

О РЕШЕНИЯХ СТАЦИОНАРНОЙ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ЗАРЯДА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ*

А. М. Блохин, Е. В. Мищенко

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Новосибирск, Россия

e-mail: blokhin@math.nsc.ru, evm@online.sinor.ru

The existence of solutions for a gas dynamics model of charge transfer in semiconductors in a stationary case is studied.

1. Предварительные сведения

При математическом описании физических процессов в полупроводниковых устройствах в качестве соответствующих математических моделей часто используют системы гидродинамического типа. К настоящему моменту сконструирован целый класс таких систем (некоторые из которых описаны, например, в [1, 2]). В этой работе мы будем рассматривать наиболее простую систему из этого класса — газодинамическую модель переноса зарядов в полупроводниках (такая модель подробно описана в [3]; там же приводятся результаты ее численных исследований). Нестационарная и одномерная газодинамическая модель в виде законов сохранения может быть записана следующим образом (мы приводим систему сразу в безразмерном виде; сам же процесс обезразмеривания описан в [2]):

$$\begin{cases} R_\tau + J_s^{(1)} = 0, \\ J_\tau^{(1)} + J_s^{(2)} = \mathcal{F}^{(2)}, \\ (RE)_\tau + J_s^{(3)} = \mathcal{F}^{(3)}, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\varphi_{ss} = \beta(R - \rho). \quad (1.2)$$

Здесь R — плотность электронного газа; $J^{(1)}$, $J^{(2)}$, $J^{(3)}$ — потоки, которые определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} J^{(1)} &= Ru, \\ J^{(2)} &= Ru^2 + P, \\ J^{(3)} &= Ru\Omega, \quad \Omega = \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{2}\vartheta, \end{aligned}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №99-01-00486.

© А. М. Блохин, Е. В. Мищенко, 2000.

где u — скорость электронного газа; $P = R\vartheta$ — давление; $E = \frac{1}{2}u^2 + \frac{3}{2}\vartheta$ — полная энергия; ϑ — температура электронного газа; φ — электрический потенциал; $\mathcal{F}^{(2)}, \mathcal{F}^{(3)}$ — правые части, причем

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{(2)} &= R\varphi_s - \frac{J^{(1)}}{\tau_P}, \\ \mathcal{F}^{(3)} &= J^{(1)}\varphi_s - R\frac{E - \frac{3}{2}}{\tau_W},\end{aligned}$$

где τ_P, τ_W — времена релаксаций, которые в данной модели считаются функциями от E ; $\rho = \rho(s)$ — естественная электронная концентрация, причем

$$\rho(0) = \rho(1) = 1;$$

β — некоторая постоянная; τ, s — независимые переменные времени и пространства.

Заметим, что (1.1) — это система уравнений газовой динамики с правыми частями для политропного газа с показателем адиабаты $\gamma = \frac{5}{3}$ (см., например, [4]). Уравнение (1.2) — это уравнение Пуассона для электрического потенциала φ . Следуя [1, 2], будем изучать газодинамическую модель (1.1), (1.2) на интервале $0 < s < 1$, поставив при $s = 0, 1$ граничные условия, соответствующие известной в физике полупроводников тестовой задаче о баллистическом диоде:

$$R(\tau, 0) = R(\tau, 1) = \vartheta(\tau, 0) = 1, \quad (1.3)$$

$$\varphi(\tau, 0) = 0, \quad \varphi(\tau, 1) = B, \quad (1.4)$$

где постоянная $B > 0$ — так называемое напряжение смещения. Количество граничных условий на каждой из границ поставлено для системы (1.1) с учетом предположения о том, что:

$$\begin{cases} 0 < u(\tau, 0) < a(\tau, 0), \\ 0 < u(\tau, 1) < a(\tau, 1). \end{cases} \quad (1.5)$$

Здесь $a(\tau, s) = \sqrt{\frac{5}{3}\vartheta}$ — скорость звука в электронном газе. Численные исследования задачи о баллистическом диоде подтверждают справедливость неравенств (1.5) (см. [2, 3]).

В данной работе нас будет интересовать получаемая из (1.1)–(1.4) стационарная газодинамическая модель переноса зарядов в полупроводниках на интервале $0 < s < 1$

$$\begin{cases} (Ru)_s = 0, & (Ru^2 + P)_s = R\varphi_s - \frac{Ru}{\tau_P}, \\ \left(Ru \left[\frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{2}\vartheta \right] \right)_s = Ru\varphi_s - R\frac{E - \frac{3}{2}}{\tau_W}, \end{cases} \quad (1.1')$$

$$\varphi_{ss} = \beta(R - \rho) \quad (1.2')$$

с граничными условиями при $s = 0, 1$

$$R(0) = R(1) = \vartheta(0) = 1, \quad (1.3')$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = B. \quad (1.4')$$

Можно искать решение краевой задачи (1.1') – (1.4') методом установления, т. е. как предел при $\tau \rightarrow \infty$ решения нестационарной задачи (1.1) – (1.4) (добавив к задаче (1.1) – (1.4) начальные данные при $\tau = 0$). Однако, как известно (см., например, [4]), эффективность применения метода установления зависит от выполнения некоторых условий. Во-первых, решение краевой задачи (1.1') – (1.4') должно существовать, во-вторых, оно должно быть асимптотически устойчиво (по Ляпунову), по крайней мере, в линейном приближении, т. е. все решения линеаризованной смешанной задачи (1.1) – (1.4) относительно стационарного решения краевой задачи (1.1') – (1.4') должны стремиться к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Оставляя решение вопроса об асимптотической устойчивости (по Ляпунову) на будущее, мы в этой работе рассмотрим вопрос о существовании решения краевой задачи (1.1') – (1.4').

Замечание 1.1. Заметим, что краевая задача (1.1') – (1.4') при $B = 0$ (т. е. при снятом напряжении смещения) имеет следующее решение (так называемое состояние термодинамического равновесия для задачи (1.1) – (1.4)):

$$\begin{cases} u(s) = \hat{u} = 0, & \vartheta(s) = \hat{\vartheta} = 1, \\ R(s) = \hat{R}(s), & \varphi(s) = \hat{\varphi}(s), \end{cases} \quad (1.6)$$

где функции \hat{R} , $\hat{\varphi}$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\hat{R}' = \hat{R}\hat{\varphi}', \quad \varepsilon^2 \hat{\varphi}'' = \hat{R} - \rho \quad (1.7)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} \hat{R}(0) = \hat{R}(1) = 1, \\ \hat{\varphi}(0) = \hat{\varphi}(1) = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

причем $\varepsilon^2 = \frac{1}{\beta}$.

Из первого условия системы (1.7) и граничных условий (1.8) следует, что

$$\hat{R}(s) = \exp\{\hat{\varphi}(s)\},$$

а функция $\hat{\varphi}(s)$ находится как решение следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \hat{\varphi}'' = \exp\{\hat{\varphi}\} - \rho, & 0 < s < 1, \\ \hat{\varphi}(0) = \hat{\varphi}(1) = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Краевая задача (1.9) подробно изучена в [5]. Вопрос об асимптотической устойчивости (по Ляпунову) состояния термодинамического равновесия (1.6) рассмотрен в [6].

Вернемся к краевой задаче (1.1') – (1.4'). Приведем систему (1.1') к нормальному виду, т. е. разрешим ее относительно производных. Далее вместо (1.1'), (1.2') будем рассматривать следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi' = Q, \\ u' = -u\Psi, \\ \vartheta' = \frac{2}{5}Q - \frac{1}{5} \frac{u^2 + 3\vartheta - 3}{\tau_w u} + \frac{2}{5}u^2\Psi, \\ \varepsilon Q' = r, \\ \varepsilon r' = -\rho' + (\rho + \varepsilon r)\Psi, \end{cases} \quad (1.10)$$

где

$$\Psi = \frac{1}{5\vartheta - 3u^2} \left[3Q - \frac{5u}{\tau_P} + \frac{u^2 + 3\vartheta - 3}{\tau_W u} \right], \quad R = \rho + \varepsilon r.$$

Система (1.10) получена в предположении, что

$$5\vartheta(s) - 3u^2(s) \neq 0, \quad u(s) \neq 0, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (1.11)$$

Из физических соображений ясно, что если $B \neq 0$, то второе условие в (1.11) выполняется и в силу неравенств (1.5) $u(s) > 0$, $0 \leq s \leq 1$. Первое условие в (1.11) в силу тех же неравенств надо заменить на $5\vartheta(s) - 3u^2(s) > 0$, $0 \leq s \leq 1$. Окончательно будем полагать, что справедливы следующие предположения:

$$\begin{cases} 5\vartheta(s) - 3u^2(s) > 0, \\ u(s) > 0, \quad 0 \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (1.11')$$

Замечание 1.2. С физической точки зрения первое неравенство в (1.11') означает, что мы будем рассматривать только дозвуковые стационарные течения электронного газа. Понятно, что выполнение этого неравенства должно привести к определенным ограничениям на постоянную B — напряжение смещения.

