Вычислительные технологии **Том 6, № 3, 2001**

ОБ ОДНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ СПЛАЙНЕ

С. Л. Кивва
Институт проблем математических машин и систем
НАН Украины, Киев
e-mail: serg@kivva.pp.kiev.ua
О. Б. Стеля
Национальный университет им. Т. Г. Шевченко, Киев, Украина

Parabolic non-periodic interpolating spline of minimal defect is considered. The spline is obtained by interpolation of tabular function values without any additional boundary conditions. Existence and uniqueness of this spline are investigated, estimations of an error of the spline interpolation for $f(x)$ from $C^{\alpha}[a,b]$, $\alpha = 0, 1, 2$ are obtained.

Введение

В последнее время интерполяционные сплайны все чаще по сравнению с полиномами и дробно-рациональными функциями используются для приближения сеточных функций [1–5]. Наиболее широкое применение получили сплайны степени не выше третьей. При построении таких сплайнов кроме условий интерполяции обычно налагаются еще дополнительные краевые условия. В работах [3, 5] для однозначного определения непериодических параболических сплайнов в качестве краевых условий требуется задание в граничных узлах значений первой или второй производной приближаемой функции. Очень часто значения этих производных неизвестны, а использование для их вычисления приближенных формул, например конечно-разностных соотношений, приводит к понижению порядка погрешности интерполяции [1]. Кроме того, при построении параболических сплайнов важным является выбор узлов сплайна и узлов интерполяции. Так, при их совпадении параболический сплайн не всегда существует. Отдавая предпочтение одному из концов отрезка при задании краевых условий, можно получить неустойчивый вычислительный процесс для определения параметров интерполяционного сплайна на отрезке [5].

В настоящей работе рассматривается параболический интерполяционный непериодический сплайн дефекта 1. Сплайн строится по заданным значениям функции в $N+3$-узлах интерполяции и выбранным N-узлам сплайна без задания дополнительных краевых условий. Для этого сплайна исследованы вопросы его существования и единственности, получены оценки погрешности интерполяции на неравномерной сетке.

1. Существование сплайна

Пусть на отрезке $[a,b]$ определены два разбиения Δ_t и Δ_τ:

$$\begin{aligned} \Delta_t: &\quad a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+2} = b, \\ \Delta_\tau: &\quad a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{N+1} = b, \end{aligned}$$

причем

$$t_i < \tau_i < t_{i+1}, \quad i = 1, 2, ..., N. \tag{1}$$

В узлах сетки Δ_t заданы значения некоторой функции $f(t)$: $f_i = f(t_i)$, $i = 0, 1, ..., N+2$.

Требуется на отрезке $[a, b]$ по разбиению Δ_τ построить параболический сплайн дефекта 1 $s(t)$, удовлетворяющий условиям:

$$s(t_i) = f(t_i), \quad i = 0, 1, ..., N + 2, \tag{2}$$

$$s(\tau_i - 0) = s(\tau_i + 0), \quad i = 1, 2, ..., N, \tag{3}$$

$$s'(\tau_i - 0) = s'(\tau_i + 0), \quad i = 1, 2, ..., N, \tag{4}$$

где $s'(t)$ — производная сплайна $s(t)$.

В дальнейшем систему точек Δ_t будем называть узлами интерполяции, а τ_i $(i = 1, 2, ..., N)$ — узлами сплайна $s(t)$.

Теорема 1. *Пусть $N \geq 1$ и на отрезке $[a, b]$ заданы разбиения Δ_t и Δ_τ, для которых выполняется (1).*

Тогда для любой функции $f(t) \in C[a, b]$ существует единственный сплайн $s(t)$, удовлетворяющий условиям (2)–(4).

Доказательство. Пусть в узлах τ_i сплайн $s(t)$ принимает значения φ_i: $s(\tau_i) = \varphi_i$, $i = 1, 2, ..., N$.

Тогда, используя интерполяционный полином Лагранжа, сплайн $s(t)$ можно представить в виде

для $t \in [\tau_0, \tau_1]$

$$s(t) = f_0 \frac{(t - t_1)(t - \tau_1)}{(t_1 - t_0)(\tau_1 - t_0)} - f_1 \frac{(t - t_0)(t - \tau_1)}{(t_1 - t_0)(\tau_1 - t_1)} + \varphi_1 \frac{(t - t_0)(t - t_1)}{(\tau_1 - t_0)(\tau_1 - t_1)}; \tag{5}$$

для $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i = 1, 2, ..., N - 1,$

$$s(t) = \varphi_i \frac{(t - t_{i+1})(t - \tau_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)(\tau_{i+1} - \tau_i)} - f_{i+1} \frac{(t - \tau_i)(t - \tau_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - t_{i+1})} + \varphi_{i+1} \frac{(t - \tau_i)(t - t_{i+1})}{(\tau_{i+1} - t_{i+1})(\tau_{i+1} - \tau_i)}; \tag{6}$$

для $t \in [\tau_N, \tau_{N+1}]$

$$s(t) = \varphi_N \frac{(t - t_{N+1})(t - t_{N+2})}{(\tau_N - t_{N+1})(\tau_N - t_{N+2})} - f_{N+1} \frac{(t - \tau_N)(t - t_{N+2})}{(t_{N+1} - \tau_N)(t_{N+2} - t_{N+1})} +$$

$$+ f_{N+2} \frac{(t - \tau_N)(t - t_{N+1})}{(t_{N+2} - t_{N+1})(t_{N+2} - \tau_N)}. \tag{7}$$

