

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА: НЕКОТОРЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ И ОТКРЫТЫЕ ПРОБЛЕМЫ

С. П. БАУТИН

Уральский государственный университет путей сообщения

Екатеринбург, Россия

e-mail: bautin@ac.usart.ru

Some of the unsolved problems and unanswered questions have been formulated that researchers encounter in providing the strict mathematical description of gas flows. The first part of the mentioned problems include the flows described by a hyperbolic system of gas dynamics equations. The second group of unsolved problems and unanswered questions is associated with the flows of the viscous heat conducting compressed medium described by the complete system of Navier — Stokes equations (the system of the mixed parabolic and hyperbolic type).

Начало систематическому исследованию математических задач, связанных с описанием течений газа, положила классическая работа Б. Римана в 1860 г. [1]. На протяжении последующих 140-летних исследований в этом направлении накоплен большой опыт и решены многие трудные задачи. Однако ряд важных как в теоретическом, так и прикладном аспектах задач остаются нерешенными до сих пор.

В настоящей работе сформулированы некоторые нерешенные задачи и открытые проблемы строгого математического описания течений газа, показаны возможные подходы к их решению и сделана попытка наметить направления дальнейших исследований.

Успешное решение таких задач поможет лучше понять и обосновать свойства сложных газовых течений, что в свою очередь послужит основой для надежного математического моделирования при создании различных технических устройств, функционирующих в сплошных средах или использующих свойства потоков жидкости и газа. При этом не ставится под сомнение значимость приближенного решения задач газовой динамики как численными, так и приближенными аналитическими методами. Во многих случаях эти методы сегодня являются единственно доступными из-за крайней трудности строгого решения таких задач. Однако с каким бы мелким шагом сетки ни проводился численный расчет, какие приближенные формулы ни были получены, всегда будет стоять вопрос о достоверности результатов.

Отметим, что большая часть из приведенных ниже задач и проблем обсуждалась на различных конференциях и семинарах.

1. Нетеплопроводный нормальный газ

Известно [2], что течения невязкого нетеплопроводного газа описываются системой уравнений газовой динамики для нормального газа

$$\begin{aligned} \rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \left[f_\rho(\rho, S) \nabla \rho + f_S(\rho, S) \nabla S \right] &= \mathbf{0}, \\ S_t + \mathbf{u} \cdot \nabla S &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где искомыми функциями являются ρ – плотность газа, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор скорости газа (u_i – его проекции на соответствующие декартовы оси, $i = 1, 2, 3$) и S – удельная энтропия. Давление газа задается с помощью уравнения состояния $p = f(\rho, S)$. Все указанные функции в общем случае зависят от $t, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Иногда при исследовании свойств течений газа ограничиваются рассмотрением политропного газа с уравнением состояния $p = A^2(S)\rho^\gamma/\gamma$, где показатель политропы газа – константа ($\gamma = \text{const} > 1$). В этом случае можно ввести новые неизвестные функции $\vartheta = \rho^{(\gamma-1)}$, $s = A^2(S)$. Тогда квадрат скорости звука в газе есть $c^2 = s\vartheta$, а сама система уравнений газовой динамики содержит только квадратичные нелинейности.

Под решением той или иной задачи и проблемы подразумевается строгое математическое обоснование существования и единственности решения системы (1) в каком-либо функциональном пространстве или доказательство того, что та или иная предложенная конструкция точно (математически строго) решает рассматриваемую для этой системы начально-краевую задачу (пусть и без обоснования единственности).

Первый круг нерешенных задач и открытых проблем связан со слабыми разрывами в течениях газа.

Задача 1.1. *Требуется описать одномерное нестационарное течение, возникающее после прихода на ось или в центр симметрии слабого разрыва, отделяющего однородный покоящийся газ от волны разрежения, вызванной, например, мгновенным удалением внешней цилиндрической или сферической стенки.*

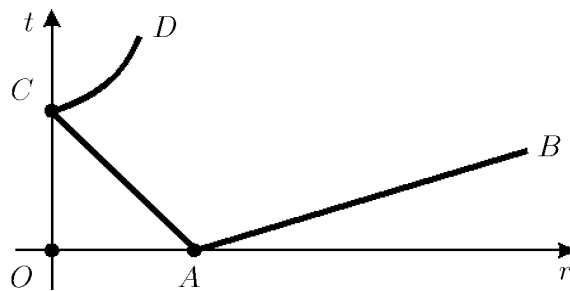


Рис. 1. Конфигурация течения при разлете в вакуум газового шара или цилиндра.