Граничные условия для системы (1.10) примут такой вид:

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, & \varphi(1) = B, \\ \vartheta(0) = 1, & r(0) = r(1) = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Таким образом, цель работы состоит в нахождении неизвестных u , r , ϑ из класса непрерывно-дифференцируемых функций на отрезке $0 \leq s \leq 1$ и потенциала φ из класса дважды непрерывно-дифференцируемых функций на отрезке $0 \leq s \leq 1$. При этом мы будем считать, что а) времена релаксации τ_P, τ_W являются постоянными, б) параметр ε — малый, в) функция $\rho = \rho(s) \in C^2[0, 1]$, причем

$$\rho(0) = \rho(1) = 1, \quad \rho(s) = \rho(1 - s),$$

$$\min_{s \in [0, 1]} \rho(s) = \rho_0 \quad (0 < \rho_0 < 1), \quad \rho(s) > 0, \quad s \in [0, 1].$$

Краевую задачу (1.10), (1.12) перепишем в векторном виде:

$$\frac{dx}{ds} = f(x, z), \quad (1.13)$$

$$\varepsilon \frac{dz}{ds} = F(x, z, s, \varepsilon), \quad (1.14)$$

$$L_1 x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 x(1) = B, \quad (1.15)$$

$$L_2 z(0) = 0, \quad R_2 z(1) = 0. \quad (1.16)$$

Здесь

$$x = \begin{pmatrix} \varphi \\ u \\ \vartheta \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} Q \\ r \end{pmatrix},$$

$$f(x, z) = \begin{pmatrix} Q \\ -u\Psi \\ \frac{2}{5}Q - \frac{1}{5} \frac{u^2 + 3\vartheta - 3}{\tau_W u} + \frac{2}{5}u^2\Psi \end{pmatrix},$$

$$F(x, z, s, \varepsilon) = \begin{pmatrix} r \\ -\rho' + (\rho + \varepsilon r)\Psi \end{pmatrix},$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = (1 \ 0 \ 0), \quad L_2 = (0 \ 1), \quad R_2 = (0 \ 1).$$

2. Нулевое приближение решения краевой задачи (1.10), (1.12)

Предположим, что решение краевой задачи (1.10), (1.12) непрерывным образом зависит от параметра ε . Пусть

$$x|_{\varepsilon=0} = x_0(s) = \begin{pmatrix} \varphi_0(s) \\ u_0(s) \\ \vartheta_0(s) \end{pmatrix}, \quad z|_{\varepsilon=0} = z_0(s) = \begin{pmatrix} Q_0(s) \\ r_0(s) \end{pmatrix}.$$

Полагая формально $\varepsilon = 0$ в системе (1.10), мы получим для определения компонент векторов $x_0(s)$, $z_0(s)$ следующие соотношения:

$$\begin{cases} \varphi_0' = Q_0, \\ u_0' = -u_0\Psi_0, \\ \vartheta_0' = \frac{2}{5}Q_0 - \frac{1}{5} \frac{u_0^2 + 3\vartheta_0 - 3}{\tau_W u_0} + \frac{2}{5}u_0^2\Psi_0, \\ r_0 = 0, \\ \rho\Psi_0 - \rho' = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где

$$\Psi_0 = \frac{1}{5\vartheta_0 - 3u_0^2} \left[3Q_0 - \frac{5u_0}{\tau_P} + \frac{u_0^2 + 3\vartheta_0 - 3}{\tau_W u_0} \right].$$

Из (2.1) следует:

$$\begin{cases} r_0(s) \equiv 0, \\ Q_0(s) = \frac{5u_0(s)}{3\tau_P} - \frac{u_0^2(s) + 3\vartheta_0(s) - 3}{3\tau_W u_0(s)} + \frac{5\vartheta_0(s) - 3u_0^2(s)}{3} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Подставляя выражение для $Q_0(s)$ из (2.2) в первые три уравнения системы (2.1), получаем подсистему для определения $\varphi_0(s)$, $u_0(s)$, $\vartheta_0(s)$. Из второго уравнения системы (2.1) следует:

$$u_0(s)\rho(s) = m_0, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (2.3)$$

Здесь m_0 — положительная постоянная. Поскольку с учетом (2.3)

$$u_0(s) = \frac{m_0}{\rho(s)},$$

то первое и третье уравнения системы (2.1) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\varphi'_0 &= \vartheta'_0 + \vartheta_0 \frac{\rho'}{\rho} + \frac{m_0}{\tau_P \rho} - m_0^2 \frac{\rho'}{\rho^3}, \\ \vartheta'_0 &= \left(\frac{2}{3} \frac{\rho'}{\rho} - \frac{\rho}{m_0 \tau_W} \right) \vartheta_0 + \frac{m_0}{3\rho} \left(\frac{2}{\tau_P} - \frac{1}{\tau_W} \right) + \frac{\rho}{m_0 \tau_W}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

В силу граничных условий (1.12):

$$\varphi_0(0) = 0, \quad \vartheta_0(0) = 1.$$

Поэтому, интегрируя уравнения системы (2.4), получаем

$$\begin{aligned}\varphi_0(s) &= \vartheta_0(s) - 1 + \frac{m_0^2}{2} \left(\frac{1}{\rho^2(s)} - 1 \right) + \int_0^s \vartheta_0(\xi) \frac{\rho'(\xi)}{\rho(\xi)} d\xi + \frac{m_0}{\tau_P} \int_0^s \frac{d\xi}{\rho(\xi)}, \\ \vartheta_0(s) &= 1 + \frac{2}{3} \int_0^s \left[\frac{\rho(s)}{\rho(\xi)} \right]^{\frac{2}{3}} e^{-\int_{\xi}^s \frac{\rho(t)}{m_0 \tau_W} dt} \times \left\{ \frac{m_0}{\rho(\xi)} \left(\frac{1}{\tau_P} - \frac{1}{2\tau_W} \right) + \frac{\rho'(\xi)}{\rho(\xi)} \right\} d\xi.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Наконец, с учетом граничного условия $\varphi_0(1) = B$, получим из первого соотношения системы (2.5) следующее выражение для определения постоянной m_0 :

$$B = \vartheta_0(1) - 1 + \int_0^1 \vartheta_0(\xi) \frac{\rho'(\xi)}{\rho(\xi)} d\xi + \frac{m_0}{\tau_P} \int_0^1 \frac{d\xi}{\rho(\xi)}.\quad (2.6)$$

Численный анализ соотношения (2.6) помещен в Приложении.

3. Исследование краевой задачи (1.14), (1.16)

Здесь рассмотрим вопрос о нахождении решения z краевой задачи (1.14), (1.16) при условии, что вектор x пробегает некоторое допустимое множество (это множество будет описано ниже). В соответствии с общей теорией сингулярно-возмущенных уравнений найдем сначала решение предельного векторного уравнения

$$F(x, \Phi, s, 0) = 0.$$

Это решение легко определяется и имеет следующий вид:

$$\Phi = \Phi(x, s) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \left[(5\vartheta - 3u^2) \frac{\rho'}{\rho} + \frac{5u}{\tau_P} - \frac{u^2 + 3\vartheta - 3}{\tau_W u} \right] \\ 0 \end{pmatrix}.\quad (3.1)$$

С учетом (3.1) будем искать решение задачи (1.14), (1.16)

$$z = y + \Phi = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad (3.2)$$

где q — новая неизвестная функция. Докажем следующую лемму.

Лемма 3.1. Вектор y является решением краевой задачи

$$\varepsilon \frac{dy}{ds} = A_2(s)y + g_2(x, y, s, \varepsilon), \quad (3.3)$$

$$L_2 y(0) = 0, \quad R_2 y(1) = 0, \quad (3.4)$$

где

$$A_2(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3\rho}{5\vartheta_0 - u_0^2} & 0 \end{pmatrix},$$

и $g_2(x, y, s, \varepsilon)$ — вектор-функция, описанная ниже, каждая компонента которой является полиномом второй степени по переменным q, r .

Доказательство. С учетом (3.1), (3.2) перепишем выражения для правых частей f, F в системах (1.13), (1.14) следующим образом:

$$\begin{cases} F = \begin{pmatrix} r \\ q \frac{3\rho}{5\vartheta - 3u^2} + r \frac{\varepsilon\rho'}{\rho} + rq \frac{3\varepsilon}{5\vartheta - 3u^2} \end{pmatrix}, \\ f = \begin{pmatrix} q + \Phi_1 \\ -u\Psi \\ \frac{2}{5}(q + \Phi_1) - \frac{1}{5} \frac{u^2 + 3\vartheta - 3}{\tau_W u} + \frac{2}{5} u^2 \Psi \end{pmatrix} \end{cases} = qf_1 + f_2, \quad (3.5)$$

причем $\Psi = q \frac{3}{5\vartheta - 3u^2} + \frac{\rho'}{\rho}$,

$$f_1 = f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3u}{5\vartheta - 3u^2} \\ \frac{2}{5} + \frac{6}{5} \frac{u^2}{5\vartheta - 3u^2} \end{pmatrix},$$

$$f_2 = f_2(x, s) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ -u \frac{\rho'}{\rho} \\ \frac{2}{3} \left(\vartheta \frac{\rho'}{\rho} + \frac{u}{\tau_P} \right) - \frac{u^2 + 3\vartheta - 3}{3\tau_W u} \end{pmatrix}.$$

Принимая во внимание (3.5), перепишем систему (1.14) в виде:

$$\varepsilon \frac{dy}{ds} = F - \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{d\Phi_1}{ds} \\ 0 \end{pmatrix} = F - \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} + (\nabla_x \Phi_1, f) \\ 0 \end{pmatrix} = F - \varepsilon \begin{pmatrix} q\Phi_{11} + \Phi_{12} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\nabla_x \Phi_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \vartheta} \end{pmatrix}, \quad \Phi_{11} = (\nabla_x \Phi_1, f_1), \quad \Phi_{12} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} + (\nabla_x \Phi_1, f_2).$$

Последнюю систему перепишем в виде (3.3), полагая

$$\begin{aligned} g_2(x, y, s, \varepsilon) &= F - \varepsilon \begin{pmatrix} q\Phi_{11} + \Phi_{12} \\ 0 \end{pmatrix} - A_2 y = \\ &= q \begin{pmatrix} 0 \\ 3\rho \left[\frac{1}{5\vartheta - 3u^2} - \frac{1}{5\vartheta_0 - 3u_0^2} \right] \end{pmatrix} + \varepsilon r \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho'}{\rho} \end{pmatrix} - \varepsilon q \begin{pmatrix} \Phi_{11} \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon r q \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5\vartheta - 3u^2} \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} \Phi_{12} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Вывод краевых условий (3.4) очевиден.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые оценки для правой части $g_2(x, y, s, \varepsilon)$. Пусть: $S_{x_0, \delta}^x$ — множество вектор-функций x , причем $S_{x_0, \delta}^x = \{x(s) : x(s) \in C[0, 1], \|x - x_0\| \leq \delta\}$; $m = \min_{x \in S_{x_0, \delta}^x} (5\vartheta - 3u^2) > 0$ (см. первое условие в (1.11')), $\hat{\Phi}_{1i} = \max_{s \in [0, 1], x \in S_{x_0, \delta}^x} |\Phi_{1i}(x, s)|$, $i = 1, 2$,

$n = \max_{s \in [0, 1]} \left| \frac{\rho'}{\rho} \right|$; δ — некоторая постоянная ($0 < \delta \leq \delta_0$). Понятно, что постоянные m , $\hat{\Phi}_{1i}$, $i = 1, 2$ в конечном итоге определяются величиной δ_0 .