Из условий (4) для определения неизвестных φ_i получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$A\varphi = \phi, \tag{8}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N)^{\mathrm{T}}$; $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_N)^{\mathrm{T}}$,

$$\phi_1 = -f_0 \frac{\tau_1 - t_1}{(t_1 - t_0)(\tau_1 - t_0)} + f_1 \frac{\tau_1 - t_0}{(t_1 - t_0)(\tau_1 - t_1)} + f_2 \frac{\tau_2 - \tau_1}{(\tau_2 - t_2)(t_2 - \tau_1)}, \tag{9}$$

$$\phi_i = f_i \frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{(\tau_i - t_i)(t_i - \tau_{i-1})} + f_{i+1} \frac{\tau_{i+1} - \tau_i}{(\tau_{i+1} - t_{i+1})(t_{i+1} - \tau_i)}, \quad i = \overline{2, N-1}, \tag{10}$$

$$\phi_N = f_N \frac{\tau_N - \tau_{N-1}}{(\tau_N - t_N)(t_N - \tau_{N-1})} + f_{N+1} \frac{t_{N+2} - \tau_N}{(t_{N+2} - t_{N+1})(t_{N+1} - \tau_N)} -$$

$$- f_{N+2} \frac{t_{N+1} - \tau_N}{(t_{N+2} - \tau_N)(t_{N+2} - t_{N+1})}. \tag{11}$$

Матрица $A = \{a_{ij}\}_j^i$ является трехдиагональной положительной матрицей, ее элементы вычисляются по формулам

$$a_{ii} = \frac{2\tau_i - \tau_{i-1} - t_i}{(\tau_i - \tau_{i-1})(\tau_i - t_i)} + \frac{\tau_{i+1} + t_{i+1} - 2\tau_i}{(\tau_{i+1} - \tau_i)(t_{i+1} - \tau_i)}, \quad i = \overline{1, N}, \tag{12}$$

$$a_{ii+1} = \frac{t_{i+1} - \tau_i}{(\tau_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - t_{i+1})}, \quad i = \overline{1, N-1}, \tag{13}$$

$$a_{ii-1} = \frac{\tau_i - t_i}{(\tau_i - \tau_{i-1})(t_i - \tau_{i-1})}, \quad i = 2, 3, \ldots, N. \tag{14}$$

Нетрудно проверить, что с учетом (1) транспонированная матрица A^{T} есть матрица со строгим диагональным преобладанием, поэтому она обратима [6], а следовательно, система уравнений (8) однозначно разрешима, что и требовалось доказать.

2. Погрешность интерполяции

Для непрерывной на $[a, b]$ функции $f(t)$ обозначим через $\omega(f, \Delta_\tau)$ ее модуль непрерывности:

$$\omega(f, \Delta_\tau) = \max_{|t' - t''| < |\Delta_\tau|} |f(t') - f(t'')|,$$

где $|\Delta_\tau| = \max\limits_{1 \le i \le N-1} (\tau_i - \tau_{i-1})$.

В пространстве векторов $y \in R^N$ введем нормы $\|y\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le N} |y_i|$, $\|y\|_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} (y_i)^2 \right)^{1/2}$ и в пространстве матриц $C = \{c_{ij}\}_j^i$ согласованные с ними нормы $\|C\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le N} \sum\limits_{j=1}^{N} |c_{ij}|$, $\|C\|_2 =$ (максимальное собственное значение матрицы $C^{\mathrm{T}} C)^{1/2}$.

Пусть D — диагональная матрица с элементами

$$D = \mathrm{diag}\,(d_1, d_2, \ldots, d_N), \quad d_1 = 1, \quad d_i = d_{i-1} \frac{t_i - \tau_{i-1}}{\tau_i - t_i}, \quad i = 2, 3, \ldots, N.$$

Тогда матрица $B = DAD^{-1}$ является положительной симметричной трехдиагональной матрицей со строгим диагональным преобладанием и ее элементы определяются по формулам $b_{ii} = a_{ii}$, $i = \overline{1, N}$, $b_{ii-1} = \dfrac{1}{\tau_i - \tau_{i-1}}$, $i = 2, 3, \ldots, N$, причем $q_i = b_{ii} - \sum\limits_{j \ne i} b_{ij} > 0$, $i = \overline{1, N}$, где $q_1 = \dfrac{1}{\tau_1 - t_0} + \dfrac{1}{\tau_1 - t_1} + \dfrac{1}{t_2 - \tau_1}$; $q_i = \dfrac{1}{\tau_i - t_i} + \dfrac{1}{t_{i+1} - \tau_i}$, $i = 2, 3, \ldots, N-1$; $q_N = \dfrac{1}{\tau_N - t_N} + \dfrac{1}{t_{N+1} - \tau_N} + \dfrac{1}{t_{N+2} - \tau_N}$.

