ДИСПЕРСИЯ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ВОЗМУЩЕННЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

К. К. Шакенов
Казахский национальный университет
им. аль-Фараби, Алматы
e-mail: `shakenov2000@mail.ru`

Application of implicit finite-difference scheme for linearized perturbed Navier — Stokes equations leads to the system of linear equations. The estimation from the “unit” class with explicit expression of dispersion is constructed for this system.

1. Аппроксимация линеаризованных возмущенных уравнений Навье — Стокса

Пусть область $\Omega \subset R^2$ ограничена, и $T > 0$ фиксировано. Обозначим через Q цилиндр $Q = \Omega \times (0, T)$. Для малого заданного $\varepsilon > 0$ рассмотрим начально-краевую задачу: найти такую вектор-функцию $\mathbf{W} = (u, v)$ из Q в R^2, что

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} - \nu \triangle \mathbf{W} - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{W} = \mathbf{f} \ \text{ в } \ Q, \tag{1}$$

$$\mathbf{W} = 0, \ \ x \in \partial\Omega, \ \ t \in (0, T), \ \ \mathbf{W} = \mathbf{W}_0, \ \text{ при } \ t = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{f}(x, t)$ и $\mathbf{W}_0(x) = (u_0(x), v_0(x))$ — заданные вектор-функции, причем $\mathbf{f} \in L^2(0, T; H)$, $\mathbf{W}_0 \in H$.

Аппроксимация задачи (1), (2) неявной схемой дает следующую систему уравнений относительно компонент u, v вектора скорости жидкости в двумерном случае [1, 2]:

$$\begin{aligned} u^n_{i,j} = {} & q_1 u^n_{i+1,j} + q_2 v^n_{i+1,j} + q_3 u^n_{i-1,j} + q_4 v^n_{i-1,j} + q_5 u^n_{i,j+1} + q_6 v^n_{i,j+1} + q_7 u^n_{i,j-1} + q_8 v^n_{i,j-1} + \\ & + q_{10} u^n_{i+1,j-1} + q_9 v^n_{i-1,j+1} + d\tau f^n_{1i,j} - e\tau f^n_{2i,j} + d u^{n-1}_{i,j} - e v^{n-1}_{i,j}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} v^n_{i,j} = {} & q_5 v^n_{i+1,j} + q_6 u^n_{i+1,j} + q_7 v^n_{i-1,j} + q_8 u^n_{i-1,j} + q_1 v^n_{i,j+1} + q_2 u^n_{i,j+1} + q_3 v^n_{i,j-1} + q_4 u^n_{i,j-1} + \\ & + q_{10} v^n_{i-1,j+1} + q_9 u^n_{i+1,j-1} + d\tau f^n_{2i,j} - e\tau f^n_{1i,j} + d v^{n-1}_{i,j} - e u^{n-1}_{i,j}, \end{aligned} \tag{4}$$

© К. К. Шакенов, 2002.

где

$$q_1 = \frac{(a+b)c - b^2}{c^2 - b^2}, \quad q_2 = -\frac{ab}{c^2 - b^2}, \quad q_3 = \frac{(a+b)c}{c^2 - b^2}, \quad q_4 = \frac{bc - ab}{c^2 - b^2}, \quad q_5 = \frac{ac}{c^2 - b^2},$$

$$q_6 = \frac{bc - (a+b)b}{c^2 - b^2}, \quad q_7 = \frac{ac - b^2}{c^2 - b^2}, \quad q_8 = -\frac{(a+b)b}{c^2 - b^2}, \quad q_9 = -\frac{bc}{c^2 - b^2}, \quad q_{10} = \frac{b^2}{c^2 - b^2},$$

$$d = \frac{c}{c^2 - b^2}\frac{1}{\tau}, \quad e = \frac{b}{c^2 - b^2}\frac{1}{\tau}, \quad a = \nu/h^2 > 0, \quad b = 1/(\varepsilon h^2) > 0, \quad c = 4a + 2b + 1/\tau > 0.$$

Здесь ν — коэффициент вязкости; ε — величина возмущения; τ — шаг по временной переменной; h — шаг по пространственным переменным.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *При фиксированном $\nu > 0$ всегда можно выбрать $\varepsilon > 0$ и $\tau > 0$ такими, что выполняется условие*

$$\sum_{i=1}^{10} |q_i| < 1, \tag{5}$$

причем ε можно выбрать сколь угодно малым.