Лемма 3.2. *Справедливы следующие оценки:*

$$\|g_2(x, y, s, \varepsilon)\| \leq \varepsilon \{M_1(\|y\|)\|y\| + \hat{\Phi}_{12}\}, \quad (3.7)$$

$$\|g_2(\tilde{x}, \tilde{y}, s, \varepsilon) - g_2(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, s, \varepsilon)\| \leq \varepsilon M_1(\|\tilde{y}\| + \|\tilde{\tilde{y}}\|)\|\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}\| + N_1(\|\tilde{y}\|, \|\tilde{\tilde{y}}\|)\|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\|, \quad (3.8)$$

$$\|g_2(x, \tilde{y}, s, \varepsilon) - g_2(x, \tilde{\tilde{y}}, s, \varepsilon)\| \leq \varepsilon M_1(\|\tilde{y}\| + \|\tilde{\tilde{y}}\|)\|\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}\|, \quad (3.9)$$

где $x, \tilde{x}, \tilde{\tilde{x}} \in S_{x_0, \delta}^x$, а агрегаты M_1, N_1 описаны ниже.

Доказательство. Какое бы ε мы ни взяли, можно выбрать такое δ , что

$$\max_{s \in [0, 1], x \in S_{x_0, \delta}^x} \left| \frac{1}{5\vartheta - 3u^2} - \frac{1}{5\vartheta_0 - 3u_0^2} \right| \leq \frac{M}{m^2} \varepsilon. \quad (3.10)$$

Здесь $M > 0$ — некоторая постоянная. Поскольку

$$\|\rho\| = \max_{s \in [0, 1]} |\rho| = 1,$$

то вывод неравенства (3.7) очевидно, причем

$$M_1(\|y\|) = 3\frac{M}{m^2} + n + \frac{3}{m}\|y\| + \hat{\Phi}_{11}.$$

Покажем теперь, как получается оценка (3.8). Очевидно следующее равенство:

$$g_2(\tilde{x}, \tilde{y}, s, \varepsilon) - g_2(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, s, \varepsilon) =$$

$$\begin{aligned}
 &= 3\rho \left[\left(\frac{1}{5\tilde{\vartheta} - 3\tilde{u}^2} - \frac{1}{5\vartheta_0 - 3u_0^2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{q} \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{5\tilde{\vartheta} - 3\tilde{u}^2} - \frac{1}{5\vartheta_0 - 3u_0^2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\tilde{q}} \end{pmatrix} \right] + \\
 &\quad + \varepsilon(\tilde{r} - \tilde{\tilde{r}}) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho'}{\rho} \end{pmatrix} + 3\varepsilon\tilde{r}\tilde{q} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5\tilde{\vartheta} - 3\tilde{u}^2} \end{pmatrix} - 3\varepsilon\tilde{\tilde{r}}\tilde{\tilde{q}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5\tilde{\vartheta} - 3\tilde{u}^2} \end{pmatrix} + \\
 &\quad + \varepsilon\tilde{q} \begin{pmatrix} \Phi_{11}(\tilde{x}, s) \\ 0 \end{pmatrix} - \varepsilon\tilde{\tilde{q}} \begin{pmatrix} \Phi_{11}(\tilde{x}, s) \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \Phi_{12}(\tilde{x}, s) \\ 0 \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} \Phi_{12}(\tilde{x}, s) \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 &= 3\rho\tilde{q} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5\tilde{\vartheta} - 3\tilde{u}^2} - \frac{1}{5\tilde{\vartheta} - 3\tilde{u}^2} \end{pmatrix} + 3\rho(\tilde{q} - \tilde{\tilde{q}}) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5\tilde{\vartheta} - 3\tilde{u}^2} - \frac{1}{5\vartheta_0 - 3u_0^2} \end{pmatrix} + \varepsilon\frac{\rho'}{\rho}(\tilde{r} - \tilde{\tilde{r}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \\
 &\quad + 3\varepsilon(\tilde{r}\tilde{q} - \tilde{\tilde{r}}\tilde{\tilde{q}} + \tilde{r}\tilde{\tilde{q}} - \tilde{\tilde{r}}\tilde{q}) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5\tilde{\vartheta} - 3\tilde{u}^2} \end{pmatrix} + 3\varepsilon\tilde{r}\tilde{\tilde{q}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5\tilde{\vartheta} - 3\tilde{u}^2} - \frac{1}{5\tilde{\vartheta} - 3\tilde{u}^2} \end{pmatrix} + \\
 &\quad + \varepsilon(\tilde{q} - \tilde{\tilde{q}}) \begin{pmatrix} \Phi_{11}(\tilde{x}, s) \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon\tilde{q} \begin{pmatrix} \Phi_{11}(\tilde{x}, s) - \Phi_{11}(\tilde{x}, s) \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \Phi_{12}(\tilde{x}, s) - \Phi_{12}(\tilde{x}, s) \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Существуют такие положительные постоянные N , $\hat{\varphi}_{1i}$, $i = 1, 2$, определяемые величиной δ_0 , что:

$$\begin{aligned}
 |(5\tilde{\vartheta} - 3\tilde{u}^2) - (5\tilde{\vartheta} - 3\tilde{u}^2)| &\leq N\|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\|, \\
 |\Phi_{11}(\tilde{x}, s) - \Phi_{11}(\tilde{\tilde{x}}, s)| &\leq \hat{\varphi}_{11}\|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\|, \\
 |\Phi_{12}(\tilde{x}, s) - \Phi_{12}(\tilde{\tilde{x}}, s)| &\leq \hat{\varphi}_{12}\|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\|.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \|g_2(\tilde{x}, \tilde{y}, s, \varepsilon) - g_2(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, s, \varepsilon)\| &\leq \frac{3N}{m^2}\|\tilde{y}\|\|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\| + \\
 &+ \frac{3M}{m^2}\varepsilon\|\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}\| + n\varepsilon\|\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}\| + \frac{3\varepsilon}{m}\|\tilde{y}\|\|\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}\| + \frac{3\varepsilon}{m}\|\tilde{\tilde{y}}\|\|\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}\| + \\
 &+ \frac{3N}{m^2}\varepsilon\|\tilde{y}\|^2\|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\| + \hat{\Phi}_{11}\varepsilon\|\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}\| + \hat{\varphi}_{11}\varepsilon\|\tilde{y}\|\|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\| + \hat{\varphi}_{12}\varepsilon\|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\| = \\
 &= \varepsilon M_1(\|\tilde{y}\| + \|\tilde{\tilde{y}}\|)\|\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}\| + N_1(\|\tilde{y}\|, \|\tilde{\tilde{y}}\|)\|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\|,
 \end{aligned}$$

причем $N_1(\|\tilde{y}\|, \|\tilde{\tilde{y}}\|) = \frac{3N}{m^2}\|\tilde{y}\| + \frac{3N}{m^2}\varepsilon\|\tilde{\tilde{y}}\|^2 + \varepsilon\hat{\varphi}_{11}\|\tilde{y}\| + \varepsilon\hat{\varphi}_{12}$. Легко заметить, что оценка (3.9) следует из только что доказанной оценки (3.8), при $\tilde{x} = \tilde{\tilde{x}} = x$.

Вернемся теперь к краевой задаче (3.3), (3.4). В силу (1.11') будем полагать

$$a(s) = \frac{3\rho(s)}{5\vartheta_0(s) - 3u_0^2(s)} > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq s \leq 1$$

(проверка неравенства $(5\vartheta(s) - 3u^2(s)) > 0$ в нулевом приближении обсуждается в Приложении). Заметим, что в [5] подробно изучалась краевая задача вида

$$\varepsilon \frac{dy}{ds} = Ay + g, \quad s \in (0, 1),$$

$$L_2y(0) = 0, \quad R_2y(1) = 0,$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $a = a(s) > 0$ при $0 \leq s \leq 1$, g — некоторая правая часть. Было показано, что для вышеупомянутой краевой задачи существует матрица Грина $G(s, t, \varepsilon)$, которая равномерно ограничена по норме для всех $s, t: 0 \leq s, t \leq 1$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, где ε_0 — некоторая положительная постоянная. Применительно к краевой задаче (3.3), (3.4) это означает, что существует матрица Грина $G_2(s, t, \varepsilon)$ и постоянные $\varepsilon_0, \mathcal{G}_2(\varepsilon_0) > 0$, такие, что

$$\|G_2(s, t, \varepsilon)\| \leq \mathcal{G}_2(\varepsilon_0) \quad (3.11)$$

для всех $s, t: 0 \leq s, t \leq 1$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Используя матрицу Грина $G_2(s, t, \varepsilon)$, перейдем от краевой задачи (3.3), (3.4) к интегральному уравнению

$$y(s) = \int_0^1 G_2(s, t, \varepsilon) g_2(x(t), y(t), t, \varepsilon) dt, \quad (3.12)$$

причем $x(s) \in S_{x_0, \delta}^x$. В операторном виде уравнение (3.12) будет иметь вид

$$y = T_2(x)y.$$

Здесь T_2 — нелинейный интегральный оператор. Ниже покажем, что можно указать допустимое множество, которое пробегает вектор y , такое, что для любого $x \in S_{x_0, \delta}^x$ оператор T_2 является сжимающим, т. е. существует вектор-функция $y(s)$ — решение уравнения (3.12), а значит, и краевой задачи (3.3), (3.4).