Обозначим через $p_i = a_{ii} - \sum\limits_{j \neq i} a_{ji}$, тогда $p_i > 0$ и

$$p_1 = \frac{1}{\tau_1 - t_0} + \frac{1}{\tau_1 - t_1} + \frac{2}{\tau_2 - \tau_1},$$

$$p_i = \frac{2}{\tau_i - \tau_{i-1}} + \frac{2}{\tau_{i+1} - \tau_i}, \quad i = 2, 3, ..., N-1,$$

$$p_N = \frac{2}{\tau_N - \tau_{N-1}} + \frac{1}{t_{N+1} - \tau_N} + \frac{1}{t_{N+2} - \tau_N}.$$

Лемма 1. *Пусть дана система уравнений*

$$Ay = g, \tag{15}$$

где элементы матрицы A определяются соотношениями (12) – (14).

Тогда

$$\max_{1 \le i \le N} |y_i| \le \mu \max_{1 \le i \le N} |g_i|, \qquad \mu = N^{1/2} \min \left\{ \max_{1 \le i \le N} \frac{1}{q_i}, \max_{1 \le i \le N} \frac{1}{p_i} \right\}. \tag{16}$$

Доказательство. Так как матрица A обратима, то решение системы уравнений (15) можно представить в виде $y = A^{-1} g$. Тогда [6, с. 104]

$$\|y\|_\infty \le \left\|A^{-1}\right\|_\infty \|g\|_\infty \le N^{1/2} \left\|A^{-1}\right\|_2 \|g\|_\infty.$$

С другой стороны, собственные числа матрицы A совпадают с собственными числами матриц A^{T} и B и, согласно теореме Гершгорина об области локализации собственных чисел, удовлетворяют соотношениям

$$\min_{1 \le i \le N} |\lambda_i| \ge \min_{1 \le i \le N} \left\{ |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ji}| \right\} = \min_{1 \le i \le N} p_i, \quad \min_{1 \le i \le N} |\lambda_i| \ge \min_{1 \le i \le N} \left\{ |b_{ii}| - \sum_{j \neq i} |b_{ij}| \right\} = \min_{1 \le i \le N} q_i.$$

Поэтому

$$\min_{1 \le i \le N} |\lambda_i| \ge \max \left\{ \min_{1 \le i \le N} q_i, \min_{1 \le i \le N} p_i \right\}, \quad \left\|A^{-1}\right\|_2 \le \min \left\{ \max_{1 \le i \le N} \frac{1}{q_i}, \max_{1 \le i \le N} \frac{1}{p_i} \right\},$$

следовательно,

$$\|y\|_\infty \le N^{1/2} \min \left\{ \max_{1 \le i \le N} \frac{1}{q_i}, \max_{1 \le i \le N} \frac{1}{p_i} \right\} \|g\|_\infty,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда*

$$\max_{1 \le i \le N} |y_i| \le \mu \max_{1 \le i \le N} |g_i|, \qquad \mu = \chi_2(D) \max_{1 \le i \le N} \frac{1}{q_i}, \tag{17}$$

где $\chi_2(D)$ — число обусловленности матрицы D.

Доказательство. Так как для матрицы A справедливо представление $A = D^{-1}BD$, то систему уравнений (15) перепишем в виде

$$BDy = Dg.$$

Пусть y — произвольный ненулевой вектор. Если k таково, что $\max\limits_{1\le i\le N} |d_i y_i| = |d_k y_k|$, то

$$\|Dg\|_\infty = \|BDy\|_\infty = \max_{1\le i\le N}\left|\sum_{j=1}^N b_{ij}d_jy_j\right| \ge \left|\sum_{j=1}^N b_{kj}d_jy_j\right| \ge |b_{kk}|\,|d_ky_k| - \sum_{j\ne k}|b_{kj}|\,|d_jy_j| \ge$$

$$\ge |d_ky_k|\left(|b_{kk}| - \sum_{j\ne k}|b_{kj}|\right) \ge |d_ky_k| \min_{1\le i\le N} q_i.$$

С другой стороны,

$$\max_{1\le i\le N}|d_ig_i| \le \max_{1\le i\le N}|d_i| \max_{1\le i\le N}|g_i| \quad \text{и} \quad \max_{1\le i\le N}|d_iy_i| \ge \min_{1\le i\le N}|d_i| \max_{1\le i\le N}|y_i|\,.$$

Поэтому

$$\|y\|_\infty \le \frac{\max\limits_{1\le i\le N}|d_i|}{\min\limits_{1\le i\le N}|d_i|} \max_{1\le i\le N}\frac{1}{q_i}\;\|g\|_\infty\,,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть $N \ge 1$ и на отрезке $[a,b]$ заданы разбиения Δ_t и Δ_τ, для которых выполняется (1).*

Если $f(t) \in C^2[a,b]$ и интерполяционный параболический сплайн $s(t)$ с узлами τ_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ и узлами интерполяции Δ_t удовлетворяет условиям (2)–(4), то имеет место неравенство

$$\left\|f^{(\nu)}(t) - s^{(\nu)}(t)\right\|_{C[a,b]} \le \gamma_\nu \omega(f'', \Delta_\tau), \quad \nu = 0, 1, 2,$$