Конфигурация течения газа приведена на рис. 1. Расстояние до оси ($\nu = 1$) или центра ($\nu = 2$) симметрии $r = \left(\sum_{i=1}^{\nu+1} x_i^2 \right)^{1/2}$. Из точки A , находящейся от точки O на расстоянии $r = r_0 > 0$, в момент $t = 0$ мгновенно удаляется стенка, отделяющая газ от вакуума. В треугольнике BAr – вакуум, в треугольнике COA – исходный однородный покоящийся газ со скоростью звука $c = 1$. В области CAB обобщенная центрированная волна Римана [3], свободная граница газ – вакуум есть прямая AB . В момент $t_* = r_0$ прямая AC ,

являющаяся траекторией движения звуковой C^- -характеристики, приходит на ось или в центр симметрии. Решения соответствующих транспортных уравнений (см., например [4]), которые описывают поведение первой выводящей с AC производной газодинамических параметров, например $\partial u/\partial r|_{AC}$, обращаются в бесконечность в момент t_* , т. е. при фокусировке слабого разрыва на ось или в центр симметрии. Скорее всего от точки C отразится слабый разрыв CD — звуковая C^+ -характеристика. Требуется определить траекторию движения этого разрыва и течение в областях ACD , tCD в окрестности точки C .

В работах [5, 6] предложен способ приближенного описания течения в некоторой окрестности точки C с помощью специальных представлений, зависящих от $t, t/r$ или $\sqrt{r}, r/t$, в которые помимо указанных особенностей вошли еще и логарифмические. Возможно, что предложенные представления являются начальными отрезками специальных рядов, сходимость которых можно попытаться установить с помощью методики из [7]. Если это удастся, то в некоторой окрестности точки C поставленная задача будет решена. Затем можно строго математически найти ответ на один из вопросов, подразумевающихся в постановке задачи 1.1: возникнет ли в течении газа при $t > t_*$ ударная волна? Не исключено, что решение этой задачи, а также идея работы [8] наметят пути поиска ответа на вопрос, поставленный в [2, с. 311]: возникает ли в истекающей сверхзвуковой струе ударная волна?

Если предположить, что фокусирующаяся на ось или в центр симметрии звуковая C^- -характеристика отделяет от однородного покоящегося газа не волну разрежения, а волну сжатия, то имеется

Задача 1.2. *Доказать, что фокусирующаяся волна сжатия всегда отражается от оси или центра симметрии ударной волной, или привести пример течения, в котором фокусирующаяся волна сжатия хотя бы в течение некоторого времени отделяется от отраженного течения слабым разрывом.*

Эта задача возникает при описании безударного сжатия газа, и во всех известных сегодня примерах таких автотельных или одномерных нестационарных течений на оси или в центре симметрии появляется отраженная ударная волна [9, 10].

Случаю, когда в течении газа пересекаются несколько неоднородных слабых разрывов, посвящена следующая

Задача 1.3. *Требуется описать двумерное нестационарное течение, возникающее после плавного движения в однородный покоящийся газ непроницаемого поршня, поверхность которого имеет точку разрыва кривизны или угловую точку.*

Условие плавного движения поршня дает возможность предположить, что в течение некоторого времени в газе не возникнут ударные волны, а будут присутствовать только слабые разрывы. Если удастся “угадать” конфигурацию течения (сколько и каких поверхностей слабых разрывов возникнет), то, возможно, существование решения в классе кусочно-аналитических функций можно установить с помощью аналога теоремы Ковалевской [11]. Однако, как показывает опыт решения подобных задач, правильно указать конфигурацию возникающего течения непросто. Например, в задачах о выдвигании угловых поршней [12] для того, чтобы получилась предполагаемая априори конфигурация течения, необходимо вводить заранее не известные и изменяющиеся с течением времени новые непроницаемые поверхности. Возможно, что в решении задачи 1.3 на поршне в точке соответствующего разрыва постоянно (или в течение некоторого конечного промежутка времени) присутствует какая-либо особенность и эта точка станет причиной появления сильного разрыва уже в начальный момент времени.

Во многих течениях, первоначально непрерывных и не имеющих особенностей, за конечный промежуток времени возникают бесконечные значения производных газодинамических параметров, т. е. происходит градиентная катастрофа.

Проблема 1.1. *В наиболее часто встречающихся начально-краевых задачах для системы уравнений газовой динамики определить моменты времени $t = t_*$ и точки $\mathbf{x} = \mathbf{x}_*$ в \mathbf{R}^3 или указать эффективную процедуру нахождения t_* , \mathbf{x}_* , в которых у решений рассматриваемых задач наступает градиентная катастрофа.*

Возможно, что проблема 1.1 сводится к решению каких-либо систем обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых, во-первых, существуют до момента $t = t_*$, а, во-вторых, определяют, в частности, точку $\mathbf{x} = \mathbf{x}_*$. В этом случае, даже не строя в явном виде такие решения, можно воспользоваться соответствующей теоремой о существовании и единственности решений у них.