Доказательство леммы можно найти в работе [2].

Обозначим через $\mathbf{X}^n$ для $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ вектор

$$\mathbf{X}^n = \{u_\alpha^n, v_\alpha^n\}, \;\; \mathbf{X}^0 = \{u_{0\alpha}, v_{0\alpha}\}, \;\; \alpha = 1, 2, \ldots, L.$$

Здесь n — номер временного слоя; α — номер узла; L — количество узлов; $\mathbf{X}^0$ — известный вектор, определяемый начальными данными $\mathbf{W}_0$ возмущенного уравнения Навье—Стокса.

Теперь (3), (4) запишем в матричном виде

$$\mathbf{X}^n = D\mathbf{X}^n + \mathbf{G}^n, \;\; n = 1, 2, \ldots, N, \tag{6}$$

где $\mathbf{G}^n = \mathbf{F}^n + C\mathbf{X}^{n-1}$, $\mathbf{G}^n = (g_1^n, \ldots, g_L^n)$. Матрица D имеет следующую структуру: внутреннему узлу с номером α соответствует строка $d_{\alpha,1}, \ldots, d_{\alpha,L}$, в которой 10 элементов равны $q_1, \ldots, q_{10}$ и $d_{\alpha,j_1} \neq d_{\alpha,j_2}$ для всех α и $j_1 \neq j_2$, а остальные — нули; граничному узлу с номером α соответствует строка $d_{\alpha,1} = d_{\alpha,2} = \ldots = d_{\alpha,L} = 0$; все диагональные элементы $d_{\alpha,\alpha} = 0$. Элементы вектора $\mathbf{F}^n = \{F_\alpha^n\}$ имеют следующую структуру: $F_\alpha^n = d\tau f_{1\alpha}^n - e\tau f_{2\alpha}^n$, если узел номер α — внутренний и уравнение — из системы (3); $F_\alpha^n = d\tau f_{2\alpha}^n - e\tau f_{1\alpha}^n$, если узел номер α — внутренний и уравнение — из системы (4); $F_\alpha^n = 0$, если узел номер α — граничный. Матрица $C = \{c_{i,j}\}$ имеет следующую структуру: $c_{\alpha,\alpha} = d, \; c_{\alpha+1,\alpha} = -e$, если уравнение — из (4), и $c_{\alpha,\alpha} = d, \; c_{\alpha,\alpha+1} = -e$, если уравнение — из (3).

Для системы (6) применима схема Неймана—Улама при фиксированном $n, \quad n = 1, \ldots, N$ в силу леммы (1). Систему (6) решаем последовательно, в порядке возрастания $n, \;\; n = 1, 2, \ldots, N$.

2. Дисперсии оценок

Пусть $\Lambda^{(M_n)}$ есть множество траекторий цепи Маркова длины M_n при условии, что почти все траектории конечны и $\chi_{\Lambda^{(M_n)}}$ — характеристическая функция, т. е. $\chi_{\Lambda^{(M_n)}}$ — функция траектории, равная 1, если траектория имеет длину M_n, и 0 в противном случае.

Обозначим через $\{\mathbf{p}, \wp\}$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_L)$, $\wp = \|p_{i,j}\|_1^L$, цепь Маркова, удовлетворяющую условиям:

1) $p_i > 0$, если $z_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, L$, где z_i — компоненты заданного вектора $\mathbf{Z}$;

2) $p_{i,j} > 0$, если $d_{i,j} \neq 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, L$.

Для $n = 1$ случайную величину $\beta^1_{M_1}$ определим на траекториях марковской цепи $i_0 \to i_1 \to \ldots \to i_{M_1}$ длины M_1 (на множестве $\Lambda^{(M_1)}$), ω_{i_m} — вероятность гибели частицы.

