Вычислительные технологии **Том 7, № 3, 2002**

ЭФФЕКТИВНЫЕ ПО ВРЕМЕНИ МОДУЛИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

А. А. Светашков

НИИ прикладной математики и механики при Томском государственном университете, Россия

e-mail: astrodep@niipmm.tsu.ru

A method for approximate solution of the boundary value problems for isotropic non-linear viscoelastic bodies is considered. A method for obtaining time-effective integral estimates for the functional of potential energy of deformations and stresses is given.

Введение

Задачи нелинейной вязкоупругости (НВУ) возникают при расчетах напряженно-деформированного состояния конструкций из полимерных и композиционных материалов, для которых характерны следующие нелинейные свойства: отсутствие линейной пропорциональности между приращениями напряжений и деформаций, влияние вида напряженного состояния и т. д. Точное решение подобных задач сопряжено с определенными трудностями, связанными с необходимостью учета процессов как упругой наследственности, так и физической нелинейности. Известны следующие приближенные подходы: итерационные методы Б. Е. Победря [1], обобщенный принцип соответствия В. В. Колокольчикова [2, 3], а также некоторые другие подходы [4, 5].

В настоящей работе в соответствии с главной квазилинейной теорией вязкоупругости [6] приводится приближенный алгоритм решения на основе эффективных и оптимальных модулей. Выражения для этих модулей выводятся из условий эквивалентности функционалов потенциальных энергий напряжений и деформаций исходной нелинейной вязкоупругой среды и некоторой упругой среды с модулями, являющимися функциями времени. Показано, что функционалы удельных потенциальных энергий напряжений и деформаций, рассчитанные на точных решениях, имеют двусторонние оценки, которые вычисляются через функционалы приближенных решений с эффективными модулями. Приведен численный пример.

1. Вывод выражений эффективных модулей

Рассмотрим выражения главной квазилинейной теории вязкоупругости [6], для которой физические формулы имеют вид

$$\sigma_{ij}(t) = \Lambda^*\theta\delta_{ij} + 2G^*\varepsilon_{ij} - \Gamma^*(\varphi(e_u)e_{ij}). \tag{1}$$

Здесь σ_{ij}, ε_{ij} — тензоры напряжения и деформации; $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3\theta\delta_{ij}$, $\theta = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, δ_{ij} — символ Кронекера; Λ^*, G^*, Γ^* — интегральные операторы наследственности, описывающие сдвиговую, объемную и нелинейную релаксацию; $\varphi(e_u)$ — функция нелинейности;

$$G^*\varepsilon_{ij} \equiv \int\limits_0^t R(t-\tau)d\varepsilon_{ij}(\tau) = G_0[\varepsilon_{ij}(t) - \int\limits_0^t \Gamma_1(t-\tau)\varepsilon_{ij}(\tau)d\tau];$$

$$\Lambda^*\theta \equiv \int\limits_0^t \Pi(t-\tau)d\theta(\tau) = \Lambda_0[\theta(t) - \int\limits_0^t \Gamma_2(t-\tau)\theta(\tau)d\tau]; \tag{2}$$

$$\Gamma^*(\varphi e_{ij}) \equiv \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)d[\varphi(e_u(\tau))\varepsilon_{ij}(\tau)] = \Gamma_0[\varphi(e_u(t))e_{ij}(t) - \int\limits_0^t \Gamma_3(t-\tau)\varphi(e_u(\tau))\varepsilon_{ij}(\tau)d\tau];$$

$$R(0) = G_0, \quad \Pi(0) = \Lambda_0, \quad \Gamma(0) = \Gamma_0.$$

Функции релаксации $R(t)$, $\Pi(t)$, $\Gamma(t)$, ядра релаксации $\Gamma_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, и упругомгновенные модули Λ_0, G_0, Γ_0 определяются из эксперимента. Предполагается, что функция нелинейности удовлетворяет условию [1]

$$0 \le \varphi(e_u) \le \varphi(e_u) + 2e_u\frac{d\varphi}{de_u} < 1,$$

$$e_u = e_{ij}e_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Рассмотрим функционал удельной потенциальной энергии деформаций:

$$W = \int\limits_0^T \sigma_{ij}(t)d\varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{4}$$

который, как можно показать, является положительно-определенным при условиях (3) и

$$\int\limits_0^T \dot{e}_{ij}(2G^* - \Gamma^*)e_{ij}dt \ge 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Функции релаксации $R(t)$, $\Pi(t)$ и $\Gamma(t)$ доопределены в область отрицательных t: $R(t) = R(-t)$ и т. д. Зададим среду сравнения с физическими уравнениями вида

$$\sigma^0_{ij}(t) = \lambda_1(t)\theta\delta_{ij} + 2g_1(t)\varepsilon_{ij} - \varphi(e_u)\gamma_1(t)e_{ij}, \tag{6}$$

