ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

М. В. Булатов
Институт динамики систем и теории управления СО РАН
Иркутск, Россия
e-mail: mvbul@icc.ru

A numerical algorithm with the second order of accuracy has been validated for a class of integral equations of the first kind having a single continuous solution.

Рассмотрим систему

$$\int_0^t K(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

где $K(t,\tau)$ — $(n\times n)$-матрица; $f(t)$ — известная, $x(t)$ — искомая n-мерные вектор-функции.

Входные данные $K(t,\tau)$ и $f(t)$ обладают той степенью гладкости, которая необходима для дальнейших рассуждений в областях $\Omega=\{(t,\tau) \mid 0 \le \tau \le t \le 1\}$ и $[0,1]$ соответственно.

Под решением исходной задачи будем понимать непрерывную вектор-функцию $x(t)$, которая обращает (1) в тождество.

В настоящее время достаточно хорошо изучены вопросы о единственности непрерывного решения и численные методы для систем (1), у которых либо $\det K(t,t) \ne 0$, $\forall t \in [0,1]$, либо $K(t,t) \equiv 0$ и $\det K'_t(t,\tau) \mid_{\tau=t} \ne 0$, $\forall t \in [0,1]$ (см. например, работы [1, 2] и приведенную в них библиографию). Для таких систем применяют вычислительные алгоритмы, разработанные для скалярного уравнения (1), у которого либо $K(t,t) \ne 0$, $\forall t \in [0,1]$, либо $K(t,t) \equiv 0$ и $K'_t(t,\tau) \mid_{\tau=t} \ne 0$, $\forall t \in [0,1]$.

В настоящей работе рассматриваются системы вида (1), у которых

$$K(t,t) \ne 0, \quad \text{но} \quad \det K(t,t) \equiv 0.$$

Перед формулировкой основных результатов приведем некоторые факты.

Определение 1 [3]. Пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$ удовлетворяет критерию "ранг — степень" на отрезке $[0,1]$, если

$$\mathrm{rank} A(t) = \deg\det(\lambda A(t) + B(t)) = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [0,1].$$

Определение 2 [4]. Матрица, обозначаемая как $A^-(t)$, называется полуобратной к матрице $A(t)$, если она удовлетворяет матричному уравнению

$$A(t)A^-(t)A(t) = A(t), \quad t \in [0,1].$$

Лемма [3]. *Если пучок матриц $\lambda A(t)+B(t)$ удовлетворяет критерию "ранг — степень" на отрезке $[0,1]$ и элементы матриц $A(t)$, $B(t)$ принадлежат классу C^l, то существуют невырожденные $(\forall t\in[0,1])$ матрицы $P(t)$ и $Q(t)$, элементы которых также принадлежат классу C^l, такие, что*

$$P(t)(\lambda A(t)+B(t))Q(t)=\lambda\begin{pmatrix}E_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}J(t) & 0\\ 0 & E_{n-k}\end{pmatrix}.$$

Теорема 1 [5]. *Пусть для задачи (1) выполнены условия:*
1) $\partial^2K(t,\tau)/\partial t^2\in C_\Omega,\ \ f(t)\in C^2$;
2) $rank K(t,t)=k=const,\ \forall t\in[0,1]$, пучок $\lambda K(t,t)+K_t^{'}(t,\tau)\mid_{\tau=t}$ удовлетворяет критерию "ранг — степень" на всем отрезке $[0,1]$;
3) $f(0)=0,\ rank K(0,0)=rank\{K(0,0)|f^{'}(0)\}$.
Тогда исходная система имеет единственное непрерывное решение.