Решение проблемы 1.1 — необходимая предпосылка для следующего важного шага в исследованиях.

Проблема 1.2. *Для начально-краевых задач с найденными t_* , \mathbf{x}_* доказать существование и единственность их решений на всем промежутке времени $t_0 \leq t \leq t_*$ и во всей области определения течения, вплоть до точек $\mathbf{x} = \mathbf{x}_*$.*

Если решение проблемы 1.2 возможно, то только в каком-либо функциональном пространстве, причем для разных начально-краевых задач эти пространства могут быть различными.

После момента градиентной катастрофы в течении газа происходят изменения: появляются дополнительные слабые и сильные разрывы, возникают области с неизэнтропическими потоками, в самой точке ($t = t_*$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_*$) или в ее некоторой окрестности присутствует особенность. Поэтому построение течения в окрестности точки градиентной катастрофы представляет собой очень трудную задачу, в том числе и потому, что во многих задачах момент возникновения бесконечного градиента является переходным от непрерывных течений к течениям с ударными волнами.

Самой старой из нерешенных задач о распаде бесконечного градиента, вследствие которого возникает ударная волна, является

Задача 1.4. *Описать течение газа в волне сжатия после возникновения в ней бесконечного градиента, т. е. указать, сколько и каких разрывов появится в течении газа, и доказать существование и единственность решения в каждой из областей при точном удовлетворении соответствующим условиям на разрывах.*

Ограничимся плоскосимметричным случаем плавного вдвигания непроницаемого поршня в покоящийся однородный газ (рис. 2). Пусть находящийся в точке A поршень плавно вдвигается в газ (траектория его движения — линия AB) и создает в области BAC волну сжатия, в которой градиентная катастрофа возникает на слабом разрыве AC [13]. По заданному закону движения поршня при решении соответствующего транспортного уравнения однозначно определяется точка C с координатами ($t = t_*$, $x_1 = x_*$), которая лежит на звуковой характеристике AC , разделяющей однородный покой и волну сжатия, и в этой точке $\partial u / \partial x_1|_{t=t_*, x_1=x_*} = \infty$. При $t \geq t_*$ требуется определить как конфигурацию возникающего кусочно-составного течения, так и само течение.

Фактически эта задача рассмотрена Б. Риманом в 1860 г. [1], однако решить ее не удалось, и Б. Риман дополнительно предположил, что в точке C сразу возникает сильный разрыв. Если выбрать конкретную конфигурацию течения, возникающего после распада заданного в момент $t = t_*$ сильного разрыва, то с помощью автомодельных решений можно описать кусочно-составное течение газа при $t \geq t_*$, единственное для выбранной конфигу-

бесконечна, и, следовательно, отношение плотностей перед и за ней будет максимально возможным [2], например $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ для политропного газа. Это в свою очередь определит начальную скорость движения ударной волны. Возможно, что с помощью методики, описанной в работах [16, 17], указанные значения обеспечат точное построение кусочно-составного течения в окрестности точки C .

Следующая нерешенная задача связана с фокусировками ударных волн, т. е. когда один или оба радиуса главных кривизн поверхности ударной волны обращаются в нуль. Это имеет место, например, когда ударная волна приходит на ось или в центр симметрии. Все найденные на сегодняшний день автоматические решения описывают фокусировку ударных волн с бесконечной скоростью [18].

Задача 1.6. Привести пример цилиндрически или сферически симметричного течения газа, в котором ударная волна, распространяющаяся по покоящемуся однородному газу, фокусируется соответственно в центр или на ось симметрии с конечной скоростью, или доказать обратное.

Следующие две задачи относятся к описанию течений с “тройной” точкой. На Математическом конгрессе в Москве в 1966 г. Р. Курант высказал предположение о том, что в ближайшие 100 лет задачи с “тройной” точкой математически строго решить не удастся.

Задача 1.7. Требуется описать течение газа в окрестности момента $t = t_*$ возникновения “тройной точки”.

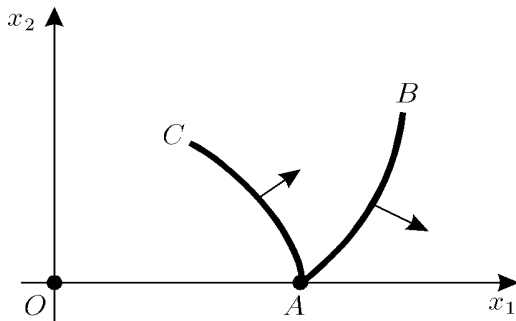


Рис. 3. Конфигурация течения при регулярном отражении ударной волны от стенки.