Пусть $S_{0, K\varepsilon}^y$ — множество вектор-функций $y(s): S_{0, K\varepsilon}^y = \{y(s) : y(s) \in C[0, 1], \|y\| \leq K\varepsilon\}$. Здесь $K > 0$ — некоторая постоянная.

Теорема 3.1. *Существует число $\varepsilon_2 > 0$, такое, что для любых $\varepsilon: 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ существуют числа $\delta, K > 0$ и, следовательно, определено множество $S_{0, K\varepsilon}^y$ вектор-функций $y(s)$, на котором оператор $T_2(x)$ будет сжимающим для любой вектор-функции $x(s) \in S_{x_0, \delta}^x$.*

Доказательство. Подберем числа ε, δ, K так, чтобы выполнялись условия:

1. $T_2(x)y \in S_{0, K\varepsilon}^y$ для всех $y \in S_{0, K\varepsilon}^y$ и $x \in S_{x_0, \delta}^x$.
2. $\|T_2(x)\tilde{y} - T_2(x)\tilde{\tilde{y}}\| \leq \xi\|\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}\|$, $0 < \xi < 1$, для всех $\tilde{y}, \tilde{\tilde{y}} \in S_{0, K\varepsilon}^y$ и $x \in S_{x_0, \delta}^x$.

Пусть $y \in S_{0, K\varepsilon}^y$. Тогда в силу неравенств (3.7), (3.11) получаем:

$$\|T_2(x)y\| = \left\| \int_0^1 G_2(s, t, \varepsilon) g_2(x, y, t, \varepsilon) dt \right\| \leq \mathcal{G}_2(\varepsilon_0) \varepsilon \{M_1(K\varepsilon)K\varepsilon + \hat{\Phi}_{12}\}.$$

Если

$$\left\{ M_1(K\varepsilon)\varepsilon + \frac{\hat{\Phi}_{12}}{K} \right\} \leq \frac{1}{\mathcal{G}_2(\varepsilon_0)}, \quad (3.13)$$

то условие 1 выполнено. С учетом неравенств (3.9), (3.11) имеем:

$$\|T_2(x)\tilde{y} - T_2(x)\tilde{\tilde{y}}\| \leq \mathcal{G}_2(\varepsilon_0)\varepsilon M_1(2K\varepsilon)\|\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}\|,$$

т. е., если

$$\varepsilon M_1(2K\varepsilon) < \frac{1}{\mathcal{G}_2(\varepsilon_0)}, \quad (3.14)$$

то выполнено условие 2. Докажем теперь, что неравенства (3.13), (3.14) совместны.

Лемма 3.3. Неравенства (3.13), (3.14) выполняются одновременно, если

$$\varepsilon < \frac{1}{\mathcal{G}_2(\varepsilon_0) \left[\sqrt{\frac{12\hat{\Phi}_{12}}{m} + \frac{3M}{m^2} + \hat{\Phi}_{11} + n} \right]} = \hat{\varepsilon}_0, \quad (3.15)$$

$$\frac{2\hat{\Phi}_{12}\mathcal{G}_2(\varepsilon_0)}{1 - \left(\frac{3M}{m^2} + \hat{\Phi}_{11} + n\right) \mathcal{G}_2(\varepsilon_0)\varepsilon} \leq K < \frac{\left(1 - \mathcal{G}_2(\varepsilon_0) \left(\frac{3M}{m^2} + \hat{\Phi}_{11} + n\right) \varepsilon\right) m}{\mathcal{G}_2(\varepsilon_0)6\hat{\Phi}_{12}\varepsilon^2}. \quad (3.16)$$

Доказательство. Пусть $a = \frac{3}{m}$, $b = \frac{3M}{m^2} + \hat{\Phi}_{11} + n$, $c = \frac{1}{\mathcal{G}_2(\varepsilon_0)}$, $d = \hat{\Phi}_{12}$. Тогда неравенства (3.13), (3.14) будут иметь вид:

$$aK\varepsilon^2 + b\varepsilon + \frac{d}{K} \leq c, \quad (3.13')$$

$$2aK\varepsilon^2 + b\varepsilon < c. \quad (3.14')$$

Из (3.14') следует

$$K < \frac{c - b\varepsilon}{2a\varepsilon^2}, \quad \varepsilon < \frac{c}{b}.$$

Следовательно,

$$aK\varepsilon^2 + b\varepsilon + \frac{d}{K} < \frac{c + b\varepsilon}{2} + \frac{d}{K}.$$

Если потребовать, чтобы

$$\frac{c + b\varepsilon}{2} + \frac{d}{K} \leq c,$$

то достаточно положить

$$K \geq \frac{2d}{c - b\varepsilon}.$$

В свою очередь, неравенство

$$\frac{2d}{c - b\varepsilon} < \frac{c - b\varepsilon}{2a\varepsilon^2}$$

выполняется, если

$$\varepsilon < \frac{c}{2\sqrt{ad} + b},$$

что и требовалось доказать.

Замечание 3.1. Ограничения (3.15), (3.16) являются достаточными. Например, при $\varepsilon = 0$ неравенства (3.13), (3.14) выполняются, если

$$K \geq \mathcal{G}_2(\varepsilon_0)\hat{\Phi}_{12}.$$

В то же время, из (3.16) следует оценка

$$K \geq 2\hat{\Phi}_{12}\mathcal{G}_2(\varepsilon_0).$$

Вернемся к доказательству Теоремы 3.1. Выберем такое ε_2 , что

$$0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0$$

и

$$0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{\mathcal{G}_2(\varepsilon_0) \left[\sqrt{\frac{12\hat{\Phi}_{12}}{m}} + \frac{3M}{m^2} + \hat{\Phi}_{11} + n \right]} (= \hat{\varepsilon}_0).$$

Тогда для любого $\varepsilon: 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ можно указать число $\delta_1: 0 < \delta_1 \leq \delta_0$, такое, что для любого $\delta: 0 < \delta \leq \delta_1$ справедлива Лемма 3.2, а, следовательно, и оценки (3.7), (3.8), (3.9). В силу этих оценок по Лемме 3.3 мы можем указать и число K (т. е. множество $S_{0,K\varepsilon}^y$). Теорема 3.1 полностью доказана.

4. Система (1.13) на интегральном многообразии $z(x, s, \varepsilon)$

В предыдущем разделе мы показали, что краевая задача (1.14), (1.16) имеет решение вида

$$z(s, x, \varepsilon) = y(s) + \Phi(x, s),$$

т. е. каждому значению s соответствует некоторое множество точек z , которые задаются соотношением $z = z(s, x, \varepsilon)$. Согласно [7], мы построили интегральное многообразие $z(s, x, \varepsilon)$ для краевой задачи (1.13) – (1.16) (система (1.13), (1.14) состоит из 5 уравнений), а, стало быть, можем свести исследование к рассмотрению краевой задачи для подсистемы (1.13) меньшей размерности.

Рассмотрим краевую задачу (1.13), (1.15) на многообразии $z(s, x, \varepsilon)$. С помощью формулы Тейлора представим правую часть в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(x, z) &= f_2(u, \vartheta, s) + qf_1(u, \vartheta) = f_2(u_0, \vartheta_0, s) + B(s)\delta x + qf_1(u_0, \vartheta_0) + \\ &+ q[\delta u f_{1u}(u^*, \vartheta^*) + \delta \vartheta f_{1\vartheta}(u^*, \vartheta^*)] + \frac{(\delta u)^2}{2} f_{2uu}(u^{**}, \vartheta^{**}, s) + \delta u \delta \vartheta f_{2u\vartheta}(u^{**}, \vartheta^{**}, s) + \\ &+ \frac{(\delta \vartheta)^2}{2} f_{2\vartheta\vartheta}(u^{**}, \vartheta^{**}, s) = f_2(u_0, \vartheta_0, s) + B(s)\delta x + g_1(\delta u, \delta \vartheta, q, s). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь

$$B(s) = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & -\frac{\rho'}{\rho} & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad \delta x = \begin{pmatrix} \delta \varphi \\ \delta u \\ \delta \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi - \varphi_0 \\ u - u_0 \\ \vartheta - \vartheta_0 \end{pmatrix} = x - x_0,$$

$$b_{12} = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{\tau_P} - \frac{1}{\tau_W} \right) - 2m_0 \frac{\rho'}{\rho^2} + \frac{\rho^2(\vartheta_0 - 1)}{\tau_W m_0^2},$$

$$b_{13} = \frac{5}{3} \frac{\rho'}{\rho} - \frac{\rho}{m_0 \tau_W},$$

$$b_{32} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\tau_P} - \frac{1}{\tau_W} \right) + \frac{\rho^2(\vartheta_0 - 1)}{\tau_W m_0^2}, \quad b_{33} = \frac{2\rho'}{3\rho} - \frac{\rho}{m_0 \tau_W}.$$

Остаточные члены в (4.1) взяты в некоторых промежуточных значениях $u^*, \vartheta^*, u^{**}, \vartheta^{**}$. Ясно, что $u^* = u^*(\delta u, \delta \vartheta)$, $\vartheta^* = \vartheta^*(\delta u, \delta \vartheta)$ и т. д. В дальнейшем, не нарушая общности, будем полагать, что все промежуточные значения помечены одной звездочкой.