Следующий пример иллюстрирует данную теорему. Рассмотрим систему

$$\int\limits_0^t\begin{pmatrix}\tau-2(t-\tau) & (1+t-2\tau)\\ (t-\tau) & (t-\tau)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(\tau)\\ x_2(\tau)\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\ t\in[0,1].$$

Выпишем пучок матриц

$$\lambda K(t,t)+K_t^{'}(t,\tau)\mid_{\tau=t}=\lambda\begin{pmatrix}t & 1-t\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathrm{rank}K(t,t)=1,\forall t\in[0,1]$, однако

$$\deg\det(\lambda K(t,t)+K_t^{'}(t,\tau)\mid_{\tau=t})=\deg(\lambda(2t-1)-3)=\begin{cases}0, & t=0.5,\\ 1, & t\neq 0.5.\end{cases}$$

Таким образом, в точке $t=0.5$ происходит ломка структуры пучка, и, как нетрудно заметить, помимо тривиального решения данная система имеет множество решений вида

$$x_1(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,0.5),\\ c\sqrt{2t-1}, & t\in[0.5,1];\end{cases}$$

$$x_2(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,0.5),\\ -c\sqrt{2t-1}, & t\in[0.5,1],\end{cases}$$

где c — произвольное число.

Перейдем к описанию численного алгоритма рассматриваемой задачи. Для приближенного решения системы (1) рассмотрим метод, основанный на формуле средних прямоугольников с дальнейшей линейной комбинацией.

Зададим на отрезке $[0,1]$ сетку

$$\Delta_h=\{t_i=ih,\ i=1,2,\ \ldots,\ N,\ h=1/N\}.$$

Обозначим $f_i=f(t_i)$, $K_{ij-1/2}=K(t_i,t_{j-1/2})$, $x_{j-1/2}$ — приближенное значение $x(t_{j-1/2})$, $\varepsilon_{j-1/2}=x(t_{j-1/2})-x_{j-1/2}$.

С учетом данных обозначений метод средних прямоугольников для задачи (1) имеет вид

$$h\sum_{j=1}^{i} K_{ij-1/2}x_{j-1/2} = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2}$$

Приближенное решение в узлах сетки будем находить по формуле

$$x_i = (x_{i+1/2} + x_{i-1/2})/2, \tag{3}$$

где $x_{i-1/2}$ являются решением системы (2).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда справедлива оценка*

$$\| x(t_j) - x_j \| = O(h^2), \quad j = 1, 2, 3, \ldots, N-1,$$

где x_j находятся по формулам (2), (3).

Доказательство. Для точного решения системы (1) справедлива формула

$$h\sum_{j=1}^{i} K_{ij-1/2}x(t_{j-1/2}) = f_i + \rho_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{4}$$

где ρ_i — остаточный член квадратурной формулы средних прямоугольников.

Таким образом, из равенств (2) и (4) получим

$$h\sum_{j=1}^{i} K_{i,j-1/2}\varepsilon_{j-1/2} = \rho_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{5}$$

Из i-й матричной строки (5) вычтем $(i-1)$-ю строку и разделим на h. Получим

$$\sum_{j=1}^{i-1}(K_{ij-1/2} - K_{i-1j-1/2})\varepsilon_{j-1/2} + K_{ii-1/2}\varepsilon_{i-1/2} = \Delta\rho_i/h, \quad i = 2, 4, \ldots, N, \tag{6}$$

где $\Delta\rho_i = \rho_i - \rho_{i-1}$.

Умножим систему (6) на матрицу $\mathrm{diag}\{V_{1/2}, V_{3/2}, \ldots, V_{N-1/2}\}$, где $V_{i-1/2} = E - K(t_{i-1/2}, t_{i-1/2})K^{-}(t_{i-1/2}, t_{i-1/2})$. Так как в силу определения 2 $V_{i-1/2}K(t_{i-1/2}, t_{i-1/2}) = 0$, получим

$$V_{i-1/2}\sum_{j=1}^{i-1}(K_{ij-1/2} - K_{i-1j-1/2})\varepsilon_{j-1/2} + V_{i-1/2}K_{ii-1/2}\varepsilon_{i-1/2} = V_{i-1/2}\Delta\rho_i/h.$$