где

$$\gamma_0 = \frac12|\Delta_\tau|^2 + \frac12\max\left\{\left[\mu\beta\max\left(1, \frac{\sigma_1}{4}\right) + |\Delta_\tau|^2\frac{\sigma_1}{4}\right], \left[\mu\beta\max\left(1, \frac{1}{4\sigma_{N+1}}\right) + |\Delta_\tau|^2\frac{\sigma_{N+1}}{4}\right],\right.$$

$$\left.\max_{2\le i\le N}\left[\mu\beta\left\{1 + \max\left(\sigma_i, \sigma_i^{-1}\right)\right\} + |\Delta_\tau|^2\frac{\sigma_i}{4}\right]\right\};$$

$$\gamma_1 = |\Delta_\tau| + \frac12\max\left[\left(\frac{\mu\beta}{t_{N+1}-\tau_N} + \frac{\mu\beta}{t_{N+2}-\tau_N} + |\Delta_\tau|\,\sigma_{N+1}\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{\mu\beta}{\tau_1 - t_1} + \frac{\mu\beta}{\tau_1 - t_0} + |\Delta_\tau|\,\sigma_1\right), \max_{2\le i\le N}\left(\frac{\mu\beta}{t_i - \tau_{i-1}} + \frac{\mu\beta}{\tau_i - t_i} + |\Delta_\tau|\,\sigma_i\right)\right];$$

$$\gamma_2 = 1 + \max\left\{\left[\sigma_1 + \frac{\mu\beta}{(\tau_1-t_0)(\tau_1-t_1)}\right], \left[\sigma_{N+1} + \frac{\mu\beta}{(t_{N+2}-\tau_N)(t_{N+1}-\tau_N)}\right],\right.$$

$$\left.\max_{2\le i\le N}\left[\sigma_i + \frac{\mu\beta}{(t_{i+1}-\tau_i)(\tau_{i+1}-t_{i+1})}\right]\right\},$$

причем

$$\beta = |\Delta_\tau| \max_{1\le i\le N}\left\{\frac{\tau_i - t_i}{t_i - \tau_{i-1}} + \frac{t_{i+1} - \tau_i}{\tau_{i+1} - t_{i+1}}\right\}, \quad \sigma_i = \frac{t_i - \tau_{i-1}}{\tau_i - t_i}.$$

Доказательство. Пусть $f = (f(\tau_1), f(\tau_2), ..., f(\tau_N))^{\mathrm{T}}$, где $f(\tau_i)$ — значение функции $f(t)$ в точке τ_i. Рассмотрим систему уравнений

$$A(\varphi - f) = \phi - Af = \psi, \tag{18}$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_N)^{\mathrm{T}}$, матрица A и вектор ϕ определяются соотношениями (12) – (14) и (9) – (11) соответственно.

Оценим ψ_i, $i = 1, 2, ..., N$. Для этого разложим функцию $f(t)$ в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= f(\tau_i) + f'(\tau_i)(t_{i+1} - \tau_i) + 1/2 f''(\xi')(t_{i+1} - \tau_i)^2, \quad \tau_i < \xi' < t_{i+1}; \\ f_{i-1} &= f(\tau_i) - f'(\tau_i)(\tau_i - t_i) + 1/2 f''(\eta')(\tau_i - t_i)^2, \quad t_i < \eta' < \tau_i. \end{aligned} \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18), получим

$$\begin{aligned} |\psi_i| = &\left| f_{i+1} \frac{\tau_{i+1} - \tau_i}{(\tau_{i+1} - t_{i+1})(t_{i+1} - \tau_i)} + f_i \frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{(\tau_i - t_i)(t_i - \tau_{i-1})} - f\,(\tau_{i-1}) \frac{\tau_i - t_i}{(\tau_i - \tau_{i-1})(t_i - \tau_{i-1})} - \right. \\ &\left. - f(\tau_i)\left[\frac{2\tau_i - \tau_{i-1} - t_i}{(\tau_i - \tau_{i-1})(\tau_i - t_i)} + \frac{\tau_{i+1} + t_{i+1} - 2\tau_i}{(\tau_{i+1} - \tau_i)(t_{i+1} - \tau_i)}\right] - f(\tau_{i+1}) \frac{t_{i+1} - \tau_i}{(\tau_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - t_{i+1})} \right| = \\ = &\left| (f(\tau_i) - f(\tau_{i-1})) \frac{\tau_i - t_i}{(\tau_i - \tau_{i-1})(t_i - \tau_{i-1})} + (f(\tau_i) - f(\tau_{i+1})) \frac{t_{i+1} - \tau_i}{(\tau_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - t_{i+1})} + \right. \\ &\left. + f'(\tau_i) \frac{\tau_{i+1} - \tau_i}{\tau_{i+1} - t_{i+1}} - f'(\tau_i) \frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{t_i - \tau_{i-1}} + \frac{1}{2} f''(\eta') \frac{(\tau_i - \tau_{i-1})(\tau_i - t_i)}{t_i - \tau_{i-1}} + \frac{1}{2} f''(\xi') \frac{(\tau_{i+1} - \tau_i)(t_{i+1} - \tau_i)}{\tau_{i+1} - t_{i+1}} \right| = \\ = &\frac{1}{2} \left| (f''(\eta') - f''(\eta'')) \frac{(\tau_i - \tau_{i-1})(\tau_i - t_i)}{t_i - \tau_{i-1}} + (f''(\xi') - f''(\xi'')) \frac{(\tau_{i+1} - \tau_i)(t_{i+1} - \tau_i)}{\tau_{i+1} - t_{i+1}} \right| \le \\ \le &\frac{1}{2} \omega(f'', \Delta_\tau) \times |\Delta_\tau| \max_{1 \le i \le N} \left\{ \frac{\tau_i - t_i}{t_i - \tau_{i-1}} + \frac{t_{i+1} - \tau_i}{\tau_{i+1} - t_{i+1}} \right\}, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f(\tau_i) - f(\tau_{i+1}) &= -f'(\tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i) - 1/2 f''(\xi'')(\tau_{i+1} - \tau_i)^2, \quad \tau_i < \xi'' < \tau_{i+1}; \\ f(\tau_i) - f(\tau_{i-1}) &= f'(\tau_i)(\tau_i - \tau_{i-1}) - 1/2 f''(\eta'')(\tau_i - \tau_{i-1})^2, \quad \tau_{i-1} < \eta'' < \tau_i. \end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, из (16), (17) для системы уравнений (18) имеем