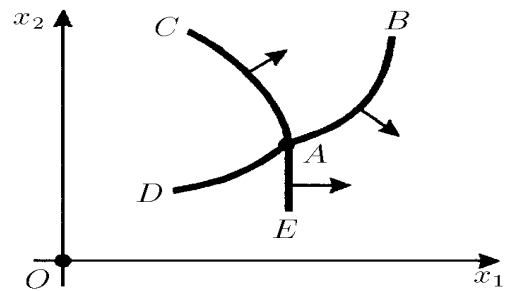


Рис. 4. Возможная конфигурация течения в окрестности тройной точки.

Для простоты рассмотрения ограничимся случаем двумерных нестационарных течений. Пусть на непроницаемую стенку, совпадающую с осью Ox_1 (рис. 3), падает фронт ударной волны AB , перед и за которым течение газа (например, покоящегося однородного газа) известно. От стенки отражается новая ударная волна (линия AC). Стрелками показаны направления движения фронтов ударных волн. Чем острее угол BAx_1 , тем быстрее точка A движется вдоль стенки Ox_1 . При увеличении этого угла скорость движения точки A вдоль оси Ox_1 уменьшается. Если разрыв на ударной волне AB будет большим, то в “отраженном” течении в области OAC скорость газа в направлении оси Ox_1 может стать больше скорости движения точки A . Тогда в течении газа в некоторый момент времени $t = t_*$ возникает “ножка Маха” — фронт новой ударной волны (линия AE на рис. 4). Точка A становится “тройной”, поскольку в ней сходятся фронты трех ударных волн. Для моментов времени $t < t_*$, пока отражение ударной волны AB регулярное, построены примеры соответствующих трехмерных нестационарных течений [16, 17]. Следовательно, в задаче 1.7 необходимо рассматривать $t \geq t_*$.

Задача 1.8. *Требуется описать течение газа в окрестности “тройной” точки A (рис. 4.)*

Так же, как и в задаче 1.7, достаточно ограничиться случаем двумерных нестационарных течений газа. Пусть в некоторый момент времени $t = t_1 > t_*$ в окрестности точки A заданы течения во всех четырех областях: EAB , BAC , CAD , DAE — и, следовательно, заданы границы областей (линии EA , AB , AC , AD). На линиях EA , AB , AC примыкающие к ним заданные течения удовлетворяют условиям Гюгонио для ударных волн, а два течения, примыкающие к линии AD , — условиям на сильном контактном разрыве. В этом случае можно не учитывать наличие непроницаемой стенки на оси Ox_1 , поскольку вначале достаточно ограничиться локальным построением течения газа в окрестности точки A при $t \geq t_1$. При такой постановке решение задачи 1.8 заключается в доказательстве существования решения задачи Коши при $|t - t_1| < t_2$, $t_2 > 0$. Это решение также должно состоять из четырех течений, разделенных тремя искомыми ударными волнами и одним сильным контактным разрывом, на которых соответствующие условия на сильных разрывах должны точно выполняться. Основная трудность при решении задачи 1.8 заключается в том, что нужно одновременно рассматривать четыре (а может, и больше [19]) начально-краевые задачи. Все они с точки зрения теории уравнений с частными производными известны: задача Коши, характеристическая задача Коши [11], задача Рикье (обобщенная задача Коши, когда начальные данные для разных функций заданы на разных поверхностях [20]). Представляется, что накопленный опыт [8, 10, 16, 17] построения кусочно-составных течений при совместном решении нескольких задач Коши, характеристических задач Коши и задач Рикье является хорошим плацдармом для решения задач 1.7, 1.8.

И, наконец, проблема, которая на данный момент выглядит как неприступная крепость.

Проблема 1.3. *Для наиболее часто встречающихся начально-краевых задач доказать существование и единственность решения (может быть — кусочно-составного или имеющего в каких-то точках особенности) при всех $t \in [t_0, +\infty)$.*

Отметим, что круг нерешенных задач и открытых проблем при математическом описании течений вязкого нормального газа далеко не исчерпывается приведенными выше.