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 4.1. *Решение краевой задачи (1.13), (1.15) можно искать в следующем виде:*

$$x(s, \varepsilon) = x_0(s) + \delta x(s, \varepsilon), \quad (4.2)$$

где вектор δx в свою очередь является решением такой краевой задачи:

$$\frac{d}{ds} \delta x = B(s) \delta x + g_1(\delta u, \delta \vartheta, q, s), \quad s \in (0, 1), \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} L_1 \delta x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ R_1 \delta x(1) = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Доказательство. Доказательство леммы очевидно, если подставить выражения (4.1), (4.2) в краевую задачу (1.13), (1.15) и вспомнить, что

$$\frac{d}{ds} x_0(s) = f_2(u_0, \vartheta_0, s), \quad s \in (0, 1),$$

$$L_1 x_0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$R_1 x_0(1) = B.$$

Ниже покажем, что решение краевой задачи (4.3), (4.4) существует и единственно. Схема доказательства такова. Сначала найдем фундаментальную матрицу решений (ф.м.р.) $X(s)$ для однородной системы (4.3) (без правой части g_1). Затем с ее помощью построим матрицу Грина $G_1(s, t)$ для задачи (4.3), (4.4). Зная матрицу Грина $G_1(s, t)$, мы сможем перейти от краевой задачи (4.3), (4.4) к интегральному уравнению:

$$\delta x(s) = \int_0^1 G_1(s, t) g_1(\delta u(t), \delta \vartheta(t), q(t), t) dt.$$

Далее, как и в разделе 3, покажем, что можно построить допустимое множество для вектора δx такое, что нелинейный интегральный оператор

$$T_1 \delta x = \int_0^1 G_1(s, t) g_1(\delta u, \delta \vartheta, q, t) dt \quad (4.5)$$

будет сжимающим на этом множестве.

5. Построение матриц $X(s)$ и $G_1(s, t)$

Приступим теперь к доказательству. Докажем следующую лемму.

Лемма 5.1. *Матрица*

$$X(s) = \begin{pmatrix} 1 & I_1(s) & I_2(s) \\ 0 & 0 & \frac{m_0}{\rho(s)} \\ 0 & \rho^{\frac{2}{3}}(s) E_0(s) & \rho^{\frac{2}{3}}(s) E_0(s) I_3(s) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
 E_0(s) &= \exp \left\{ - \int_0^s \frac{\rho(\xi)}{m_0 \tau_W} d\xi \right\}, \\
 I_1(s) &= \int_0^s \left[\frac{5}{3} \frac{\rho'}{\rho}(\xi) - \frac{\rho(\xi)}{m_0 \tau_W} \right] \rho^{\frac{2}{3}}(\xi) E_0(\xi) d\xi, \\
 I_2(s) &= \int_0^s \left[b_{12}(\xi) \frac{m_0}{\rho(\xi)} + b_{13}(\xi) \rho^{\frac{2}{3}}(\xi) E_0(\xi) I_3(\xi) \right] d\xi, \\
 I_3(s) &= \int_0^s \frac{1}{\rho^{\frac{2}{3}}(\xi) E_0(\xi)} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{2}{\tau_P} - \frac{1}{\tau_W} \right) \frac{m_0}{\rho(\xi)} + \frac{\rho(\xi)(\vartheta_0(\xi) - 1)}{\tau_W m_0} \right] d\xi,
 \end{aligned}$$

является ф.м.р. системы (4.3), т. е.

$$\frac{dX(s)}{ds} = B(s)X(s). \quad (5.1)$$

Доказательство. Пусть $x_{ij}(s)$, $i, j = 1, 2, 3$ — элементы искомой матрицы $X(s)$. В силу (5.1) функции $x_{ij}(s)$ являются решениями системы:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_{1j}}{ds} &= b_{12}x_{2j} + b_{13}x_{3j}, & \frac{dx_{2j}}{ds} &= -\frac{\rho'}{\rho}x_{2j}, \\
 \frac{dx_{3j}}{ds} &= b_{32}x_{2j} + b_{33}x_{3j}, & j &= 1, 2, 3.
 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Легко найти общее решение системы (5.2):

$$\begin{aligned}
 x_{2j} &= \frac{c_{2j}}{\rho(s)}, \\
 x_{3j}(s) &= c_{3j} \rho^{\frac{2}{3}}(s) E_0(s) + c_{2j} \rho^{\frac{2}{3}}(s) E_0(s) \int_0^s \frac{b_{32}(\xi) d\xi}{\rho^{\frac{5}{3}}(\xi) E_0(\xi)}, \\
 x_{1j}(s) &= \int_0^s \left\{ \frac{b_{12}(\xi)}{\rho(\xi)} c_{2j} + b_{13}(\xi) \rho^{\frac{2}{3}}(\xi) E_0(\xi) \left[c_{3j} + c_{2j} \int_0^\xi \frac{b_{32}(t) dt}{\rho^{\frac{5}{3}}(t) E_0(t)} \right] \right\} d\xi + c_{1j}, \quad j=1, 2, 3, \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

где c_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ — произвольные постоянные. Выберем их так, чтобы максимально упростить выражения (5.3). Если $c_{11} = c_{32} = 1$, $c_{23} = m_0$, а остальные $c_{ij} = 0$, то в итоге получим ф.м.р. $X(s)$, вид которой приведен в формулировке Леммы 5.1.

Матрица Грина $G_1(s, t)$, как известно, строится по матрице $X(s)$ следующим образом:

$$G_1(s, t) = \begin{cases} X(s)Z(t), & 0 \leq s \leq t, \\ X(s)Z(t) + X(s)X^{-1}(t), & t \leq s \leq 1, \end{cases} \quad (5.4)$$

где

$$Z(t) = \begin{bmatrix} L_1 X(0) \\ R_1 X(1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -R_1 X(1) \end{bmatrix} X^{-1}(t),$$

если при этом выполнено условие

$$\det \begin{bmatrix} L_1 X(0) \\ R_1 X(1) \end{bmatrix} \neq 0.$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} L_1 X(0) \\ R_1 X(1) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & I_1(1) & I_2(1) \end{bmatrix} = I_2(1) = \\ &= \int_0^1 \left[b_{12}(\xi) \frac{m_0}{\rho(\xi)} + b_{13}(\xi) \rho^{\frac{2}{3}}(\xi) E_0(\xi) I_3(\xi) \right] d\xi. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Численные расчеты показывают (см. Приложение), что в интересующей нас области изменения напряжения смещения B

$$I_2(1) \neq 0. \quad (5.6)$$

Следовательно, можно продолжить построение матрицы Грина $G_1(s, t)$.

Лемма 5.2. 1. Матрица Грина $G_1(s, t)$ имеет вид:

$$G_1(s, t) = \begin{cases} X(s) \mathcal{M} X^{-1}(t), & 0 \leq s \leq t, \\ X(s) \hat{\mathcal{M}} X^{-1}(t), & t \leq s \leq 1, \end{cases} \quad (5.7)$$

где

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{I_2(1)} & -\frac{I_1(1)}{I_2(1)} & -1 \end{pmatrix},$$

$\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} + I$, I — единичная матрица порядка 3.

2. Справедлива следующая оценка:

$$\|G_1(s, t)\| \leq \sqrt{\frac{1 + I_1^2(1) + I_2^2(1)}{I_2^2(1)}} \left(2 + \frac{m_0^2}{\rho_0^2} + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 \right) \frac{1}{m_0 E_0(1)} = \mathcal{G}_1 \quad \text{для любых } s, t \in [0, 1], \quad (5.8)$$

где $I_i = \max_{s \in [0, 1]} |I_i(s)|$, $i = 1, 2, 3$.

Доказательство. Поскольку

$$Z(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{I_2(1)} & -\frac{I_1(1)}{I_2(1)} & \frac{1}{I_2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -I_1(1) & -I_2(1) \end{pmatrix} X^{-1}(t) = \mathcal{M} X^{-1}(t),$$

то первое утверждение леммы очевидно. Для получения оценки (5.8) обратимся вновь к работе [5], в которой мы показали, что для матриц вида (5.7) справедливо неравенство

$$\|G_1(s, t)\| \leq \begin{cases} \frac{\|X(s)\| \|X(t)\|}{\min_{t \in [0, 1]} |\det X(t)|} \|\mathcal{M}\|, & 0 \leq s \leq t, \\ \frac{\|X(s)\| \|X(t)\|}{\min_{t \in [0, 1]} |\det X(t)|} \|\hat{\mathcal{M}}\|, & t \leq s \leq 1, \end{cases}$$

для любых $s, t \in [0, 1]$.

Поскольку

$$|\det X(t)| = \frac{m_0 E_0(t)}{\rho^{1/3}(t)},$$

и $E_0(t)$ — убывающая функция, то

$$\frac{1}{|\det X(t)|} \leq \frac{1}{m_0 E_0(1)}.$$

Очевидно, что:

$$\|X(s)\|^2 \leq \max_{s \in [0,1]} \left(2 + \frac{m_0^2}{\rho_0^2} + I_1^2(s) + I_2^2(s) + I_3^2(s) \right) \leq \left(2 + \frac{m_0^2}{\rho_0^2} + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 \right)$$

для всех $s \in [0, 1]$.

Поэтому

$$\|X(s)\| \|X(t)\| \leq \left(2 + \frac{m_0^2}{\rho_0^2} + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 \right)$$

для любых $s, t \in [0, 1]$.