Если $\omega_{i_m} > 0$, то положим

$$\tilde{\beta}^1_{M_1} = \sum_{M_1=0}^{\infty} \chi_{\Lambda^{(M_1)}} \beta^1_{M_1}, \tag{7}$$

где $\beta^1_{M_1} = \sum\limits_{l=0}^{M_1} Q_l^{(m)}(i_0, \ldots, i_l) z_{i_l}$, $Q_i^{(m)}(i_0, \ldots, i_m) = q_i \mu_i^{(m)}(i_0, \ldots, i_m)$, $Q_i(i_0, i_1, \ldots) = q_{i_m} \mu_i(i_0, , i_m, \ldots)$, $q_{i_0} = g^1_{i_0}/p_{i_0}$, $q_{i_{m+1}} = q_{i_m} \dfrac{d_{i_m, i_{m+1}}}{p_{i_m, i_{m+1}}}$, вектор $\mathbf{g}^1 = \mathbf{F}^1 + C\mathbf{X}^0$ — известный вектор, и, если $\omega_{i_m} = 0$, то

$$\tilde{\beta}^1_m = \sum_{m=0}^{\infty} Q(i_0, i_1, \ldots) z_{i_m}. \tag{8}$$

В обоих случаях предполагается, что $\tilde{\beta}^1_m$ суммируема на $\Lambda^{(M_1)}$. Если для некоторого набора $(i_0, \ldots, i_m) \in \Omega_h^{(M_1+1)}$ выполнено

$$g^1_{i_0} d_{i_0, i_1} \ldots d_{i_{M_1-1}, i_{M_1}} z_{i_{M_1}} \neq 0, \tag{9}$$

то для него же справедливо

$$p_{i_0} p_{i_0, i_1} p_{i_1, i_2} \ldots p_{i_{M_1-1}, i_{M_1}} \omega_{i_{M_1}} > 0. \tag{10}$$

Известно, что несмещенность $E\tilde{\beta}^1_{M_1} = (\mathbf{Z}, \mathbf{X}^1)$ оценки $\tilde{\beta}^1_{M_1}$ имеет место для траекторий марковской цепи бесконечной длины. Здесь и далее E — оператор математического ожидания. В работах [3 − 7] изучены условия, налагаемые на $\mu_i^{(m)}$ требованием несмещенности оценки типа $\tilde{\beta}^1_{M_1} = \sum\limits_{M_1=0}^{\infty} \chi_{\Lambda^{(M_1)}} \beta^1_{M_1}$ при $\omega_{i_m} > 0$ для некоторого класса интегральных уравнений.

Теперь пусть оценка $\tilde{\beta}^1_{M_1}$ ε^1 — смещенная, т. е. $E\tilde{\beta}^1_{M_1} = \mathbf{Z}, \mathbf{X}^1) + \varepsilon^1$. В этом случае, очевидно, величина невязки для $n = 1$ системы (6) будет пропорциональной ε^1 и невязка стремится к нулю при стремлении длины цепи к бесконечности.

Перейдем на следующий временной слой. Пусть $n = 2$ и $g^2_{\varepsilon_1} = g^2 + c_1 \varepsilon^1$, тогда, рассуждая аналогично случаю $n = 1$, для оценки

$$\tilde{\beta}^2_{M_2} = \sum_{M_2=0}^{\infty} \chi_{\Lambda^{(M_2)}} \beta^2_{M_2}, \quad \beta^2_{M_2} = \sum_{l=0}^{M_2} Q_l^{(m)}(i_0 \ldots, i_m) z_{i_m} + \sum_{l=0}^{M_2} Q_l^{(m)}(i_0 \ldots, i_m) \varepsilon^1$$

получим $E\tilde{\beta}^2_{M_2} = (\mathbf{Z}, \mathbf{X}^2) + \varepsilon^2$, где $\varepsilon^2 = (\mathbf{Z}, \sum\limits_{m=0}^{M_1} D^m \varepsilon^1)$. Очевидно, что при $M_2 \to \infty$ ε^2 стремится к $(\mathbf{Z}, (E - D)^{-1} \varepsilon^1)$, а последнее выражение стремится к нулю при $\varepsilon^1 \to 0$.