2. Полная система уравнений Навье — Стокса

Перейдем к задачам и проблемам, возникающим при математическом описании течений вязкой теплопроводной сжимаемой сплошной среды, которые являются решениями полной системы уравнений Навье — Стокса [21–22]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \left\| \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right\|^* \right) + c_1^2 \nabla \rho + b_1 \nabla T &= \rho \mathbf{g} + \operatorname{div} \mathbf{u} \left(\nabla \mu' - \frac{2}{3} \nabla \mu \right) + \\ + \nabla \mu \left(\left\| \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right\|^* + \left\| \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right\| \right) + \left(\mu' + \frac{1}{3} \mu \right) \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u}) &+ \mu \Delta \mathbf{u}, \\ c_v \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) + b_1 T \operatorname{div} \mathbf{u} &= \kappa \Delta T + \nabla \kappa \cdot \nabla T + \mu' (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{3}\mu \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] + \\
 & + \mu \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right]. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Здесь для независимых переменных и искомым функций используются те же обозначения, что и в системе (1); кроме того, T — температура газа (искомая функция); \mathbf{g} — вектор внешних массовых сил; μ , μ' — коэффициенты динамической и объемной вязкости; κ — коэффициент теплопроводности; $\|\partial u_\alpha/x_\beta\|$ — матрица Якоби; $\|\partial u_\alpha/x_\beta\|^*$ — транспонированная матрица Якоби; векторы рассматриваются как векторы-строки, и произведение вектора на матрицу вычисляется по обычному правилу умножения матриц. При выводе системы (2) предполагалось, что в качестве независимых термодинамических параметров выбраны ρ , T и уравнения состояния $p = p(\rho, T)$, $e = e(\rho, T)$ удовлетворяют основному термодинамическому тождеству. Поэтому в системе (2)

$$c_1 = \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad b_1 = \frac{\partial p}{\partial T}, \quad c_v = \frac{\partial e}{\partial T}, \quad b_1 T = p - \rho^2 \frac{\partial e}{\partial \rho},$$

а параметры μ , μ' и κ считаются заданными функциями от ρ , T .

Прежде чем обсуждать нерешенные задачи для системы (2), приведем три замечания, касающиеся некоторых физических и математических аспектов использования полной системы уравнений Навье — Стокса.

Во-первых, система (2) названа полной для того, чтобы подчеркнуть ее отличие от традиционно рассматриваемой системы уравнений Навье — Стокса (неполной) для несжимаемой среды: $\rho = \text{const}$, уравнение энергии отброшено (система четырех уравнений для четырех неизвестных функций u_1 , u_2 , u_3 , p). Для течений, описываемых решениями этой неполной системы, в общем случае не выполняется либо закон сохранения энергии, либо основное термодинамическое тождество.

Второе замечание связано с тем, что присутствие в полной системе уравнений Навье — Стокса уравнения для T не только позволяет удовлетворить закону сохранения энергии, но и дает возможность учесть дополнительный по сравнению с системой уравнений газовой динамики (1) механизм передачи начальных возмущений. Для течений, описываемых системой уравнений газовой динамики, скорость распространения начальных возмущений определяется параметрами среды: скоростью звука, равной $\sqrt{\partial p(\rho, S)/\partial \rho}$, или скоростью движения ударной волны, которая в соответствии со свойством определенности для условий Гюгонио есть функция от значений газодинамических параметров по обе стороны от разрыва. Учет вязкости среды приводит к появлению в векторном уравнении движения дополнительных слагаемых в системе (2) по сравнению с системой (1). Однако вязкость только сглаживает с течением времени начальные возмущения, практически не влияя на скорость их распространения. Учет теплопроводности привносит дополнительный механизм распространения начальных возмущений: в соответствии с законом Фурье для теплопроводности скорость изменения температуры зависит не только от значений параметров среды, но и от их градиентов. Представляется, что именно одновременное присутствие этих двух разных механизмов является причиной передачи энергии начальных возмущений на гармоники с любой целой частотой. А это, на наш взгляд, вызывает в течениях вязкой теплопроводной сжимаемой среды эффекты, обычно называемые турбулентностью.

В-третьих, с точки зрения теории уравнений с частными производными использование уравнения неразрывности в том виде, в каком оно присутствует в системах (1), (2), а не в виде $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ (как это имеет место в неполной системе уравнений Навье — Стокса для несжимаемой среды), делает полную систему уравнений Навье — Стокса системой смешанного (параболически-гиперболического) типа: несмотря на вязкость и теплопроводность, система (2) имеет одну действительную характеристику [21]. Она является контактной поверхностью, на которой в течениях вязкой теплопроводной сжимаемой среды могут присутствовать слабые разрывы.

Как некоторую общую проблему для системы (2) отметим наличие крайне малого числа известных точных решений у полной системы уравнений Навье — Стокса. Исследования в этом направлении еще долго будут и актуальными, и важными.

Кроме того, на сегодняшний день фактически отсутствуют глобальные теоремы о существовании и единственности решений у различных начально-краевых задач, за исключением теоремы А. В. Кажихова [23] для плоскосимметричного случая, а также достаточно эффективные методы построения решений конкретных задач и исследования их свойств.