$$|\varphi_i - f(\tau_i)| \le \frac{\mu\beta}{2} \omega(f'', \Delta_\tau), \quad i = \overline{1, N}. \tag{21}$$

Теперь оценим для $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, ..., N$ модуль разности функции $f(t)$ и параболического сплайна $s(t)$. Используя разложение

$$f(t) = f(\tau_i) + f'(\tau_i)(t - \tau_i) + 1/2 f''(\eta)(t - \tau_i)^2 \quad (\tau_i < \eta < t)$$

равенства (5) – (7), (19), (20) и неравенства (21), получим:

для $t \in [\tau_0, \tau_1]$

$$|s(t) - f(t)| = \left| (\varphi_1 - f(\tau_1)) \frac{(t - t_0)(t - t_1)}{(\tau_1 - t_0)(\tau_1 - t_1)} - f(t) + f(\tau_0) \frac{(t - t_1)(t - \tau_1)}{(t_1 - t_0)(\tau_1 - t_0)} - \right.$$

$$-f_1\frac{(t-t_0)(t-\tau_1)}{(t_1-t_0)(\tau_1-t_1)}+f(\tau_1)\frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(\tau_1-t_0)(\tau_1-t_1)}\Bigg|=\Bigg|(\varphi_1-f(\tau_1))\frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(\tau_1-t_0)(\tau_1-t_1)}-$$

$$-f(t)+f(t_0)+f'(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2}f''(\xi'')\frac{(t-t_0)(t-t_1)(\tau_1-t_0)}{\tau_1-t_1}-$$

$$-\frac{1}{2}f''(\xi')\ \frac{(t-t_0)(t-\tau_1)(t_1-t_0)}{\tau_1-t_1}\Bigg|=\Bigg|(\varphi_1-f(\tau_1))\frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(\tau_1-t_0)(\tau_1-t_1)}+$$

$$+\frac{1}{2}(f''(\xi'')-f''(\eta))(t-t_0)^2+\frac{1}{2}(f''(\xi'')-f''(\xi'))(t-t_0)(t-\tau_1)\ \frac{t_1-t_0}{\tau_1-t_1}\Bigg|\le$$

$$\le\frac{1}{2}\omega(f'',\Delta_\tau)\left[\mu\beta\max\left(1,\frac{1}{4}\frac{t_1-t_0}{\tau_1-t_1}\right)+|\Delta_\tau|^2\left(1+\frac{1}{4}\frac{t_1-t_0}{\tau_1-t_1}\right)\right]; \tag{22}$$

для $t\in[\tau_i,\tau_{i+1}]$ $(i=1,2,\ ...,\ N-1)$

$$|s(t)-f(t)|=\Bigg|(\varphi_i-f(\tau_i))\frac{(t-t_{i+1})(t-\tau_{i+1})}{(t_{i+1}-\tau_i)(\tau_{i+1}-\tau_i)}+f(\tau_i)\frac{(t-t_{i+1})(t-\tau_{i+1})}{(t_{i+1}-\tau_i)(\tau_{i+1}-\tau_i)}-$$

$$-f(t)+(\varphi_{i+1}-f(\tau_{i+1}))\frac{(t-t_{i+1})(t-\tau_i)}{(\tau_{i+1}-t_{i+1})(\tau_{i+1}-\tau_i)}-f_{i+1}\frac{(t-\tau_{i+1})(t-\tau_i)}{(\tau_{i+1}-t_{i+1})(t_{i+1}-\tau_i)}+$$

$$+f(\tau_{i+1})\ \frac{(t-\tau_i)(t-\tau_{i+1})}{(\tau_{i+1}-\tau_i)(\tau_{i+1}-t_{i+1})}\Bigg|=\Bigg|(\varphi_i-f(\tau_i))\frac{(t-t_{i+1})(t-\tau_{i+1})}{(t_{i+1}-\tau_i)(\tau_{i+1}-\tau_i)}+$$

$$+(\varphi_{i+1}-f(\tau_{i+1}))\frac{(t-t_{i+1})(t-\tau_i)}{(\tau_{i+1}-t_{i+1})(\tau_{i+1}-\tau_i)}+\frac{1}{2}(f''(\xi'')-f''(\eta))(t-\tau_i)^2+$$

$$+\frac{1}{2}(f''(\xi'')-f''(\xi'))(t-\tau_i)(t-\tau_{i+1})\ \frac{t_{i+1}-\tau_i}{\tau_{i+1}-t_{i+1}}\Bigg|\le\frac{1}{2}\omega(f'',\Delta_\tau)\times$$

$$\times\left[\mu\beta\left\{1+\max\left(\frac{\tau_{i+1}-t_{i+1}}{t_{i+1}-\tau_i},\frac{t_{i+1}-\tau_i}{\tau_{i+1}-t_{i+1}}\right)\right\}+|\Delta_\tau|^2\left(1+\frac{1}{4}\frac{t_{i+1}-\tau_i}{\tau_{i+1}-t_{i+1}}\right)\right]; \tag{23}$$