где $\lambda_1(t)$, $g_1(t)$, $\gamma_1(t)$ — функции времени, которые определим из условия энергетической близости функционала W и

$$W_0 = \int\limits_0^T \sigma_{ij}^0(t) d\varepsilon_{ij}, \quad i,j = 1,2,3.$$

Положительная определенность функционала W_0 обеспечивается введением функций $\Lambda(s,\tau)$, $G(s,\tau)$, $\Gamma(s,\tau)$ по типу

$$G(\tau,s) \equiv \frac{1}{2}[g_1(\tau)h(\tau - s) + g_1(s)h(s-\tau)],$$

$$\Lambda(\tau,s) \equiv \frac{1}{2}[\lambda_1(\tau)h(\tau - s) + \lambda_1(s)h(s-\tau)],$$
$$\Gamma(\tau,s) \equiv \frac{1}{2}[\gamma_1(\tau)h(\tau - s) + \gamma_1(s)h(s-\tau)], \tag{7}$$

где $h(t)$ — функция Хевисайда. Тогда при условии

$$2g_1(t) \geq \gamma_1(t) \geq 0 \tag{8}$$

и при выполнении (3) функционал W_0 ограничен снизу положительно-определенным функционалом $\widetilde{W_0}$ вида

$$W \geq \widetilde{W_0} = \int\limits_0^T \int\limits_0^T [2G(s,\tau)d\varepsilon_{ij}(s)d\varepsilon_{ij}(\tau) + \Lambda(s,\tau)d\theta(\tau)d\theta(s) - \Gamma(s,\tau)de_{ij}(s)de_{ij}(\tau)] \geq 0.$$

Тогда имеют место неравенства

$$mW_0 \leq W \leq MW_0.$$

Константы m, M можно найти из решения экстремальных задач

$$m = \min W(\dot\varepsilon_{ij}), \quad M = \max W(\dot\varepsilon_{ij}),$$
$$W_0(\dot\varepsilon_{ij}) = 1, \quad W_0(\dot\varepsilon_{ij}) = 1. \tag{9}$$

Перейдем от (9) к задаче на безусловный экстремум для $W_1 = W - \mu W_0$ и проварьируем W_1 по $\dot\varepsilon_{ij}$. В результате получим

$$\delta W_1 = \int\limits_0^T [\delta\dot\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij} - \mu\sigma_{ij}^0) + \dot\varepsilon_{ij}\delta(\sigma_{ij} - \mu\sigma_{ij}^0)]dt = 0.$$

Последнее уравнение представляет собой интегральное тождество [7]. В силу произвола вариаций получаем две системы уравнений:

$$\sigma_{ij} - \mu\sigma_{ij}^0 = 0, \quad \dot\varepsilon_{ij} = 0, \quad < i,j = 1,2,3 > . \tag{10}$$

Рассмотрим нетривиальное решение, определяемое (10). В системе (10) имеет место симметрия по переменным ε_{ii} и ε_{ij} $(i \neq j)$, тогда $\varepsilon_{ii} = \varepsilon$, $\varepsilon_{ij} = e$ и получаем

$$(K^* - \mu k_1(t))\theta = 0, \tag{11}$$

$$[2G^* - \Gamma^*\varphi(e) - \mu(2g_1(t) - \varphi(e_u)\gamma_1(t)]e = 0, \tag{12}$$

$$K^* = \Lambda^* + 2/3G^*, \quad k_1(t) = \lambda_1(t) + 2/3g_1(t),$$

$$e_u = e_{ij}e_{ij} = 6e^2, \quad e_{ii} = 0, \quad \theta = 3\varepsilon.$$

Приведем систему (11), (12) к положительно-определенному виду, умножив (11) на $\dot{\theta}$, а (12) — на $\dot{e}$ и проинтегрировав по t от 0 до T:

$$\mu_1 = \frac{\int\limits_0^T \dot{\theta} K^* \theta d\theta}{\int\limits_0^T \dot{\theta}(t)\theta(t)k_1(t)dt}; \quad \mu_2 = \frac{\int\limits_0^T \dot{e}[2G^* - \Gamma^*\varphi(e_u)]edt}{\int\limits_0^T \dot{e}(t)[2g_1(t) - \varphi(e_u)\gamma_1(t)]e(t)dt}. \tag{13}$$

Условие $W_0(\dot{\varepsilon}_{ij}) = 1$, входящее в (9), принимает вид

$$\int\limits_0^T \{\theta(t)\dot{\theta}(t)k_1(t) + 6\dot{e}(t)e(t)[2g_1(t) - \gamma_1(t)\varphi(e_u(t))]\}dt = 1. \tag{14}$$

К системе уравнений (13), (14) относительно неизвестных $\dot{\theta}$, $\dot{e}$ и μ_1, μ_2 можно присоединить уравнение

$$\mu = \int\limits_0^T \sigma_{ij}(t)\varepsilon_{ij}dt = \int\limits_0^T [\dot{\theta}K^*\theta + 6\dot{e}(2G^* - \Gamma^*\varphi(e_u))e]dt. \tag{15}$$