Проблема 2.1. Доказать, что у задачи Коши с начальными условиями, поставленными при $t = 0$ в параллелепипеде $\Omega = \{a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, 3\}$, где $a_i, b_i = \text{const}$, существует единственное решение в области $[0, +\infty) \times \Omega$ при выполнении на стенках параллелепипеда Ω условий прилипания и теплоизоляции.

Для простоты рассмотрения можно дополнительно предположить отсутствие внешних массовых сил, а также источников или стоков массы, импульса и энергии. Кроме того, вначале достаточно ограничиться случаем постоянных значений $\mu_0, \mu' = 0, \kappa_0$ — коэффициентов вязкости и теплопроводности, а также считать, что распределения газодинамических параметров уже при $t = 0$ удовлетворяют условиям прилипания и теплоизоляции на границе области Ω .

Возможно, что с использованием тригонометрических рядов с рекуррентно определяемыми коэффициентами [24–26] не только будет положительно разрешена проблема 2.1, но и конструктивно построено решение поставленной в проблеме 2.1 начально-краевой задачи.

Обратим внимание на одно очень важное свойство представления решений полной системы уравнений Навье — Стокса, периодических по пространственным переменным [24]: главная часть амплитуд гармоник $\sin nx_1$ и $\cos nx_1$ имеет вид (рис. 5)

$$A_n(t) = te^{-\zeta_0 n^2 t}, \quad \zeta_0 = \mu_0, \kappa_0. \quad (3)$$

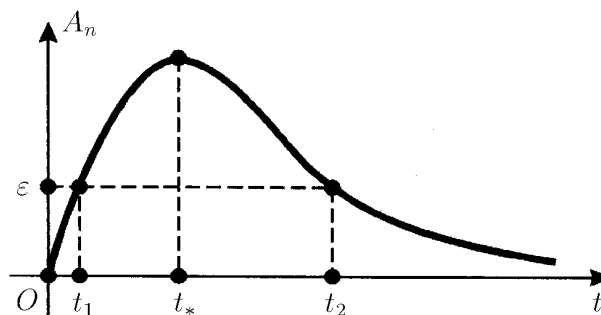


Рис. 5. Зависимость главной части амплитуд гармоник $\sin nx_1, \cos nx_1$ от времени.

Анализ этой формулы позволяет сделать ряд важных выводов.

Во-первых, $A_n(0) = 0$, но $A_n(t) \neq 0$ при $t > 0$, поэтому, если какой-либо гармоники нет в начальном распределении газодинамических параметров, то с течением времени она будет присутствовать в представлении решения и некоторая часть начальной энергии перейдет и на эту гармонику. По этой причине нужно учитывать закон сохранения энергии, т. е. рассматривать полную систему уравнений Навье — Стокса.

У функции (3) один максимум, который достигается в точке $t_* = 1/(\zeta_0 n^2)$ и равен $A_n(t_*) = 1/(\zeta_0 n^2 e)$, кроме того, $A_n(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, при относительно малых значениях $\zeta_0 n^2$ будут велики t_* и $A_n(t_*)$, т. е. влияние на решение соответствующей гармоники будет существенным и продолжительным, хотя сама эта гармоника в задании начальных условий могла и не присутствовать. Заметим, что с ростом n убывают обе величины: t_* и $A_n(t_*)$.

Поведение функции $A_n(t)$ позволяет высказать несколько гипотез.

Возможно, что имеющиеся локальные (по времени или начальным данным) теоремы о существовании решений полной системы уравнений Навье — Стокса (см. библиографию в [23, 26]) неявно используют малость амплитуд всех гармоник: $A_n < \varepsilon$ при $0 \leq t \leq t_1$ и $t \rightarrow +\infty$, но $t > t_2$ (рис. 5). Причем в качестве t_1, t_2 нужно брать соответствующие значения при $n = 1$.

Наверное, интервал $[t_1, t_2]$ можно условно назвать интервалом турбулентного перемешивания. Однако представляется, что более точным будет суждение о том, что при наличии сжимаемости, вязкости и теплопроводности на интервале $0 \leq t \leq t_*$ происходит перераспределение начальной энергии между гармониками и только при $t \geq t_*$ вязкость и теплопроводность начинают вызывать общее затухание начальных возмущений в сжимаемой среде. Отметим, что в случае систем строго параболического типа соответствующие амплитуды в главных частях задаются функциями $A_n(t) = e^{-\mu_0 n^2 t}$, т. е. не содержат множителя t . Поэтому наличие интервала $0 \leq t \leq t_*$ вызвано как раз тем, что полная система уравнений Навье — Стокса является параболически-гиперболической.

Если проблема 2.1 будет решена, то это окажется большим подспорьем при рассмотрении других проблем, связанных с течениями вязкой теплопроводной сжимаемой сплошной среды уже в присутствии различных внешних сил.