Аналогично

$$\tilde{\beta}^N_{M_N} = \sum_{M_N=0}^{\infty} \chi_{L^{(M_N)}} \beta^N_{M_N},$$

где $\beta^N_{M_N} = \sum\limits_{l=0}^{M_N} Q_l^{(m)}(i_0,\ldots,i_m)z_{i_m} + \sum\limits_{l=0}^{M_N} Q_l^{(m)}(i_0,\ldots,i_m)\varepsilon^{N-1}$. И для этой оценки $E\tilde{\beta}^N_{M_N} = (\mathbf{Z},\mathbf{X}^N) + \varepsilon^N$, где $\varepsilon^N = \left(\mathbf{Z}, \sum\limits_{m=0}^{M_N} D^m\varepsilon^{N-1}\right)$, причем при $M_N \to \infty$ ε^N стремится к $(\mathbf{Z},(E-D)^{-1}\varepsilon^{N-1})$, а последнее выражение стремится к нулю при $\varepsilon^{N-1}\to 0$.

Таким образом, ε^N можно рассматривать как некоторую известную функцию $\varepsilon^N = \Im(\varepsilon^1,\ldots,\varepsilon^{N-1})$, причем $\Im(\varepsilon^1,\ldots,\varepsilon^{N-1}) \to 0$ при $\varepsilon^i \to 0$ для всех $i=1,\ldots,N-1$. Последнее условие связано с условием $M_i\to\infty$, $i=1,\ldots,N$.

Допустим, что $\omega_{i_m} > 0$ и $\sum\limits_{M_i=0}^{\infty} \chi_{\Lambda^{(M_i)}} \sum\limits_{l=0}^{M_i} \left|Q_l^{(M_i)} z_{i_l}\right|$, $i=1,\ldots,N$, суммируема на множестве траекторий $\Lambda^{(M_n)}$. Вычислим для всех $i=1,\ldots,N$

$$E\tilde{\beta}^i_{M_i} = \sum_{M_i=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{M_i}\sum_{|M_i+1|} g^i_{i_0} d_{i_0,i_1}\ldots d_{i_{m-1},i_m} z_{i_m}\Bigg\{\mu_i^{(m)}\omega_{i_m} + \\ + \sum_{k=M_i+1}^{\infty}\sum_{|M_k-M_i|}\mu_i^{(k)} p_{i_m,i_{m+1}}\ldots p_{i_{k-1},i_k}\omega_{i_k}\Bigg\}. \tag{11}$$

Приравнивая полученное выражение и выражение $\left(\mathbf{Z}, \sum\limits_{M_i=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{M_i} D^m g^i\right)$, $i=1,\ldots,N$, получаем достаточное условие несмещенности

$$\sum_{M_i=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{M_i}\sum_{|M_i+1|} g^i_{i_0} d_{i_0,i_1}\ldots d_{i_{m-1},i_m} z_{i_m}\Bigg\{1-\mu_i^{(m)}\omega_{i_m} - \\ - \sum_{k=M_i+1}^{\infty}\sum_{|M_k-M_i|}\mu_i^{(k)} p_{i_m,i_{m+1}}\ldots p_{i_{k-1},i_k}\omega_{i_k}\Bigg\} = 0. \tag{12}$$

Отсюда следует "дискретный аналог" достаточного условия несмещенности, если приравнять к нулю выражение в фигурных скобках

$$\mu_i^{(m)}\omega_{i_m} + \sum_{k=M_i+1}^{\infty}\sum_{|M_k-M_i|}\mu_i^{(k)} p_{i_m,i_{m+1}}\ldots p_{i_{k-1},i_k}\omega_{i_k} = 1,\ \ i_m = 0,1,\ldots,\ \ \ i=1,2,\ldots,N. \tag{13}$$

Далее предположим, что функция траектории $\sum\limits_{M_i=0}^{\infty}\chi_{\Lambda^{(M_i)}}\left(\sum\limits_{l=0}^{M_i}\left|Q_l^{(M_i)} z_{i_l}\right|\right)^2$, $i=1,\ldots,N$, суммируема. Тогда