Далее потребуем, чтобы условие (14) выполнялось для всех $t \in [0, T]$, а также положим $\mu = 1$. С учетом разделения решений для μ_1, μ_2 по $\dot{\varepsilon}$ и $\dot{e}$ будем иметь

$$h(t) = \int\limits_0^t 6\dot{e}(\tau)e(\tau)[2g_1(\tau) - \varphi(e_u(\tau))\gamma_1(\tau)]d\tau,$$

$$h(t) = \int\limits_0^t 6\dot{e}(\tau)[2G^* - \Gamma^*\varphi(e_u)]ed\tau. \tag{16}$$

Разность двух последних уравнений дает

$$g_1(t) = G^*e/e, \quad \gamma_1(t) = \Gamma^*(\varphi(e_u)e)/\varphi(e_u)e. \tag{17}$$

Учтем, что уравнению (16) удовлетворяет функция $e(t) = e_0h(t)$, $e_0 = \mathrm{const}$, тогда из (17) получаем искомое выражение эффективных модулей:

$$g_1(t) = G^*h, \quad \gamma_1(t) = \Gamma^*h. \tag{18}$$

Рассуждая аналогичным образом, запишем

$$k_1(t) = K^*\theta/\theta_0, \tag{19}$$

где $\theta(t)$ удовлетворяет (14), в котором положено $\dot{e} = 0$, причем $\theta(t) = \theta_0 h(t)$. Тогда

$$k_1(t) = K^* h. \tag{20}$$

Найденные выражения эффективных модулей нелинейной вязкой упругости в виде (18), (20) можно назвать модулями лагранжевого типа, поскольку они получены из сопоставления удельных потенциальных энергий соответствующих лагранжианов.

Рассмотрим соотношения главной квазилинейной теории ползучести

$$\varepsilon_{ij}(t) = \Lambda_1^*\sigma + 2G_1^*\sigma_{ij} + R_1^*(\phi(\sigma_u)s_{ij}), \tag{21}$$

$$K_1^* = \Lambda_1^* + 2/(3G_1^*) = 1/(9K^*), \quad G_1^* = 1/(4G^*).$$

Здесь $\sigma = \sigma_{ij}\delta_{ij}$; $s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3\sigma\delta_{ij}$; Λ_1^*, G_1^*, R_1^* — операторы, описывающие линейную и нелинейную ползучесть и аналогичные по структуре операторам релаксации (2); $\phi(\sigma_u)$ — функция нелинейности, удовлетворяющая неравенствам [1]

$$0 < \phi(\sigma_u) \leq \phi(\sigma_u) + 2\sigma_u \frac{d\phi}{d\sigma_u} < 1. \tag{22}$$

Вводя физические соотношения, в которых нелинейно вязкоупругие напряжения связаны с деформациями с помощью определяющих уравнений вида

$$\varepsilon_{ij}^0(t) = \lambda_2(t)\sigma\delta_{ij} + 2g_2(t)\sigma_{ij} + \phi(e_u)\gamma_2(t)s_{ij}, \tag{23}$$

и формулируя задачу об энергетической эквивалентности функционалов потенциальных энергий напряжений

$$\Psi = \int_0^T \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}, \quad \Psi_0 = \int_0^T \varepsilon_{ij}^0 d\sigma_{ij} \quad i,j = 1,2,3,$$

получим в результате решения следующие выражения для $\lambda_2(t) = k_2(t) - 2/3g_2(t)$, $g_2(t)$, $\gamma_2(t)$:

$$k_2(t) = (K^{*-1}h)^{-1}, \quad g_2(t) = (G^{*-1}h)^{-1}, \quad \gamma_2(t) = R_1^* h. \tag{24}$$

Как видно из сопоставления (18), (20) и (24), выражение для $\gamma_2(t)$ имеет отличный от $k_1(t)$, $g_1(t)$ вид в силу того, что соотношения (1), (21) не являются взаимообратными. Заметим, что найденные эффективные модули $k_2(t)$, $g_2(t)$, $\gamma_2(t)$ можно назвать модулями кастильянового типа.

2. Оптимальные эффективные модули

Найденные эффективные модули $k_1(t)$, $g_1(t)$, $\gamma_1(t)$ отражают эквивалентность функционалов удельных потенциальных энергий деформаций: $W_0 \sim W$, а тройка модулей $k_2(t)$, $g_2(t)$, $\gamma_2(t)$ определена из условия $\Psi_0 \sim \Psi$. Попытаемся найти $g^0(t)$, $k^0(t)$, $\gamma^0(t)$, которые удовлетворяли бы совместным условиям $W_0 \sim W$, $\Psi_0 \sim \Psi$. Для этой цели сопоставим соотношения в точках стационарности W_1 и $\Psi_1 = \Psi - \chi\Psi_0$, где χ удовлетворяет уравнению, аналогичному (15):

$$\chi = \int_0^T \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}, \quad i,j = 1,2,3.$$

Из суммы (15) и последнего уравнения следует

$$\mu + \chi = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}.$$

Положим $\mu = \chi = 1$ (условия эквивалентности функционалов $W_0 \sim W$, $\Psi_0 \sim \Psi$), тогда получаем соотношение

$$\mu = \chi = 1/2\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = 1, \quad i,j = 1,2,3. \tag{25}$$