для $t\in[\tau_N,\tau_{N+1}]$

$$|s(t)-f(t)|=\Bigg|(\varphi_N-f(\tau_N))\frac{(t-t_{N+1})(t-t_{N+2})}{(t_{N+2}-\tau_N)(t_{N+1}-\tau_N)}-f(t)+$$

$$+f(\tau_N)\frac{(t-t_{N+1})(t-t_{N+2})}{(t_{N+2}-\tau_N)(t_{N+1}-\tau_N)}-f_{N+1}\frac{(t-\tau_N)(t-t_{N+2})}{(t_{N+2}-t_{N+1})(t_{N+1}-\tau_N)}+$$

$$+f(\tau_{N+1})\ \frac{(t-t_{N+1})(t-\tau_N)}{(t_{N+2}-\tau_N)(t_{N+2}-t_{N+1})}\Bigg|=\Bigg|(\varphi_N-f(\tau_N))\frac{(t-t_{N+1})(t-t_{N+2})}{(t_{N+2}-\tau_N)(t_{N+1}-\tau_N)}+$$

$$+\frac{1}{2}(f''(\xi'')-f''(\eta))(t-\tau_N)^2+\frac{1}{2}(f''(\xi'')-f''(\xi'))(t-\tau_N)(t-t_{N+2})\ \frac{t_{N+1}-\tau_N}{t_{N+2}-t_{N+1}}\Bigg|\le$$

$$\le\frac{1}{2}\omega(f'',\Delta_\tau)\left[\mu\beta\max\left(1,\frac{1}{4}\frac{t_{N+2}-t_{N+1}}{t_{N+1}-\tau_N}\right)+|\Delta_\tau|^2\left(1+\frac{1}{4}\frac{t_{N+1}-\tau_N}{t_{N+2}-t_{N+1}}\right)\right]. \tag{24}$$

Модуль разности первых производных функций $f(t)$ и $s(t)$ оценим так:

для $t \in [\tau_0, \tau_1]$

$$|f'(t) - s'(t)| = \bigg|(f(\tau_1) - \varphi_1)\frac{2t - t_0 - t_1}{(\tau_1 - t_0)(\tau_1 - t_1)} + f'(t) - f(\tau_1)\frac{2t - t_0 - t_1}{(\tau_1 - t_0)(\tau_1 - t_1)} +$$

$$+ f_1\frac{2t - t_0 - \tau_1}{(t_1 - t_0)(\tau_1 - t_1)} - f(\tau_0)\,\frac{2t - t_1 - \tau_1}{(t_1 - t_0)(\tau_1 - t_0)}\bigg| = \bigg|\frac{(f(\tau_1) - \varphi_1)(2t - t_0 - t_1)}{(\tau_1 - t_0)(\tau_1 - t_1)} +$$

$$+ (f''(\eta) - f''(\xi''))(t - t_0) + \frac{1}{2}(f''(\xi') - f''(\xi''))(2t - t_0 - \tau_1)\,\frac{t_1 - t_0}{\tau_1 - t_1}\bigg| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\omega(f'', \Delta_\tau)\left[\mu\beta\left(\frac{1}{\tau_1 - t_1} + \frac{1}{\tau_1 - t_0}\right) + |\Delta_\tau|\left(2 + \frac{t_1 - t_0}{\tau_1 - t_1}\right)\right]; \qquad (25)$$

для $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$

$$|f'(t) - s'(t)| = \bigg|(f(\tau_i) - \varphi_i)\frac{2t - t_{i+1} - \tau_{i+1}}{(t_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i)} +$$

$$+ (f(\tau_{i+1}) - \varphi_{i+1})\frac{2t - t_{i+1} - \tau_i}{(\tau_{i+1} - t_{i+1})(\tau_{i+1} - \tau_i)} + f'(t) - f(\tau_i)\frac{2t - t_{i+1} - \tau_{i+1}}{(t_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i)} +$$

$$+ f_{i+1}\frac{2t - \tau_i - \tau_{i+1}}{(t_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - t_{i+1})} - f(\tau_{i+1})\,\frac{2t - t_{i+1} - \tau_i}{(\tau_{i+1} - t_{i+1})(\tau_{i+1} - \tau_i)}\bigg| =$$

$$= \bigg|(f(\tau_i) - \varphi_i)\frac{2t - t_{i+1} - \tau_{i+1}}{(t_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i)} + (f(\tau_{i+1}) - \varphi_{i+1})\frac{2t - t_{i+1} - \tau_i}{(\tau_{i+1} - t_{i+1})(\tau_{i+1} - \tau_i)} +$$

$$+ (f''(\eta) - f''(\xi''))(t - \tau_i) + \frac{1}{2}(f''(\xi') - f''(\xi''))(2t - \tau_i - \tau_{i+1})\,\frac{t_{i+1} - \tau_i}{\tau_{i+1} - t_{i+1}}\bigg| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\omega(f'', \Delta_\tau)\left[\mu\beta\left\{\frac{1}{t_{i+1} - \tau_i} + \frac{1}{\tau_{i+1} - t_{i+1}}\right\} + |\Delta_\tau|\left(2 + \frac{t_{i+1} - \tau_i}{\tau_{i+1} - t_{i+1}}\right)\right]; \qquad (26)$$