Наконец, без труда находим, что

$$\|\mathcal{M}\|^2 = \|\hat{\mathcal{M}}\|^2 = \lambda_{\max}(\mathcal{M}^* \mathcal{M}) = \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}^* \hat{\mathcal{M}}) = \frac{1 + I_1^2(1) + I_2^2(1)}{I_2^2(1)}.$$

Отсюда следует оценка (5.8).

6. Нахождение решения краевой задачи (4.3), (4.4)

Приступим теперь к доказательству того, что T_1 (см. (4.5)) — сжимающее. Вначале докажем лемму, в которой будут получены некоторые оценки для вектор-функции $g_1(\delta u, \delta \vartheta, q, s)$.

Лемма 6.1. Пусть $\delta x, \delta \tilde{x}, \delta \tilde{\tilde{x}} \in S_{x_0, \delta}^x$, $y \in S_{0, K\varepsilon}^y$. Справедливы оценки:

$$\|g_1(\delta u, \delta \vartheta, q, s)\| \leq [K\varepsilon(1 + 2\delta) + 2\delta^2] \hat{g}_1, \quad (6.1)$$

$$\|g_1(\delta \tilde{u}, \delta \tilde{\vartheta}, q, s) - g_1(\delta \tilde{\tilde{u}}, \delta \tilde{\tilde{\vartheta}}, q, s)\| \leq 2[K\varepsilon(1 + \delta) + \delta(2 + \delta)] \hat{g}_1 \|\delta \tilde{x} - \delta \tilde{\tilde{x}}\|. \quad (6.2)$$

Постоянная \hat{g}_1 описана ниже.

Доказательство. Через \hat{g}_1 обозначим постоянную, которая равномерно ограничивает вектор-функции $f_1, f_{1u}, f_{1\vartheta}, f_{2uu}, f_{2u\vartheta}, f_{2\vartheta\vartheta}$. Справедливы также следующие неравенства:

$$\|f_{1u}(\tilde{u}^*, \tilde{\vartheta}^*) - f_{1u}(\tilde{\tilde{u}}^*, \tilde{\tilde{\vartheta}}^*)\| \leq \hat{g}_1 \|\delta \tilde{x} - \delta \tilde{\tilde{x}}\|,$$

$$\|f_{2\vartheta\vartheta}(\tilde{u}^*, \tilde{\vartheta}^*, s) - f_{2\vartheta\vartheta}(\tilde{\tilde{u}}^*, \tilde{\tilde{\vartheta}}^*, s)\| \leq \hat{g}_1 \|\delta \tilde{x} - \delta \tilde{\tilde{x}}\|.$$

Здесь $\tilde{u}^* = u^*(\delta \tilde{u}, \delta \tilde{\vartheta})$, $\tilde{\tilde{u}}^* = u^*(\delta \tilde{\tilde{u}}, \delta \tilde{\tilde{\vartheta}})$ и т. д. Заметим также, что постоянная \hat{g}_1 определяется через величины δ_0, ε_0 . Дальнейшие рассуждения по поводу оценок (6.1), (6.2) очевидны.

Наконец, сформулируем и докажем теорему о сжимаемости оператора T_1 .

Теорема 6.1. Пусть T_1 — отображение, задаваемое формулой (4.5), и пусть $y \in S_{0, K\varepsilon}^y$. Тогда существует такое число $\varepsilon_1 > 0$, что для всех $\varepsilon : 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ оператор T_1 является сжимающим на множестве $S_{0, \delta}^x$.

Доказательство. Для сжимаемости оператора T_1 надо доказать, что

$$1. \|T_1 \delta x\| = \left\| \int_0^1 G_1(s, t) g_1(\delta u, \delta \vartheta, q, t) dt \right\| \leq \delta \text{ для любых } \delta x \in S_{0, \delta}^x, y \in S_{0, K\varepsilon}^y.$$

$$2. \|T_1 \delta \tilde{x} - T_1 \delta \tilde{\tilde{x}}\| = \left\| \int_0^1 G_1(s, t) [g_1(\delta \tilde{u}, \delta \tilde{\vartheta}, q, t) - g_1(\delta \tilde{\tilde{u}}, \tilde{\tilde{\vartheta}}, q, t)] dt \right\| < \|\delta \tilde{x} - \delta \tilde{\tilde{x}}\|.$$

В силу оценки (5.7) условия 1, 2 будут иметь вид

$$1. \|g_1(\delta u, \delta \vartheta, q, t)\| \leq \frac{\delta}{\mathcal{G}_1},$$

$$2. \|g_1(\delta \tilde{u}, \delta \tilde{\vartheta}, q, t) - g_1(\delta \tilde{\tilde{u}}, \tilde{\tilde{\vartheta}}, q, t)\| < \frac{\|\delta \tilde{x} - \delta \tilde{\tilde{x}}\|}{\mathcal{G}_1}.$$

С учетом оценок (6.1), (6.2) приходим к неравенствам

$$K\varepsilon(1 + 2\delta) + 2\delta^2 \leq \frac{\delta}{\mathcal{G}_1 \hat{g}_1}, \quad (6.3)$$

$$2[K\varepsilon(1 + \delta) + \delta(2 + \delta)] < \frac{1}{\mathcal{G}_1 \hat{g}_1}. \quad (6.4)$$

Из (6.3) следует:

$$K\varepsilon < \frac{\delta}{(1 + 2\delta)\mathcal{G}_1 \hat{g}_1}. \quad (6.5)$$

При условии (6.5) неравенство (6.4) заведомо выполняется при малых δ . С учетом (3.16) приходим к неравенству

$$\frac{2\hat{\Phi}_{12}\varepsilon\mathcal{G}_2(\varepsilon_0)}{1 - \left(\frac{3M}{m^2} + \hat{\Phi}_{11} + n\right)\mathcal{G}_2(\varepsilon_0)\varepsilon} < \frac{\delta}{(1 + 2\delta)\mathcal{G}_1 \hat{g}_1}$$

или, усиливая неравенство,

$$\frac{\varepsilon}{\delta} < \frac{1 - \left(\frac{3M}{m^2} + \hat{\Phi}_{11} + n\right)\mathcal{G}_2(\varepsilon_0)\hat{\varepsilon}_0}{2\hat{\Phi}_{12}\mathcal{G}_2(\varepsilon_0)\mathcal{G}_1 \hat{g}_1} (= \chi).$$

Следовательно, можем выбирать ε и δ так, чтобы

$$\frac{\varepsilon}{\delta} = \alpha\chi, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Отсюда, в частности, следует, что постоянная M в неравенстве (3.10) определяется через величину δ_0 .

Суммируя вышеизложенное, приходим к выводу, что нами доказано следующее утверждение:

При сделанных выше предположениях относительно функций и постоянных, входящих в (1.10), (1.12), эта задача имеет единственное решение следующего вида

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(s) \\ \Phi(x_0(s), s) \end{pmatrix} + O(\varepsilon)$$

для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*$, где $\varepsilon^* = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Авторы признательны аспирантке НГУ А. С. Бушмановой за большую помощь при выполнении этой работы.

Приложение

В Приложении помещены численные результаты проверки выполнения условий (1.11') (в нулевом приближении), (5.6); исследован характер зависимости B от m_0 и получены так называемые вольт-амперные характеристики для конкретных приборов.

Обозначим $\Lambda(s) = \vartheta_0(s) - 1$ и перепишем формулу для функции $\vartheta_0(s)$ (см. (2.5)):

$$\Lambda(s) = \frac{\rho^{\frac{2}{3}}(s)}{\Phi^{\frac{\nu}{m_0}}(s)} \frac{2}{3} \int_0^s (\rho'(\xi) + m_0 \hat{\mu}) \frac{\Phi^{\frac{\nu}{m_0}}(\xi)}{\rho^{\frac{5}{3}}(\xi)} d\xi. \quad (0.1)$$

Здесь

$$\Phi(s) = \exp \left(\int_0^s \rho(\xi) d\xi \right),$$

$m_0 = \rho(s)u_0(s) = \text{const} > 0$ — поток электронного газа, $\nu = \frac{1}{\tau_W}$, $\mu = \frac{1}{\tau_P}$, $\hat{\mu} = \mu - \frac{\nu}{2}$.

С учетом (0.1), соотношение (2.6) примет такой вид:

$$B = \Lambda(1) + \int_0^1 \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \Lambda(s) ds + \mu m_0 \int_0^1 \frac{ds}{\rho(s)}. \quad (0.2)$$

Введем в рассмотрение функцию $\bar{\vartheta}(s) + 1$:

$$\bar{\vartheta}(s) + 1 = \frac{\rho^{\frac{2}{3}}(s)}{\Phi^{\frac{\nu}{m_0}}(s)} \int_0^s \Lambda(t) \rho(t) \frac{\nu}{m_0} \frac{\Phi^{\frac{\nu}{m_0}}(t)}{\rho^{\frac{2}{3}}(t)} dt - \frac{2}{3} \frac{\rho^{\frac{2}{3}}(s)}{\Phi^{\frac{\nu}{m_0}}(s)} \int_0^s \frac{\rho'(t) \Phi^{\frac{\nu}{m_0}}(t)}{\rho^{\frac{5}{3}}(t)} dt.$$

В этих обозначениях условие (5.6) будет иметь вид

$$B + (\bar{\vartheta}(1) + 1) + \int_0^1 \bar{\vartheta}(t) \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} dt \neq 0.$$

Опишем теперь постоянные μ , ν и функцию $\rho(s)$. Сначала приведем значения необходимых параметров, которые для удобства сведены в табл. 1 (в круглых скобках указана размерность).