Возвращаясь к решению задачи относительно функций $k_1(t)$, $g_1(t)$, $\gamma_1(t)$ в виде (17), (20), найдем промежуточные функции $e(t)$, $\varepsilon(t)$ из соотношения (25), которые с учетом $\varepsilon_{ii} = \varepsilon$, $\varepsilon_{ij} = e$ принимают вид

$$\frac{1}{2}[9\varepsilon K^*\varepsilon + 12eG^*e - 6\Gamma^*(\varphi(e_u))e] = 1. \tag{26}$$

Теперь, полагая $\varepsilon = 0$ в (26), получим следующую систему для определения $e(t)$, $\gamma^0(t)$, $g^0(t)$:

$$g^0(t) = G^*e/e, \quad \gamma^0(t) = \Gamma^*(\varphi(e_u)e)/\varphi(e_u)e,$$
$$2e(t)G^*e - e(t)\Gamma^*(\varphi(e_u)e) = 1/3. \tag{27}$$

При $e = 0$ получаем систему для определения $k^0(t)$, $\varepsilon(t)$:

$$k^0(t) = \frac{K^*\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2(t)}, \quad \varepsilon(t)K^*\varepsilon = 1. \tag{28}$$

Заметим, что в системе (28) введен нормирующий числовой множитель $\tilde{\varepsilon} = \sqrt{2}\varepsilon$.

Оптимальные эффективные модули (ОЭМ) линейно-вязкоупругого тела можно получить, положив $\Gamma^* \equiv 0$, тогда

$$g^0(t) = G^*e/e = \frac{1}{e^2(t)}, \quad e(t)G^*e = 1, \tag{29}$$

а вид $k^0(t)$ и в этом случае определяется (28).

Размерности полученных ОЭМ так же, как и размерности эффективных модулей (18), (20), (24), совпадают с размерностями соответствующих модулей сдвига, модуля объемного сжатия и нелинейного модуля. Действительно, найдем $k^0(t)$ при $t = \infty$. Из (28) получаем

$$\varepsilon^2(\infty) = \left.\frac{1}{K^*h}\right|_{t=\infty}, \quad k^0(\infty) = K^*h|_{t=\infty},$$
$$\varepsilon^2(0) = \frac{1}{K_0}, \quad k^0(0) = K_0.$$

Соотношения (27) дают в $t = \infty$:

$$2G^*h|_{t=\infty} - \varphi(e_u(\infty))\Gamma^*h|_{t=\infty} = \frac{1}{3\varepsilon^2(\infty)} = 2g^0(\infty) - \gamma^0(\infty)\varphi(e_u(\infty)).$$

Отсюда, учитывая (3), (8), запишем $g^0(\infty) = G^*h|_{t=\infty}$, $\gamma^0(\infty) = \Gamma^*h|_{t=\infty}$. Найденные $g^0(t)$, $k^0(t)$, $\gamma^0(t)$ можно назвать ОЭМ лагранжевого типа. Для определения ОЭМ кастильянового типа достаточно решить задачу, аналогичную рассмотренной, для функционала Ψ. Заметим, что для линейной вязкоупругости оптимальные эффективные модули в виде (27), (28) являются одновременно модулями лагранжевого и кастильянового типов.

3. Двухсторонние неравенства для функционалов потенциальных энергий

Рассмотрим разность удельных потенциальных энергий деформаций $W - W_0$. Используем вольтеррову форму записи определяющих уравнений (1), (2), а также учтем выражения для эффективных модулей в виде (18), (20):

$$W - W_0 = \int_0^T \dot{e}_{ij}(t)dt \int_0^t \Gamma_1(t-\tau)[e_{ij}(t) - e_{ij}(\tau)]d\tau + \int_0^T \dot{\theta}(t)dt \int_0^t K(t-\tau)[\theta(t) - \theta(\tau)]d\tau -$$

$$- \int_0^T \dot{e}_{ij}(t)dt \int_0^t \Gamma_3(t-\tau)[\varphi(t)e_{ij}(t) - \varphi(\tau)e_{ij}(\tau)]d\tau. \qquad (30)$$

Здесь $\varphi(t) \equiv \varphi(e_u(t))$, $K(t) = \Gamma_2(t) + 2/3\Gamma_1(t)$. Сумма двух первых интегралов всегда будет положительна, так как знаки разностей деформаций в квадратных скобках совпадают со знаками соответствующих скоростей деформаций $\dot{\theta}(t)$ и $\dot{e}_{ij}(t)$. Проанализируем, какой вклад дает последний интеграл в (30).