Из i-й матричной строки последнего тождества вычтем $i-1$-ю строку и разделим на h. Итогом суммирования полученной системы с системой (6) является

$$\sum_{j=1}^{i-2}[(K_{ij-1/2} - K_{i-1j-1/2}) + (V_{i-1/2}(K_{ij-1/2} - K_{i-1j-1/2}) - V_{i-3/2}(K_{i-1j-1/2} - K_{i-2j-1/2}))/h]\varepsilon_{j-1/2} +$$
$$+[(K_{i-1i-3/2} - K_{i-2i-3/2}) + (V_{i-1/2}(K_{i-1i-3/2} - K_{i-2i-3/2}) - V_{i-3/2}(K_{i-1i-3/2} - K_{i-2i-3/2}))/h]\varepsilon_{i-3/2} +$$
$$+(V_{i-1/2}K_{ii-1/2}/h + K_{ii-1/2})\varepsilon_{i-1/2} = \Delta\rho_i/h + (V_{i-1/2}\Delta\rho_i/h - V_{i-3/2}\Delta\rho_{i-1}/h)/h. \tag{7}$$

В силу первого и второго условий теоремы и леммы существуют невырожденные для любого $t \in [0,1]$, $(n \times n)$-матрицы $P(t)$, $Q(t)$, такие, что

$$P(t)(\lambda K(t,t) + K_t'(t,\tau)\mid_{\tau=t})Q(t) = \lambda \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Таким образом,

$$K_{ii-1/2} = K(t_{i-1/2}, t_{i-1/2}) + 1/2hK_t'(t_{i-1/2},\tau)\mid_{\tau=t_{i-1/2}} + h^2M_i =$$

$$= P_{i-1/2}^{-1}\left(\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h/2J_{i-1/2} & 0 \\ 0 & 1/2hE_{n-k} \end{pmatrix}\right)Q_{i-1/2}^{-1} + h^2M_i. \tag{9}$$

Умножим систему (7) на матрицу $\bar{P} = \mathrm{diag}(P_{1/2}, P_{3/2}, \ldots, P_{N-1/2})$ и произведем замену переменной $\varepsilon_{i-1/2} = Q_{i-1/2}\epsilon_{i-1/2}$. Матрицы $P_{i-1/2}$ и $Q_{i-1/2}$ те же, что и в (8).

Учитывая первое и второе условия теоремы, формулы (8), (9) и лемму, получим

$$h\sum_{j=1}^{i-2} M_{ij-1/2}\epsilon_{j-1/2} + \begin{pmatrix} hM_{ii-3/2}^1 & hM_{ii-3/2}^2 \\ hM_{ii-3/2}^3 & 1/2E + hM_{ii-3/2}^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \epsilon_{i-3/2}^1 \\ \epsilon_{i-3/2}^2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} E + hM_{ii-1/2}^5 & hM_{ii-1/2}^6 \\ hM_{ii-1/2}^7 & 1/2E + hM_{ii-1/2}^8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \epsilon_{i-1/2}^1 \\ \epsilon_{i-1/2}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} P_{1i-1/2} & P_{2i-1/2} \\ P_{2i-1/2} & P_{2i-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta\rho_i^1/h \\ \Delta\rho_i^2/h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{1i-1/2} & P_{2i-1/2} \\ P_{2i-1/2} & P_{2i-1/2} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} V_{1i-1/2} & V_{2i-1/2} \\ V_{2i-1/2} & V_{2i-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta\rho_i^1/h \\ \Delta\rho_i^2/h \end{pmatrix} -\right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} V_{1i-3/2} & V_{2i-3/2} \\ V_{2i-3/2} & V_{2i-3/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta\rho_{i-1}^1/h \\ \Delta\rho_{i-1}^2/h \end{pmatrix}\right]/h, \tag{10}$$

где нормы матриц $M_{ii-3/2}^k, M_{ii-1/2}^{4+k}$ $(k = 1,2,3,4)$ равномерно ограничены.