Проблема 2.2. *Построить течение вязкого теплопроводного газа в трубе, вызванное заданным постоянным перепадом давления вниз по потоку. Исследовать поведение во времени малых возмущений построенного течения.*

Именно исследование подобных течений и их малых возмущений в случае неполной системы уравнений Навье — Стокса вызвало многочисленные работы по турбулентному перемешиванию. Подчеркнем, что, на наш взгляд, подобные эффекты в той или иной степени присущи и более простым течениям вязкой теплопроводной сжимаемой сплошной среды (см. проблему 2.1). Естественно, что построить требуемое в проблеме 2.2 течение будет непросто, хотя некоторые приближенные подходы уже известны [22].

И, наконец,

Проблема 2.3. *В рамках полной системы уравнений Навье — Стокса математически строго описать возникновение, существование и разрушение смерчей, торнадо и других закрученных конвективных потоков.*

Исследование закрученных конвективных потоков представляет не только чисто научный интерес, но и имеет большое практическое значение, особенно если принять во внимание масштаб разрушений, к которым приводят тропические циклоны и подобные им явления. С нашей точки зрения, именно отсутствие адекватного и надежного мате-

матического моделирования таких потоков не позволяет не только составить целостную картину подобных явлений, но и достаточно эффективно бороться с ними.

В первую очередь необходимо смоделировать механизм возникновения смерчей. Скорее всего, они появляются в результате воздействия на вертикальные конвективные потоки каких-либо дополнительных сил, действующих в горизонтальном направлении. Такой силой может являться сила Кориолиса, вызванная вращением Земли, ее также могут вызвать придонные горизонтальные течения или горизонтальные потоки в средней части вертикального конвективного потока. Поэтому для надежного математического моделирования необходимо привлекать полную систему уравнений Навье — Стокса, учитывающую теплопроводность среды. Возможно, для возникновения закрученного потока требуется действие дополнительной силы только в течение какого-либо ограниченного промежутка времени, после чего вращение может стать как бы самоподдерживающимся, т. е. поток будет вращаться даже при прекращении действия дополнительной силы.

Затем требуется подробно и, главное, строго описать структуру течения (схематично она приведена на рис. 6) и определить значения газодинамических параметров во всей области смерча, тем более, что в различных ее частях значения скорости и плотности газа сильно отличаются. Это является дополнительным аргументом для рассмотрения полной системы уравнений Навье — Стокса, учитывающей сжимаемость среды.

При описании начальной стадии зарождения вихря и “стационарной” фазы крайне важно понять, почему природа выбирает именно такую трубу (тоннель) для выравнивания значений параметров среды, когда направление возрастания температуры, плотности и давления совпадает с направлением действия внешней массовой силы при условии наличия дополнительной силы, перпендикулярной указанным направлениям и действующей, возможно, в течение ограниченного промежутка времени. Скорее всего при таком способе перемещения нижних теплых слоев в верхнюю холодную часть достигается минимум энергетических затрат: легче “прорваться” на узком участке, преодолевая инерцию широкого слоя, при этом оказывается, что осевая закрутка “улучшает” процесс.

К вопросу описания начальной и “стационарной” фазы существования вихря примыкает исследование устойчивости течения на этих двух стадиях. Необходимо рассматривать устойчивость по отношению к изменениям входных данных по отдельности: температуры в придонной части, в средней и верхней частях как самого потока, так и его периферии; других газодинамических параметров; дополнительного внешнего воздействия по его величине и направлению. Несомненно, что устойчивость течения в очень большой степени определяется также и одновременным изменением нескольких входных данных.

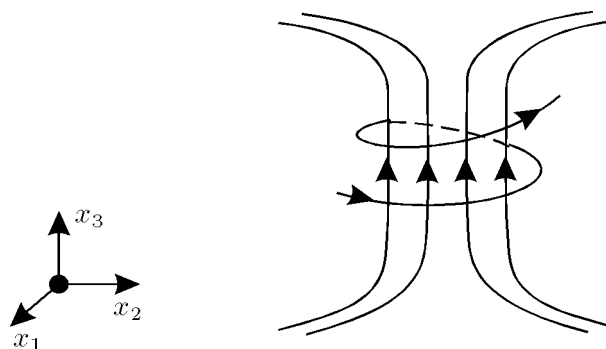


Рис. 6. Структура течения в смерче.

Следующий вопрос, “непосредственно” примыкающий к предыдущему и требующий детального и строгого рассмотрения, связан с разрушением смерча. Необходимо не только определить, при каких изменениях входных данных происходит естественное разрушение вихря, но и решить вопрос о том, на какой фазе существования вихря, в каких частях и с какой силой нужно приложить внешнее воздействие (например, энерговыделение), чтобы вихрь прекратил свое существование.