Из (3) и $e_u = e_{ij}e_{ij} > 0$ следует, что $\operatorname{sign}\dot{\varphi}(t) = \operatorname{sign}\dot{e}_u(t)$. Рассмотрим первый вариант распределения знаков: а) $\dot{\varphi} > 0$, $\dot{e}_{ij} > 0$, $e_{ij} > 0$. При этих условиях из (3) следует $\frac{d}{dt}(\varphi(t)e_{ij}(t)) \le \dot{e}_{ij}(t)$ (суммируя обе части последнего неравенства, умноженные на $e_{ij} > 0$, получаем (3)), тогда

$$\varphi(t)e_{ij}(t) - \varphi(\tau)e_{ij}(\tau) \le e_{ij}(t) - e_{ij}(\tau).$$

Подставляя последнее неравенство в (30) и учитывая (5), убеждаемся в том, что

$$W(\dot{\varepsilon}_{ij}) - W_0(\dot{\varepsilon}_{ij}) \ge 0. \qquad (31)$$

Тот же результат получим, проверяя остальные варианты соотношений знаков: б) $\dot{\varphi} > 0$, $\dot{e}_{ij} < 0$, $e_{ij} < 0$; в) $\dot{\varphi} < 0$, $\dot{e}_{ij} > 0$, $e_{ij} < 0$; г) $\dot{\varphi} < 0$, $\dot{e}_{ij} < 0$, $e_{ij} > 0$. Аналогичным образом проводя анализ разности функционалов удельных потенциальных энергий напряжений $\Psi - \Psi_0$ с учетом (22), приходим к неравенству

$$\Psi(\dot{\sigma}_{ij}) - \Psi_0(\dot{\sigma}_{ij}) \le 0. \qquad (32)$$

Эффективные модули (18), (20) и (24) помимо (6), (23) входят в нелинейно-упругие определяющие уравнения вида

$$\sigma^1_{ij}(t) = \lambda_1(t)\theta^1(t)\delta_{ij} + 2g_1(t)\varepsilon^1_{ij} - \varphi(e^1_u)\gamma_1(t)e^1_{ij},$$

$$\varepsilon^2_{ij}(t) = \lambda_2(t)\sigma^2(t)\delta_{ij} + 2g_2(t)\sigma^2_{ij} + \phi(\sigma^2_u)\gamma_2(t)s^2_{ij}. \qquad (33)$$

Здесь σ_{ij}^{α}, $\varepsilon_{ij}^{\alpha}$, $\alpha = 1, 2$ — компоненты напряженно-деформированного состояния, полученные из решений задач нелинейной упругости с модулями $g_\alpha(t)$, $\lambda_\alpha(t)$, $\gamma_\alpha(t)$; $e_u^1 \equiv \varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^1$, $\sigma_u^2 \equiv \sigma_{ij}^2 \sigma_{ij}^2$, $(i, j = 1, 2, 3)$. Выразим из (33) эффективные модули через свертки девиаторов упругих напряжений и деформаций:

$$2g_1(t) - \varphi(e_u^1)\gamma_1(t) = \frac{s_{ij}^1(t)e_{ij}^1(t)}{e_{ij}^1(t)e_{ij}^1(t)},$$

$$2g_2(t) + \phi(\sigma_u^2)\gamma_2(t) = \frac{e_{ij}^2(t)e_{ij}^2(t)}{s_{ij}^2(t)e_{ij}^2(t)}, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{34}$$

$$K_1(t) = \frac{\sigma^1(t)\theta^1(t)}{(\theta^1(t))^2}, \quad K_2(t) = \frac{(\theta^2(t))^2}{\sigma^2(t)\theta^2(t)}.$$

Подставляя (34) в (30), (32), получим

$$\int_0^T \dot{e}_{ij}(t)dt \int_0^t [\Gamma_1(t-\tau) - \varphi(e_u(\tau))\Gamma_3(t-\tau)]e_{ij}(\tau)d\tau + \int_0^T \dot{\theta}(t)dt \int_0^t K_1(t-\tau)\theta(\tau)d\tau -$$

$$- \int_0^T \dot{e}_{ij}(t)dt \int_0^t [\frac{s_{kl}^1(\tau)e_{kl}^1(\tau)}{e_{kl}^1(\tau)e_{kl}^1(\tau)} e_{ij}(\tau)d\tau - \int_0^T \dot{\theta}(t)dt \int_0^t \frac{\sigma^1(\tau)\theta^1(\tau)}{\theta^1(\tau)\theta^1(\tau)}\theta(\tau)d\tau \geq 0, \tag{35}$$

$$i, j, k, l = 1, 2, 3,$$

$$\int_0^T \dot{s}_{ij}(t)dt \int_0^t [P_1(t-\tau) + \phi(\sigma_u(\tau))P_3(t-\tau)]s_{ij}(\tau)d\tau + \int_0^T \dot{\sigma}(t)dt \int_0^t K_2(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau -$$

$$- \int_0^T \dot{s}_{ij}(t)dt \int_0^t \frac{e_{kl}^2(\tau)e_{kl}^2(\tau)}{s_{kl}^2(\tau)e_{kl}^2(\tau)} e_{ij}(\tau)d\tau - \int_0^T \dot{\sigma}(t)dt \int_0^t \frac{\theta^2(\tau)\theta^2(\tau)}{\sigma^2(\tau)\theta^2(\tau)}\sigma(\tau)d\tau \leq 0, \tag{36}$$

$$i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

Здесь $P_i(t)$, $i = 1, 2, 3,$ — соответственно ядра сдвиговой, объемной и нелинейной ползучести, через которые можно выразить операторы Λ_1^*, G_1^*, R_1^*, входящие в (21); $k_2(t) = P_2(t) + 2/3P_1(t)$.