Здесь понимается, что

$$V_{i-1/2} = \begin{pmatrix} V_{1i-1/2} & V_{2i-1/2} \\ V_{2i-1/2} & V_{2i-1/2} \end{pmatrix}, \quad P_{i-1/2} = \begin{pmatrix} P_{1i-1/2} & P_{2i-1/2} \\ P_{2i-1/2} & P_{2i-1/2} \end{pmatrix},$$

$$\epsilon_{i-1} = \begin{pmatrix} \epsilon_{i-1/2}^1 \\ \epsilon_{i-1/2}^2 \end{pmatrix}, \quad \Delta\rho_i = \begin{pmatrix} \Delta\rho_i^1 \\ \Delta\rho_i^2 \end{pmatrix},$$

а представление матриц в блочном виде

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

означает, что матрица A имеет размерность $(k \times k)$, матрица B имеет размерность $(k \times n-k)$, матрица C — размерность $(n-k \times k)$ и D — размерность $(n-k \times n-k)$.

Сложим первую i-ю блочную строку с первой $(i-1)$-й блочной строкой равенства (10), и полученный результат делим на 2. Учитывая формулу остаточного члена средних прямоугольников [6], тот факт, что

$$\epsilon_{i-1} = (\epsilon_{i-3/2} + \epsilon_{i-1/2})/2, \quad i = 2,3,\ldots,N-1,$$

(см. формулу (3)) и опуская громоздкие промежуточные выкладки, основанные на разложении в ряд Тейлора с точностью до $O(h^2)$ входных данных системы (10) в точке t_i, запишем

$$h\sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}\epsilon_j + (E + hL_{ii})\epsilon_i = S_i h^2, \tag{11}$$

где $\| L_{ij} \|$, $\| S_i \|$ $(j = 1, 2, \ldots, i)$ равномерно ограничены.

Переходя от тождества (11) к неравенству и применяя к последнему разностный аналог леммы Гронуола—Беллмана [1, 2, 7], получим, что

$$\| \epsilon_j \| \leq K_1 h^2, \quad K_1 < \infty.$$

Вспоминая, что $\varepsilon_j = Q_j^{-1}\epsilon_j$, имеем

$$\| \varepsilon_j \| \leq K_2 h^2, \quad K_2 < \infty.$$

Теорема доказана.

В работе [5] доказано, что, применяя метод средних прямоугольников (2) без линейной комбинации (3), можно получить оценку

$$\| x_{j-1/2} - x(t_{j-1/2}) \| = O(h).$$

Приведем результаты численных расчетов для системы

$$\int_0^t \begin{pmatrix} 1 & \exp(t-\tau) \\ \exp(t+\tau) & \exp(t+\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau)d\tau \\ x_2(\tau)d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\exp(t) - \exp(-t) + 1 \\ t\exp(t) + (\exp(3t) - \exp(t))/2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1],$$

имеющей решение $x_1(t) = \exp(-t),\ x_2(t) = \exp(t)$.

Ниже представлены результаты счета по формулам (2), (3)

h	0.2	0.1	0.05	0.025
err	0.0224391	0.0055856	0.0014824	0.0003820

и по формуле (2)

h	0.2	0.1	0.05	0.025
$err1$	0.0966172	0.0425560	0.0209894	0.0104049

Здесь $err = \max_i ||x_i - x(t_i)||$, $err1 = \max_i ||x_{i-1/2} - x(t_{i-1/2})||$.

В заключение отметим, что применение ряда многошаговых методов более высокого порядка точности, например Грегори или Симпсона, для численного решения данных систем приводит к расходящимся процессам [5].

Список литературы

[1] Апарцин А. С. Дискретизационные методы регуляризации некоторых интегральных уравнений 1-го рода // Методы численного анализа и оптимизации. Новосибирск: Наука, 1987. С. 263–297.

[2] Тен М. Я. Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Иркутск, 1985.

[3] Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996.

[4] Ваарман О. Обобщенные обратные отображения. Таллинн: Валгус, 1988.

[5] Булатов М. В. Численное решение систем интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, №4. С. 607–611.

[6] Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1973. 632 с.

[7] Brunner H., van der Houven P. J. The Numerical Solution of Volterra Equations. North-Holland, Amsterdam: CWI Monographs 3, 1986.

Поступила в редакцию 3 октября 2000 г.,
в переработанном виде — 5 января 2001 г.