Т а б л и ц а 1

T_0 (К)	m (Kg)	l (met)	l_{n^+} (met)	l_n (met)	N^+ (cm ⁻³)	N_n (cm ⁻³)
300	$0.26 \cdot m_e$	$6 \cdot 10^{-7}$ $3 \cdot 10^{-7}$	10^{-7}	$4 \cdot 10^{-7}$ 10^{-7}	$5 \cdot 10^{17}$	$2 \cdot 10^{15}$
77	$0.24 \cdot m_e$	$12 \cdot 10^{-7}$	10^{-7}	10^{-6}	10^{18}	10^{15}

Здесь T_0 — температура окружающей среды, m — эффективная масса электрона, m_e — масса электрона: $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ (Kg); l — длина $n^+ - n - n^+$ канала баллистического диода,

$$l = 2l_{n^+} + l_n,$$

l_{n^+} — длина n^+ -области диода, l_n — длина n -области.

Значения безразмерных постоянных τ_P, τ_W возьмем из работы [2], полагая

$$\tau_{P,W} = \left\{ a_{P,W} + b_{P,W} \frac{1}{2} + c_{P,W} \exp \left(-\frac{1}{2} d_{P,W} \right) \right\} 10^{-12} \frac{C_0}{l}. \quad (0.3)$$

Здесь $a_P = 0.1153, b_P = -0.0068, c_P = 0.4988, d_P = 1.5137, a_W = 0.4076, b_W = 0.0075, c_W = 3.1546, d_W = 1.4833, C_0 = \sqrt{\frac{K_B T_0}{m}} \left(\frac{\text{met}}{\text{sec}} \right), K_B$ — постоянная Больцмана: $K_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \left(\text{JK}^{-1} = \text{Kg} \frac{(\text{met})^2}{(\text{sec})^2} \text{K}^{-1} \right)$.

Величина B связана с напряжением смещения V_b

$$B = V_b(\text{Volt}) \frac{q}{K_B T_0} (\text{Volt}^{-1}), \quad (0.4)$$

где q — заряд электрона: $q = 1.6 \cdot 10^{-19} (\text{Cul})$.

В наших расчетах функция $\rho(s)$ является сглаженной версией кусочно-постоянной функции, приведенной на рис. 1 (для $T_0 = 77(\text{K})$ график выглядит аналогично), и за-

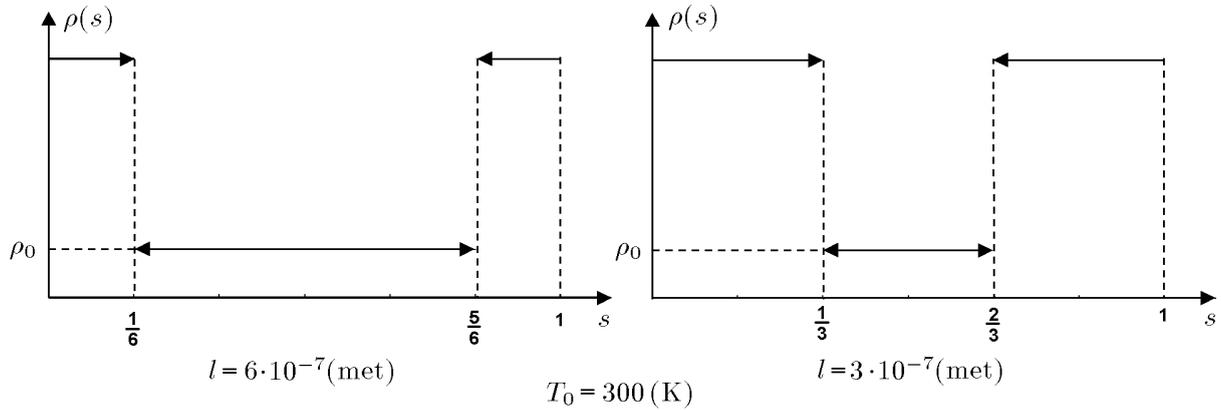


Рис. 1.

дается следующим образом (рис. 2):

$$\rho(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq s \leq d - \Delta, \\ \rho_1(s), & \text{если } d - \Delta \leq s \leq d + \Delta, \\ \rho_0, & \text{если } d + \Delta \leq s \leq 1 - d - \Delta, \\ \rho_2(s), & \text{если } 1 - d - \Delta \leq s \leq 1 - d + \Delta, \\ 1, & \text{если } 1 - d + \Delta \leq s \leq 1, \end{cases}$$

где

$$\rho_1(s) = -\frac{15}{16}(1 - \rho_0) \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x \right] + \frac{1 + \rho_0}{2}, \quad x = \frac{s - d}{\Delta},$$

$$\rho_2(s) = \frac{15}{16}(1 - \rho_0) \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x \right] + \frac{1 + \rho_0}{2}, \quad x = \frac{s - (1 - d)}{\Delta}$$

и значения необходимых параметров приведены в табл. 2.

И, наконец, получим ограничения на m_0 . Первое условие в (1.11') для нулевого приближения будет иметь вид

$$5\vartheta_0(s)\rho^2(s) - 3m_0^2 > 0. \quad (0.5)$$

Тогда

$$0 < m_0 < \sqrt{\frac{5}{3}}. \quad (0.6)$$

Т а б л и ц а 2

T_0	$\rho_0 = \frac{N_n}{N^+}$	$d = \frac{l_{n^+}}{l}$	Δ
300	0.004	$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$
77	0.001	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

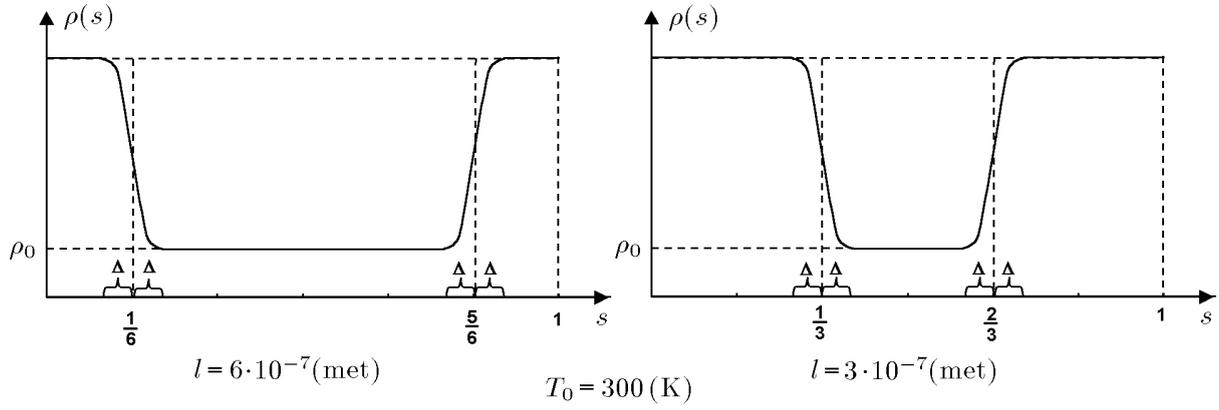


Рис. 2.

Расчеты проводились для режимов I–III (табл. 3–5 соответственно) на равномерной сетке с шагом h :

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= 300, \\ l &= 6 \cdot 10^{-7}, \\ \rho_0 &= 0.004, \\ d &= \frac{1}{6}, \\ \Delta &= \frac{1}{12}, h = \frac{1}{120}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= 300, \\ l &= 3 \cdot 10^{-7}, \\ \rho_0 &= 0.004, \\ d &= \frac{1}{3}, \\ \Delta &= \frac{1}{12}, h = \frac{1}{240}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= 77, \\ l &= 12 \cdot 10^{-7}, \\ \rho_0 &= 0.001, \\ d &= \frac{1}{12}, \\ \Delta &= \frac{1}{24}, h = \frac{1}{360} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

следующим образом. Отрезок $[0, 1]$ был разбит на $1/h$ равных отрезков с узлами $s_i = ih$, $i = 0, \dots, 1/h$. Пусть F — функция, которую необходимо найти, — имеет вид:

$$F(s) = \int_0^s f(t) dt.$$

В узлах сетки значение F ищем по формуле:

$$F(s_i) = \int_0^{s_i} f(t) dt = \sum_{k=1}^i h \left(\frac{f(s_k) + f(s_{k-1})}{2} \right).$$

Если же F имеет вид

$$F(s) = g(s) \int_0^s f(t) dt,$$

то

$$\begin{aligned} F(s_i) &= g(s_i) \sum_{k=1}^i h \left(\frac{f(s_k) + f(s_{k-1})}{2} \right) = \\ &= g(s_i) h \left(\frac{f(s_i) + f(s_{i-1})}{2} \right) + g(s_i) \sum_{k=1}^{i-1} h \left(\frac{f(s_k) + f(s_{k-1})}{2} \right) = \\ &= \frac{h}{2} (g(s_i) f(s_i) + g(s_i) f(s_{i-1})) + \frac{g(s_i)}{g(s_{i-1})} F(s_{i-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, по этой формуле

$$\begin{aligned} \Lambda(s_i) &= \frac{h}{2} \left(\frac{2}{3} (\rho'(s_i) + m_0 \hat{\mu}) \frac{1}{\rho(s_i)} + \frac{2}{3} (\rho'(s_{i-1}) + m_0 \hat{\mu}) \frac{\rho^{2/3}(s_i)}{\rho^{5/3}(s_{i-1})} \left(\frac{\Phi(s_{i-1})}{\Phi(s_i)} \right)^{\nu/m_0} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{\rho(s_i)}{\rho(s_{i-1})} \right)^{2/3} \left(\frac{\Phi(s_{i-1})}{\Phi(s_i)} \right)^{\nu/m_0} \Lambda(s_{i-1}), \\ B &= \Lambda(1) + \sum_{i=1}^{1/h} \frac{h}{2} \left(\frac{\rho'(s_i)}{\rho(s_i)} \Lambda(s_i) + \frac{\rho'(s_{i-1})}{\rho(s_{i-1})} \Lambda(s_{i-1}) \right) + \mu m_0 \text{int}, \end{aligned}$$