для $t \in [\tau_N, \tau_{N+1}]$

$$|f'(t) - s'(t)| = \bigg|(f(\tau_N) - \varphi_N)\frac{2t - t_{N+1} - t_{N+2}}{(t_{N+2} - \tau_N)(t_{N+1} - \tau_N)} + f'(t) -$$

$$- f(\tau_N)\frac{2t - t_{N+1} - t_{N+2}}{(t_{N+2} - \tau_N)(t_{N+1} - \tau_N)} + f_{N+1}\frac{2t - \tau_N - t_{N+2}}{(t_{N+2} - t_{N+1})(t_{N+1} - \tau_N)} -$$

$$- f(\tau_{N+1})\frac{2t - t_{N+1} - \tau_N}{(t_{N+2} - \tau_N)(t_{N+2} - t_{N+1})}\bigg| = \bigg|(f(\tau_N) - \varphi_N)\frac{2t - t_{N+1} - t_{N+2}}{(t_{N+2} - \tau_N)(t_{N+1} - \tau_N)} +$$

$$+ (f''(\eta) - f''(\xi''))(t - \tau_N) + \frac{1}{2}(f''(\xi') - f''(\xi''))(2t - t_{N+2} - \tau_N)\,\frac{t_{N+1} - \tau_N}{t_{N+2} - t_{N+1}}\bigg| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\omega(f'', \Delta_\tau)\left[\mu\beta\left[\frac{1}{t_{N+1} - \tau_N} + \frac{1}{t_{N+2} - \tau_N}\right] + |\Delta_\tau|\left(2 + \frac{t_{N+1} - \tau_N}{t_{N+2} - t_{N+1}}\right)\right]. \qquad (27)$$

Модуль разности вторых производных функций $f(t)$ и $s(t)$ оценим следующим образом:

для $t \in [\tau_0, \tau_1]$

$$|f''(t) - s''(t)| = \left|(f(\tau_1) - \varphi_1)\frac{2}{(\tau_1 - t_0)(\tau_1 - t_1)} + f''(t) - f(\tau_0)\frac{2}{(t_1 - t_0)(\tau_1 - t_0)} + \right.$$

$$\left. + f_1\frac{2}{(t_1 - t_0)(\tau_1 - t_1)} - f(\tau_1)\ \frac{2}{(\tau_1 - t_0)(\tau_1 - t_1)}\right| = \left|\frac{2(f(\tau_1) - \varphi_1)}{(\tau_1 - t_0)(\tau_1 - t_1)} + \right.$$

$$\left. + (f''(t) - f''(\xi'')) + (f''(\xi') - f''(\xi''))\ \frac{t_1 - t_0}{\tau_1 - t_1}\right| \leq$$

$$\leq \omega(f'', \Delta_\tau)\left\{\frac{\mu\beta}{(\tau_1 - t_0)(\tau_1 - t_1)} + 1 + \frac{t_1 - t_0}{\tau_1 - t_1}\right\}; \tag{28}$$

для $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ $(i = 1, 2,\ \ldots,\ N-1)$

$$|f''(t) - s''(t)| = \left|(f(\tau_i) - \varphi_i)\frac{2}{(t_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i)} + \right.$$

$$+ (f(\tau_{i+1}) - \varphi_{i+1})\frac{2}{(\tau_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - t_{i+1})} + f''(t) - f(\tau_i)\frac{2}{(t_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i)} +$$

$$\left. + f_{i+1}\frac{2}{(t_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - t_{i+1})} - f(\tau_{i+1})\ \frac{2}{(\tau_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - t_{i+1})}\right| =$$

$$= \left|(f(\tau_i) - \varphi_i)\frac{2}{(t_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i)} + (f(\tau_{i+1}) - \varphi_{i+1})\frac{2}{(\tau_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - t_{i+1})} + \right.$$

$$\left. + (f''(t) - f''(\xi'')) + (f''(\xi') - f''(\xi''))\ \frac{t_{i+1} - \tau_i}{\tau_{i+1} - t_{i+1}}\right| \leq$$

$$\leq \omega(f'', \Delta_\tau)\left\{\frac{\mu\beta}{(t_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - t_{i+1})} + 1 + \frac{t_{i+1} - \tau_i}{\tau_{i+1} - t_{i+1}}\right\}; \tag{29}$$

для $t \in [\tau_N, \tau_{N+1}]$

$$|f''(t) - s''(t)| = \left|(f(\tau_N) - \varphi_N)\frac{2}{(t_{N+2} - \tau_N)(t_{N+1} - \tau_N)} + f''(t) - \right.$$

$$- f(\tau_N)\frac{2}{(t_{N+2} - \tau_N)(t_{N+1} - \tau_N)} + f_{N+1}\frac{2}{(t_{N+2} - t_{N+1})(t_{N+1} - \tau_N)} -$$

$$\left. - f(\tau_{N+1})\ \frac{2}{(t_{N+2} - t_{N+1})(t_{N+2} - \tau_N)}\right| = \left|(f(\tau_N) - \varphi_N)\frac{2}{(t_{N+2} - \tau_N)(t_{N+1} - \tau_N)} + \right.$$

$$\left. + (f''(t) - f''(\xi'')) + (f''(\xi') - f''(\xi''))\ \frac{t_{N+1} - \tau_N}{t_{N+2} - t_{N+1}}\right| \leq$$

$$\leq \omega(f'', \Delta_\tau)\left\{\frac{\mu\beta}{(t_{N+2} - \tau_N)(t_{N+1} - \tau_N)} + 1 + \frac{t_{N+1} - \tau_N}{t_{N+2} - t_{N+1}}\right\}. \tag{30}$$

Из оценок (22) – (30) и следует справедливость теоремы 2.
Аналогично устанавливается справедливость следующих теорем.