Таким образом, неравенства (35), (36) дают двухсторонние оценки для точного решения задачи нелинейной вязкой упругости, определяемого $e_{ij}(t)$, $s_{ij}(t)$, $\theta(t)$, $\sigma(t)$ через соответствующие свертки девиаторов s_{ij}^{α}, e_{ij}^{α} и σ^α, θ^α $(\alpha = 1, 2)$ приближенных нелинейно-упругих решений, которые могут быть получены из расчетов с упругими модулями $\lambda_\alpha(t)$, $g_\alpha(t)$, $\gamma_\alpha(t)$.

4. Расчет нелинейного вязкоупругого цилиндра

В качестве примера рассмотрим точное и приближенные решения для несжимаемого цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления $P(t)$. Аналитическое решение данной задачи приведено в [8]. Определяющие уравнения взяты в однопараметрическом виде

$$S_{ij}(t) = \Gamma^*(\varphi(e_u)e_{ij}) = 2G_0\left[\varphi(e_u)e_{ij}(t) - \int\limits_0^t R(t-\tau)\varphi(e_u(\tau))e_{ij}(\tau)d\tau\right], \qquad (37)$$

$$\varphi(e_u) = \left(\frac{e_u}{B}\right)^n, \quad B = G_0/3, \quad n \in [0.1, 0.5].$$

Решение указанной задачи в одномерной постановке при граничных условиях

$$\sigma_r(a) = -p(t), \quad \sigma_r(b) = 0,$$

где a, b — внутренний и внешний радиусы цилиндра, дается формулами

$$\sigma_r(r,t) = \bar{\sigma}_r(r)p(t), \quad \sigma_\varphi(r,t) = \bar{\sigma}_\varphi(r)p(t),$$

$$\bar{\sigma}_r(r) = \frac{(b^{-\gamma} - r^{-\gamma})}{(a^{-\gamma} - b^{-\gamma})}, \quad \bar{\sigma}_\varphi(r) = \frac{(b^{-\gamma} - (\gamma-1)r^{-\gamma})}{(a^{-\gamma} - b^{-\gamma})}, \quad \gamma = 2(n+1) \qquad (38)$$

(r — радиус цилиндра). Деформации ε_r, ε_φ определяются через функцию $C(t)$:

$$\varepsilon_r(r,t) = -\varepsilon_\varphi(r,t) = -C(t)/r^2, \quad \varepsilon_z = 0, \quad \varepsilon_u = \sqrt{2}C/r^2,$$

$$C(t) = (C_0\Gamma^{*-1}p)^{1/(n+1)}, \quad C_0 = \frac{1}{2\varphi_0}\frac{1}{a^{-\gamma} - b^{-\gamma}}, \quad \varphi_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{B}\right)^n. \qquad (39)$$

Найдем разность удельных потенциальных энергий деформаций, выраженную через компоненты напряженно-деформированного состояния. Имеем

$$W_1 - W_0 = \frac{\gamma}{r^{2+\gamma}(a^{-\gamma} - b^{-\gamma})}\int\limits_0^t (p(t) - \gamma_1(t)\Gamma^{*-1}p)dC(t),$$

где $\gamma_1(t) = \Gamma^* h$ — эффективный модуль лагранжевого типа. Пользуясь известным [9] неравенством для функций материала

$$\Gamma^* h \Gamma^{*-1} h \leq 1,$$

получаем справедливость $W_1 \geq W_0$.

Аналогичным образом представим разность удельных потенциальных энергий напряжений $\Psi - \Psi_0$:

$$\Psi - \Psi_0 = \frac{\gamma}{b^{-\gamma} - a^{-\gamma}}\frac{1}{r^{2+\gamma}}\int\limits_0^t (C(t) - C_2(t))dp(t),$$

где $C_2(t)$ определяется по (39) при замене $\Gamma^{*-1}p$ на $p\Gamma^{*-1}h$:

$$C_2(t) = (C_0 p(t)\Gamma^{*-1}h)^{1/(n+1)}. \qquad (40)$$

С учетом выражения для $C(t)$ убедимся, что $\Psi \leq \Psi_0$.

Пару приближенных решений найдем, используя эффективные модули $g_\alpha(t)$: $g_1(t) = \Gamma^* h$, $g_2(t) = (\Gamma^{*-1}h)^{-1}$. В результате получим

$$C_1(t) = \left(C_0 \frac{p(t)}{\Gamma^* h}\right)^{1/(n+1)},$$

а функция $C_2(t)$ дается (40). При этом согласно (38) вязкоупругие напряжения совпадают с упругими.