где

$$\text{int} = \begin{cases} 167, & \text{для режима I,} \\ 84, & \text{для режима II,} \\ 833.5, & \text{для режима III;} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}(s_i) + 1 &= \frac{h}{2} \left(\left(\Lambda(s_i) \rho(s_i) \frac{\nu}{m_0} - \frac{2}{3} \frac{\rho'(s_i)}{\rho(s_i)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\rho(s_i)}{\rho(s_{i-1})} \right)^{2/3} \left(\frac{\Phi(s_{i-1})}{\Phi(s_i)} \right)^{\nu/m_0} \left(\Lambda(s_{i-1}) \rho(s_{i-1}) \frac{\nu}{m_0} - \frac{2}{3} \frac{\rho'(s_{i-1})}{\rho(s_{i-1})} \right) \right) + \\ &\quad + \left(\frac{\rho(s_i)}{\rho(s_{i-1})} \right)^{2/3} \left(\frac{\Phi(s_{i-1})}{\Phi(s_i)} \right)^{\nu/m_0} (\bar{\vartheta}(s_{i-1}) + 1), \end{aligned}$$

$$I_2(1) = B + (\bar{\vartheta}(1) + 1) + \sum_{i=1}^{1/h} \frac{h}{2} \left(\frac{\rho'(s_i)}{\rho(s_i)} \bar{\vartheta}(s_i) + \frac{\rho'(s_{i-1})}{\rho(s_{i-1})} \bar{\vartheta}(s_{i-1}) \right).$$

В первом столбце табл. 3–5 помещены значения m_0 , такие, что выполняется условие (0.6) и

$$0.45 < V_b < 2.$$

Во втором столбце помещены значения V_b , в третьем — значения \min , где

$$\min = \min_{s \in [0,1]} (5\vartheta_0(s)\rho^2(s) - 3m_0^2),$$

в четвертом — значения $I_2(1)$.

Как нетрудно заметить, V_b зависит от m_0 практически линейным образом.

Т а б л и ц а 3

Т а б л и ц а 4

Режим I			
m_0	V_b	\min	$I_2(1)$
$8 \cdot 10^{-5}$	0.454	$8.53 \cdot 10^{-5}$	34.42
$8.5 \cdot 10^{-5}$	0.4823	$8.56 \cdot 10^{-5}$	34.714
$9 \cdot 10^{-5}$	0.51	$8.59 \cdot 10^{-5}$	35.1
$9.5 \cdot 10^{-5}$	0.539	$8.63 \cdot 10^{-5}$	35.556
10^{-4}	0.567	$8.66 \cdot 10^{-5}$	36.08
$1.1 \cdot 10^{-4}$	0.624	$8.73 \cdot 10^{-5}$	37.28
$1.2 \cdot 10^{-4}$	0.681	$8.79 \cdot 10^{-5}$	38.645
$1.3 \cdot 10^{-4}$	0.7374	$8.86 \cdot 10^{-5}$	40.14
$1.4 \cdot 10^{-4}$	0.8	$8.92 \cdot 10^{-5}$	41.73
$1.5 \cdot 10^{-4}$	0.85	$8.99 \cdot 10^{-5}$	43.4
$1.6 \cdot 10^{-4}$	0.91	$9.05 \cdot 10^{-5}$	45.14
$1.7 \cdot 10^{-4}$	0.964	$9.12 \cdot 10^{-5}$	46.93
$1.8 \cdot 10^{-4}$	1.02	$9.18 \cdot 10^{-5}$	48.766
$1.9 \cdot 10^{-4}$	1.077	$9.25 \cdot 10^{-5}$	50.64
$2 \cdot 10^{-4}$	1.134	$9.31 \cdot 10^{-5}$	52.54
$2.5 \cdot 10^{-4}$	1.41	$9.64 \cdot 10^{-5}$	62.41
$3 \cdot 10^{-4}$	1.7	$9.96 \cdot 10^{-5}$	72.64
$3.2 \cdot 10^{-4}$	1.8145	$1.01 \cdot 10^{-4}$	76.8
$3.4 \cdot 10^{-4}$	1.927	$1.02 \cdot 10^{-4}$	80.97
$3.5 \cdot 10^{-4}$	1.984	$1.03 \cdot 10^{-4}$	83.07

Режим II			
m_0	V_b	\min	$I_2(1)$
$3.5 \cdot 10^{-4}$	0.499	$8.55 \cdot 10^{-5}$	19.873
$4 \cdot 10^{-4}$	0.57	$8.62 \cdot 10^{-5}$	22.58
$4.5 \cdot 10^{-4}$	0.64	$8.7 \cdot 10^{-5}$	25.29
$5 \cdot 10^{-4}$	0.71	$8.78 \cdot 10^{-5}$	28.02
$5.5 \cdot 10^{-4}$	0.78	$8.87 \cdot 10^{-5}$	30.75
$6 \cdot 10^{-4}$	0.855	$8.95 \cdot 10^{-5}$	33.49
$6.5 \cdot 10^{-4}$	0.926	$9.04 \cdot 10^{-5}$	36.23
$7 \cdot 10^{-4}$	0.998	$9.14 \cdot 10^{-5}$	38.97
$7.5 \cdot 10^{-4}$	1.069	$9.24 \cdot 10^{-5}$	41.71
$8 \cdot 10^{-4}$	1.14	$9.34 \cdot 10^{-5}$	44.45
$8.5 \cdot 10^{-4}$	1.212	$9.45 \cdot 10^{-5}$	47.2
$9 \cdot 10^{-4}$	1.28	$9.57 \cdot 10^{-5}$	49.95
$9.5 \cdot 10^{-4}$	1.35	$9.68 \cdot 10^{-5}$	52.7
10^{-3}	1.426	$9.81 \cdot 10^{-5}$	55.45
$1.05 \cdot 10^{-3}$	1.497	$9.93 \cdot 10^{-5}$	58.2
$1.1 \cdot 10^{-3}$	1.568	$1.01 \cdot 10^{-4}$	60.94
$1.15 \cdot 10^{-3}$	1.639	$1.02 \cdot 10^{-4}$	63.7
$1.2 \cdot 10^{-3}$	1.711	$1.03 \cdot 10^{-4}$	66.45
$1.25 \cdot 10^{-3}$	1.782	$1.05 \cdot 10^{-4}$	69.20
$1.3 \cdot 10^{-3}$	1.853	$1.06 \cdot 10^{-4}$	71.96
$1.35 \cdot 10^{-3}$	1.924	$1.08 \cdot 10^{-4}$	74.71

Т а б л и ц а 5

Режим III			
m_0	V_b	min	$I_2(1)$
$1.8 \cdot 10^{-5}$	0.496	$5.38 \cdot 10^{-5}$	93.33
$2 \cdot 10^{-5}$	0.551	$5.42 \cdot 10^{-5}$	100.284
$2.5 \cdot 10^{-5}$	0.69	$5.52 \cdot 10^{-5}$	118.6
$3 \cdot 10^{-5}$	0.826	$5.63 \cdot 10^{-5}$	137.73
$3.5 \cdot 10^{-5}$	0.964	$5.73 \cdot 10^{-5}$	157.31
$4 \cdot 10^{-5}$	1.102	$5.83 \cdot 10^{-5}$	177.2
$4.5 \cdot 10^{-5}$	1.24	$5.94 \cdot 10^{-5}$	197.257
$5 \cdot 10^{-5}$	1.377	$6.04 \cdot 10^{-5}$	217.458
$5.5 \cdot 10^{-5}$	1.515	$6.14 \cdot 10^{-5}$	237.756
$6 \cdot 10^{-5}$	1.653	$6.25 \cdot 10^{-5}$	258.128
$6.5 \cdot 10^{-5}$	1.79	$6.35 \cdot 10^{-5}$	278.557
$7 \cdot 10^{-5}$	1.93	$6.45 \cdot 10^{-5}$	299.03

Список литературы

- [1] BLOKHIN A. M., IOHRDANIDY A. A., KRYMSKIKH D. A. *Numerical Investigation of the Hydrodynamic Model Equations for Charge Transport in Semiconductors*. Prepr. No. 26, Sobolev In-te of Math. SB RAS. Novosibirsk, 1995.
- [2] BLOKHIN A. M., IOHRDANIDY A. A., MERAZHOV I. Z. *Numerical Investigation of the Gas Dynamic Model Equations for Charge Transport in Semiconductors*. Prepr. No. 33, Sobolev In-te of Math. SB RAS. Novosibirsk, 1996.
- [3] BLOKHIN A. M., IOHRDANIDY A. A. Numerical investigation of a gas dynamical model for charge transport in semiconductors. *COMPEL*, **18**, No. 1, 1999, 6–37.
- [4] БЛОХИН А. М. *Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики*. Наука, Новосибирск, 1986.
- [5] БЛОХИН А. М., БУШМАНОВА А. С., МИЩЕНКО Е. В. О нахождении решений одной нелинейной краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения. *Вычисл. технологии*, **4**, №6, 1999, 27–57.
- [6] БЛОХИН А. М., БУШМАНОВА А. С. Исследование устойчивости состояния равновесия для газодинамической модели переноса заряда в полупроводниках. *Сибирский журнал индустриальной математики*, январь-июнь, **1**, №1, 1998, 41–56.
- [7] МИТРОПОЛЬСКИЙ Ю. А., ЛЫКОВА О. Б. *Интегральные многообразия в нелинейной механике*. Наука, М., 1973.

Поступила в редакцию 28 февраля 2000 г.,
в переработанном виде 24 мая 2000 г.