Возможно, что поставленные вопросы уже содержат в себе некую подсказку для ответов или хотя бы указывают направления их поиска.

Как и в случае невязкого и нетеплопроводного газа, для полной системы уравнений Навье — Стокса перечисленные выше проблемы, конечно же, являются лишь малой частью от всех важных и интересных нерешенных задач и открытых проблем.

Выражаю А. Н. Крайко признательность и благодарность за полезные дискуссии и ценные критические замечания.

Список литературы

- [1] RIEMANN B.G.F. Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite // Abhandl. Königl. Ges. Wiss. Göttingen. 1860. Н. 8. [Риман Б. О распаде плоских волн конечной амплитуды: Сочинения. М.-Л.: ОГИЗ, 1948].
- [2] ОВСЯННИКОВ Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
- [3] БАУТИН С. П. Схлопывание одномерной полости // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 1.
- [4] КРАЙКО А. Н. О возникновении ударных волн при неравновесных течениях // Прикл. математика и механика. 1967. Т. 31, вып. 5.
- [5] КРАЙКО А. Н. Структура течений разрежения и сжатия в окрестности точки отражения “граничной” характеристики // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1998. Т. 223.
- [6] КРАЙКО А. Н. Сферическое течение разрежения в окрестности точки отражения “граничной” характеристики // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 6.
- [7] ТИТОВ С. С. Исследование рядов, применяемых для решения некоторых задач околозвукового обтекания // Численные и аналитические методы решения задач механики сплошной среды. УНЦ АН СССР. Свердловск, 1981.
- [8] БАУТИН С. П. О возможности изэнтропического перехода от однородного покоя в другое однородное покоящееся состояние идеального газа // Докл. РАН. 1998. Т. 362, №5.
- [9] ЗАБАБАХИН И. Е., СИМОНЕНКО В. А. Сферическая центрированная волна сжатия // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 3.
- [10] БАУТИН С. П., КАЗАКОВ А. Л. Течения газа с ударными волнами, расходящимися от оси или центра симметрии с конечной скоростью // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 3.

- [11] БАУТИН С. П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, №11.
- [12] СИДОРОВ А. Ф., ХАЙРУЛЛИНА О. Б. О точных решениях некоторых краевых задач газовой динамики в классах двойных и тройных волн // Методы решения краевых задач механики сплошной среды. УНЦ АН СССР. Свердловск, 1978.
- [13] СИДОРОВ А. Ф. Метод решения некоторых краевых задач для нелинейных уравнений гиперболического типа и распространение слабых ударных волн // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 28, вып. 6.
- [14] ЧЕРНЫЙ Г. Г. Возникновение и форма поверхностей разрыва в потоках газа // Теорет. гидромеханика. Вып. 2. М.: Оборонгиз, 1952.
- [15] FRIEDRICHS K. O. Formation and decay of shock waves // Commun Appl. Math. 1948. V. 1, No. 3.
- [16] ТЕШУКОВ В. М. О регулярном отражении ударной волны от жесткой стенки // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 2.
- [17] ТЕШУКОВ В. М. Пространственное взаимодействие сильных разрывов в газе // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, вып. 4.
- [18] БРУШЛИНСКИЙ К. В., КАЖДАН Я. М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, №2(110).
- [19] ВАСИЛЬЕВ Е. И., КРАЙКО А. Н. Численное моделирование дифракции слабых скачков на клине в условиях парадокса Неймана // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1999. Т. 39, №8.
- [20] ЛЕДНЕВ Н. А. Новый метод решения дифференциальных уравнений с частными производными // Мат. сборник. 1948. Т. 22, вып. 2.
- [21] БАУТИН С. П. Представление решений системы Навье—Стокса в окрестности контактной характеристики // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 4.
- [22] БАУТИН С. П. Аналитическое построение течений вязкого газа при помощи последовательности линеаризованных систем Навье—Стокса // Прикл. математика и механика. 1988. Т. 52, вып. 4.
- [23] АНТОНЦЕВ С. Н., КАЖИХОВ А. В., МОНАХОВ В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
- [24] БАУТИН С. П. Об одном классе решений системы Навье—Стокса, периодических по пространственным переменным // Моделирование в механике. 1987. Т. 1(18), №1.
- [25] ТИТОВ С. С. Решение периодических задач Коши с помощью специальных тригонометрических рядов // Численные методы механики сплошной среды. 1978. Т. 9, №2.
- [26] ТИТОВ С. С. Решение нелинейных уравнений в аналитических полиалгебрах. Ч. II // Изв. вузов. Математика. 2000. №6(457).

Поступила в редакцию 8 августа 2000 г.