_{ji})$ ).

В итоге можно считать, что коэффициент подсеточной турбулентной вязкости равен

$$\nu_t = ch^2 \sqrt{I}, \quad (19)$$

где  $c$  — константа, которую следует определить путем сравнения численных экспериментов с натурными экспериментами;  $h$  — шаг разностной сетки.

## 2. Обсуждение результатов

Отметим, что уменьшение коэффициента турбулентной вязкости при увеличении крупномасштабной завихренности — явление достаточно известное. Так, в [14] предложена

крупномасштабная феноменологическая модель с учетом наличия крупномасштабной завихренности с коэффициентом турбулентной вязкости:

$$\nu_t = \nu_0 (k^2/\varepsilon) [1/(1 + 0.36k\Omega/\varepsilon)],$$

где  $\nu_0$  — константа;  $k$  — кинетическая энергия турбулентности;  $\varepsilon$  — удельная скорость диссипации турбулентной энергии;  $\Omega = \sqrt{W_{ij}W_{ji}}$  — модуль крупномасштабной завихренности;  $W_{ij}$  — антисимметричная часть тензора градиента скорости  $\mathbf{dU}$ . Похожее выражение использовалось в [15] для коэффициента турбулентной вязкости  $\nu_t$ :

$$\nu_t = c_\mu f_\mu k \tau_1,$$

где  $f_\mu$  — коэффициент, зависящий от числа Рейнольдса;  $\tau_1 = k/\varepsilon + \sqrt{\nu/\varepsilon}$  — характерное время оборота энергосодержащих вихрей;  $\nu$  — кинематический коэффициент молекулярной вязкости;

$$c_\mu = \frac{1}{A_1 + A_s \tau_1 \max(S, \Omega)},$$

$$A_1 = 8, \quad A_s = \sqrt{3} \cos \Phi, \quad \Phi = \frac{1}{3} \arccos(\sqrt{6}x), \quad x = 2^{1.5} \frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{S^3}.$$

В работах [14, 15]  $\nu_t \rightarrow 0$ , как  $1/\Omega$ , при  $\Omega \rightarrow \infty$ . В нашем подходе, как следует из (10),  $\nu_t$  пропорционален  $aS + \sqrt{b^2S^2 - \Omega^2}$ , если  $\Omega \leq bS$ , где  $a, b$  — константы; при  $\Omega > bS$   $\nu_t$  пропорционален  $S$ , т. е. коэффициент турбулентной вязкости в первом приближении перестает зависеть от завихренности. Какая ситуация более адекватна действительности, в настоящий момент сказать трудно. Величины  $k, \varepsilon$  могут, кроме того, непосредственно зависеть от крупномасштабной завихренности  $\Omega$  через свои уравнения переноса.

Таким образом, получено явное выражение для основного инварианта турбулентного течения несжимаемой жидкости, которое в первую очередь определяет подсеточные эффекты произвольного неоднородного турбулентного потока. Впервые учтено явным образом влияние крупномасштабной завихренности течения на подсеточный коэффициент турбулентной вязкости. Определение эмпирической константы  $c$  требует проведения дополнительных расчетов на основе предложенной модели для различных типов турбулентных течений. Теоретическое определение этой эмпирической константы и, возможно, непосредственное определение компонент тензора Рейнольдса через градиенты крупномасштабной скорости требуют более глубокого анализа нелинейных уравнений для мелкомасштабной скорости (??).

Предложенный подход может быть распространен на магнитогидродинамическую турбулентность, сжимаемые течения, течения с химическими реакциями и т.п.

Автор благодарен А. В. Копыльцову за критические замечания.

## Список литературы

- [1] PIOMELLI U. Large-eddy simulation: achievements and challenges // Prog. Aerosp. Sci. 1999. No. 35. P. 335–350.
- [2] BALONISHNIKOV A. M. Extended local balance model of turbulence and Couette-Taylor flow // Phys. Review E. 2000. Vol. 61, No. 2. P. 1390–1394.

- [3] VOELKL T., PULLIN D. I., CHANG D. C. A physical-space version of the stretched-vortex subgrid-stress model for large-eddy simulation // Phys. of Fluids. 2000. Vol. 12, No. 7. P. 1810–1825.
- [4] SMAGORINSKY J. General circulation experiments with the primitive equations // Mon. Weather Rev. 1963. No. 91. P. 99–105.
- [5] POPE S. B. A more general effective viscosity hypothesis // J. Fluid. Mech. 1975. No. 72. P. 331–340.
- [6] JORGEN T., GATSKI T. B. General explicit algebraic stress relations and best approximation for three-dimensional flows // Intern. J. Eng. Sci. 1998. No. 36. P. 739–763.
- [7] СКВОРЦОВ Г. Е., ТИМОХОВ Л. А. К теории турбулентности // Вестник ЛГУ. 1980. Вып. 3, №13. С. 106–110.
- [8] BATCHELOR G. K., PROUDMAN J. The effect of rapid distorsion on a fluid in turbulent motion // Q. J. Mech. Appl. Math. 1954. No. 7. P. 83–90.
- [9] БАЛОНИШНИКОВ А. М. Однопараметрическая модель неоднородной гидродинамической турбулентности // Системы автоматизации в науке и производстве. Л.: Наука, 1984. С. 50–54.
- [10] LEE J. The triad-interaction representation of homogeneous turbulence // J. Math. Phys. 1975 No. 7. P. 1359–1366.
- [11] БРЮНО А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
- [12] ХАКЕН Г. Синергетика. М.: Наука, 1980.
- [13] DUBIEF Y., DELCAYRE F. On coherent-vortex identification in turbulence // J. of Turbulence. 2000. No. 1. P. 2–22 (<http://jot.iop.org>).
- [14] ZHOU Y. A phenomenological treatment of rotating turbulence // Phys. of Fluids. 1995. No. 7. P. 2094–2106.
- [15] MERCI B., DE LANGHE C., VIERENDEELS J., DICK E. A quasi-Realizable Cubic Low-Reynolds Eddy-Viscosity Turbulence Model with a New Dissipation Rate Equation // Flow, Turbulence and Combustion. 2001. No. 64. P. 133–160.

*Поступила в редакцию 16 июля 2002 г.*