Теорема 3. *Пусть $N \geq 1$ и на отрезке $[a,b]$ заданы разбиения Δ_t и Δ_τ, для которых выполняется (1).*

Если $f(t) \in C^1[a,b]$ и интерполяционный параболический сплайн $s(t)$ с узлами τ_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ и узлами интерполяции Δ_t удовлетворяет условиям (2) – (4), то имеет место неравенство

$$\left\|f^{(\nu)}(t) - s^{(\nu)}(t)\right\|_{C[a,b]} \leq \gamma'_\nu \omega(f', \Delta_\tau), \quad \nu = 0, 1,$$

где

$$\gamma'_0 = |\Delta_\tau| + \max\left\{\left[\mu\beta_1 \max\left(1, \frac{\sigma_1}{4}\right) + |\Delta_\tau| \max\left(1, \frac{\sigma_1}{4}\right)\right],\right.$$

$$\max_{2\leq i\leq N}\left[\mu\beta_1\left\{1 + \max\left(\sigma_i, \sigma_i^{-1}\right)\right\} + |\Delta_\tau| \max\left(1, \frac{\sigma_i}{4}\right)\right],$$

$$\left.\left[\mu\beta_1 \max\left(1, \frac{1}{4\sigma_{N+1}}\right) + |\Delta_\tau| \ \max\left(1, \frac{\sigma_{N+1}}{4}\right)\right]\right\};$$

$$\gamma'_1 = 3 + \max\left\{\sigma_1 + \frac{\mu\beta_1}{\tau_1 - t_0} + \frac{\mu\beta_1}{\tau_1 - t_1}, \sigma_{N+1} + \frac{\mu\beta_1}{t_{N+1} - \tau_N} + \frac{\mu\beta_1}{t_{N+2} - \tau_N},\right.$$

$$\left.\max_{2\leq i\leq N}\left[\sigma_i + \frac{\mu\beta_1}{t_i - \tau_{i-1}} + \frac{\mu\beta_1}{\tau_i - t_i}\right]\right\},$$

причем

$$\beta_1 = \max_{1\leq i\leq N}\left[2 + \frac{\tau_i - t_i}{t_i - \tau_{i-1}} + \frac{t_{i+1} - \tau_i}{\tau_{i+1} - t_{i+1}}\right], \quad \sigma_i = \frac{t_i - \tau_{i-1}}{\tau_i - t_i}.$$

Теорема 4. *Пусть $N \geq 1$ и на отрезке $[a,b]$ заданы разбиения Δ_t и Δ_τ, для которых выполняется (1).*

Если $f(t) \in C[a,b]$ и интерполяционный параболический сплайн $s(t)$ с узлами τ_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ и узлами интерполяции Δ_t удовлетворяет условиям (2) – (4), то имеет место неравенство

$$\|f(t) - s(t)\|_{C[a,b]} \leq \gamma''\omega(f, \Delta_\tau),$$

где

$$\gamma'' = 2 + \max\left\{\left[\sigma_1 + 2\mu\beta_2 \max\left(1, \frac{\sigma_1}{4}\right) + \max\left(1 + 2\sigma_1, \frac{1}{4}\left[\sigma_1^{-1} + (1 + \sigma_1)^{-1}\right]\right)\right],\right.$$

$$\left[\sigma_{N+1} + 2\mu\beta_2 \max\left(1, \frac{\sigma_{N+1}^{-1}}{4}\right) + \max\left(1 + 2\sigma_{N+1}, \frac{1}{4}\left[\sigma_{N+1}^{-1} + (1 + \sigma_{N+1})^{-1}\right]\right)\right],$$

$$\left.\max_{2\leq i\leq N}\left[\sigma_i + 2\mu\beta_2\left(1 + \max\left(\sigma_i, \sigma_i^{-1}\right)\right) + \max\left(1 + 2\sigma_i, \frac{1}{4}\left[\sigma_i^{-1} + (1 + \sigma_i)^{-1}\right]\right)\right]\right\};$$

$$\beta_2 = \max_{1\leq i\leq N+1}\left[\frac{1}{\tau_i - t_i} + \frac{1}{t_i - \tau_{i-1}} + \frac{1}{\tau_i - \tau_{i-1}}\right]; \quad \sigma_i = \frac{t_i - \tau_{i-1}}{\tau_i - t_i}.$$

Список литературы

[1] Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.

[2] Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1987.

[3] Макаров В. Л., Хлобыстов В. В. Сплайн-аппроксимация функций. М.: Высш. школа, 1983.

[4] Малоземов В. Н., Певный А. Б. Полиномиальные сплайны. Л.: ЛГУ, 1986.

[5] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.

[6] Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.

Поступила в редакцию 10 августа 2000 г.,
в переработанном виде — 17 января 2001 г.