$$E\left(\tilde{\beta}^i_{M_i}\right)^2 = \sum_{M_i=0}^{\infty}\sum_{|M_i+1|}\frac{(g^i_{i_0} d_{i_0,i_1}\ldots d_{i_{m-1},i_m})^2 z_{i_m}}{p_{i_0}p_{i_0,i_1}\ldots p_{i_{m-1},i_m}}\Bigg\{\left(\mu_i^{(m)}\right)^2\omega_{i_m} z_{i_m} + \\ + z_{i_m}\sum_{k=M_i+1}^{\infty}\sum_{|M_k-M_i|}\left(\mu_i^{(k)}\right)^2 p_{i_m,i_{m+1}}\ldots p_{i_{k-1},i_k}\omega_{i_k} + \\ + 2\sum_{j=M_i+1}^{\infty}\sum_{|M_j-M_i|} d_{i_m,i_{m+1}}\ldots d_{j_{m-1},j_m} z_{j_m}\Bigg[\mu_i^{(j)}\mu_j^{(j)}\omega_{j_m} + \\ + \sum_{k=M_j+1}^{\infty}\sum_{|M_k-M_j|}\mu_i^{(k)}\mu_j^{(k)} p_{j_m,j_{m+1}}\ldots p_{k_{m-1},k_m}\Bigg]\Bigg\}. \tag{14}$$

Если обозначим через

$$\alpha_i = \left(\mu_i^{(m)}\right)^2 \omega_{i_m} z_{i_m} + z_{i_m} \sum_{k=M_i+1}^{\infty} \sum_{|M_k-M_i|} \left(\mu_i^{(k)}\right)^2 p_{i_m,i_{m+1}} \dots p_{i_{k-1},i_k} \omega_{i_k} +$$
$$2 \sum_{j=M_i+1}^{\infty} \sum_{|M_j-M_i|} d_{i_m,i_{m+1}} \dots d_{j_{m-1},j_m} z_{j_m} \Big[\mu_i^{(j)} \mu_j^{(j)} \omega_{j_m} +$$
$$+ \sum_{k=M_j+1}^{\infty} \sum_{|M_k-M_j|} \mu_i^{(k)} \mu_j^{(k)} p_{j_m,j_{m+1}} \dots p_{k_{m-1},k_m} \Big], \tag{15}$$

то получим следующую теорему:

Теорема 1. *Если оценка*

$$\tilde{\beta}^i_{M_i} = \sum_{M_i=0}^{\infty} \chi_{\Lambda^{(M_i)}} \beta^i_{M_i}, \quad \textit{где} \quad \beta^i_{M_i} = \sum_{m=0}^{M_i} Q_i^{(M_i)}(i_0, \dots, i_m) z_{i_m}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

несмещена и

$$\sum_{M_i=0}^{\infty} \chi_{\Lambda^{(M_i)}} \left(\sum_{l=0}^{M_i} \left| Q_l^{(M_i)} z_{i_l} \right| \right)^2, \quad i = 1, \dots, N,$$

суммируема, то ее дисперсия конечна и равна

$$D\tilde{\beta}^i_{M_i} = \sum_{M_i=0}^{\infty} \sum_{|M_i+1|} \frac{(g^i_{i_0} d_{i_0,i_1} \dots d_{i_{m-1},i_m})^2 z_{i_m}}{p_{i_0} p_{i_0,i_1} \dots p_{i_{m-1},i_m}} \alpha_i - (\mathbf{Z}, \mathbf{X}^i)^2, \quad i = 1, \dots, N.$$

Список литературы

[1] Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.

[2] Ермаков С. М., Шакенов К. К. О применении метода Монте-Карло к уравнениям Навье—Стокса // Вест. ЛГУ. Сер. Математика, механика, астрономия. Л., 1986 (Деп. в ВИНИТИ 26.06.86. 6267 – В86).

[3] Хисамутдинов А. И. “Единичный” класс оценок для вычисления по методу Монте-Карло функционалов от решения интегрального уравнения 2-го рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1970. Т. 10, №5. С. 1269–1280.

[4] Хисамутдинов А. И. Оценки “единичного” класса с минимальной дисперсией // Вероятностные методы решения задачи математической физики: Сб. науч. тр. Новосибирск, 1971. С. 184–210.

[5] Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1975.

[6] Михайлов Г. А. Оптимизация весовых методов Монте-Карло. М.: Наука, 1987.

[7] Михайлов Г. А. Весовые методы. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.

Поступила в редакцию 27 июня 2001 г.,
в переработанном виде — 11 января 2002 г.