Рассчитаем приближенное решение с ОЭМ лагранжевого типа $\gamma_{0L}(t)$. Из (27) получаем с учетом определяющих уравнений (37):

$$\gamma_{0L}(t) = \frac{\Gamma^*(\varphi(e_u)e)}{\varphi(e_u)e(t)}, \quad e(t)\Gamma^*(\varphi(e_u)e) = 1, \tag{41}$$

где e_u выражается через неизвестную функцию $e(t)$:

$$e_u = e\sqrt{6}, \quad \varphi(e_u) = \chi e^n, \quad \chi = \left(\frac{\sqrt{6}}{B}\right)^n.$$

С учетом последних соотношений систему (41) приводим к виду

$$\gamma_{0L}(t) = \frac{1}{3\chi e^{2+n}(t)}, \quad e\Gamma^*(e^{1+n}) = \frac{1}{3\chi}. \tag{42}$$

После решения системы (42) $C_{L\text{opt}}(t)$ определялось по формуле

$$C_{L\text{opt}}(t) = \left(\frac{C_0 P(t)}{\gamma_{0L}(t)}\right)^{1/(n+1)}.$$

Числовой пример рассчитывался для полиэпоксидиенуритана [8] при следующих значениях констант: $G_0 = 40$ кг/см^2, $n = 0.5$, $a = 1$ см, $b = 5$ см, $R(t) = \lambda e^{-\beta t}$, $\lambda = 0.45$ мин$^{-1}$, $\beta = 0.15$ мин$^{-1}$ и с учетом закона изменения нагрузки $P(t)$ во времени $P(t) = P_0/t_0[t + (t_0 - t)h(t - t_0)]$, где $P_0 = 50$ кг/см^2, $t_0 = 17.5$ мин.

На рис. 1 показано изменение окружных деформаций ε_φ во времени: $\varepsilon_\varphi(t)$ соответствует аналитическому решению; $\varepsilon_\varphi^\alpha(t)$, $\alpha = 0, 1, 2,$ — приближенные решения, рассчитанные с модулями $\gamma_{0L}(t)$, $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$. Рис. 1 соответствует нелинейному случаю ($n = 0.5$), рис. 2 — линейному ($n = 0$). Здесь кривые *1, 3, 4* — деформации, рассчитанные соответственно по $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\gamma_{0L}(t)$, кривая *2* — точное решение. Из анализа графиков видно, что приближенные решения с разной степенью точности аппроксимируют аналитическое решение, при этом в моменты $t = 0, \infty$ все четыре решения совпадают. На рис. 3 показано изменение во времени эффективных модулей: кривая *1* — $\gamma_{0L}(t)$, кривая *2* — $\gamma_1(t)$, кривая *3* — $\gamma_2(t)$. Расчет неравенств для функционалов удельных потенциальных энергий деформаций и напряжений проиллюстрирован на рис. 4, здесь кривым *1–4* соответствуют функционалы потенциальных энергий W_0, W, Ψ, Ψ_0 во времени. Из графиков видно, что неравенства (31), (32) выполняются для нелинейного решения ($n = 0.5$), аналогичный результат будет и для случая линейного вязкоупругого решения ($n = 0$).

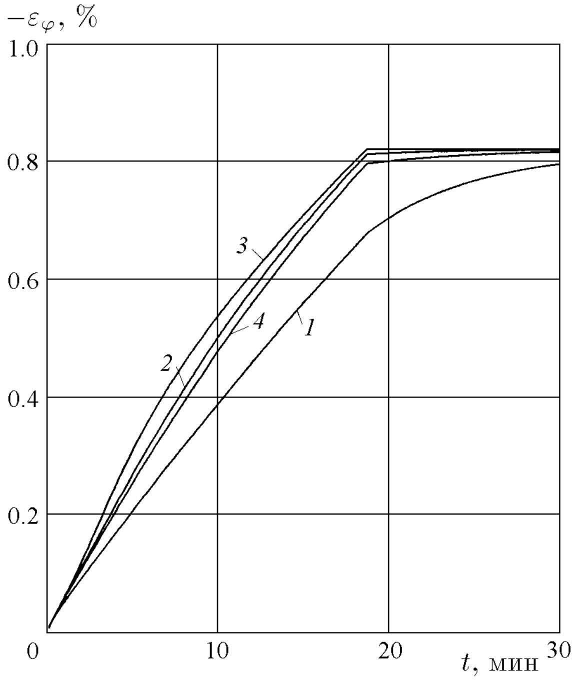

Рис. 1.

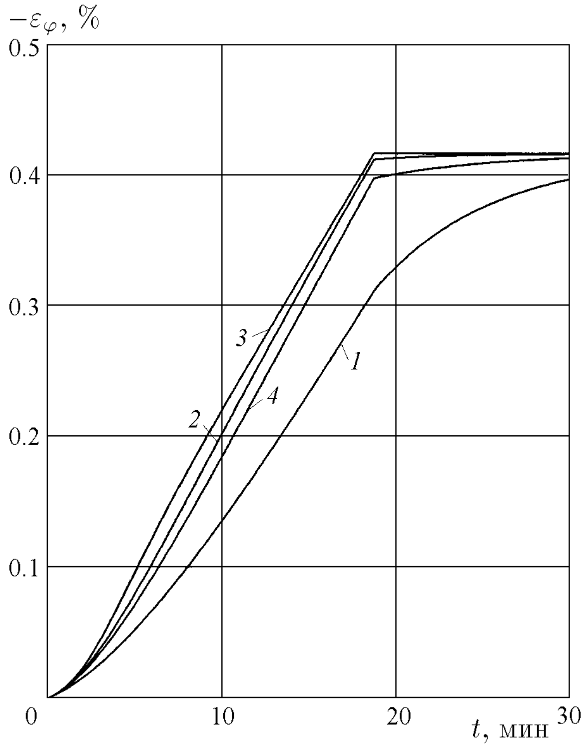

Рис. 2.

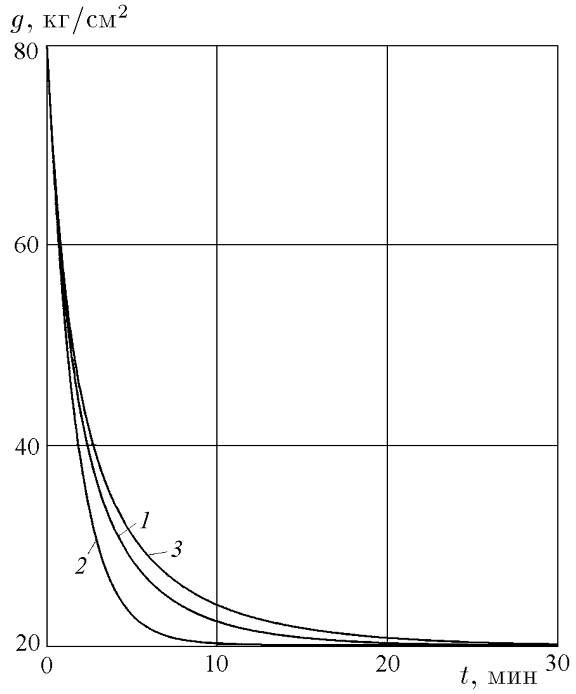

Рис. 3.

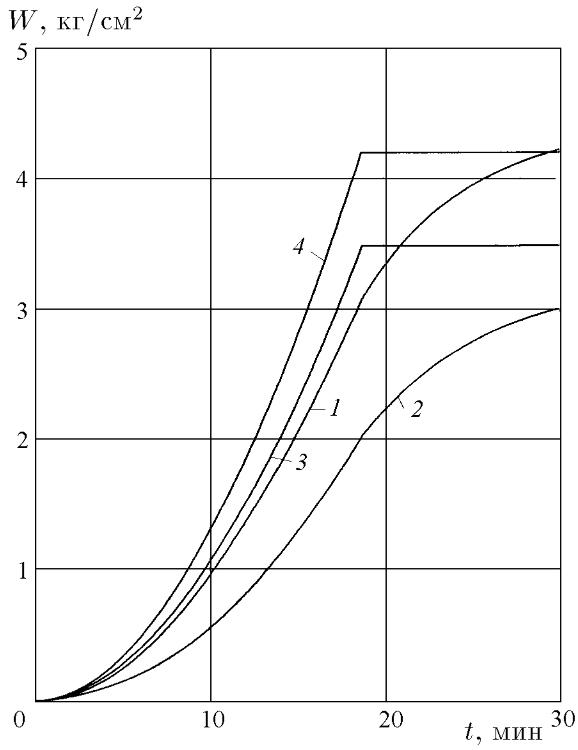

Рис. 4.

Выводы

1. Получены выражения эффективных по времени и оптимальных модулей, с помощью которых найдены приближенные решения краевых задач НВУ.

2. Найдены двухсторонние интегральные оценки для функционалов удельных потенциальных энергий напряжений и деформаций, рассчитанных на точных решениях краевых задач НВУ, через функционалы, связанные с приближенным и нелинейно-упругими решениями.

3. Приведен численный пример расчета несжимаемого НВУ цилиндра из эпоксидиенуритана.

4. Методика формулировки эффективных модулей и построения двухсторонних интегральных оценок функционалов точных и приближенных решений может быть без труда обобщена на случаи других вариантов задания НВУ свойств полимеров.

Список литературы

[1] Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.

[2] Колокольчиков В. В. Принцип соответствия и метод аппроксимации для нелинейных наследственных сред // Механика полимеров. 1971. №1. С. 66–73.

[3] Колокольчиков В. В. Смешанные сверточно-суперпозиционные ряды при решении интегральных уравнений нестабильной вязкоупругости // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252, №4. С. 829–831.

[4] Нетребко В. П., Лучников М. А. Метод последовательных приближений в задачах нелинейной вязкоупругости // ПМТФ. 1981. Т. 17. №3. С. 23–30.

[5] Ермоленко Г. Ю. Принцип соответствия краевых статических задач нелинейной вязкоупругости со старением краевым задачам теории упругости // ПМТФ. 1998. Т. 39. №4. С. 155–161.

[6] Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.

[7] Розин Л. А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1998. 532 с.

[8] Кузнецов Г. Б. Упругость, вязкоупругость и длительная прочность цилиндрических и сферических тел. М.: Наука, 1979. 112 с.

[9] Бугаков И. И. Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. 287 с.

Поступила в редакцию 20 июля 2001 г.