Вычислительные технологии **Том 5, № 4, 2000**

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВЯЗИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С КОНВЕКТИВНЫМ ЧЛЕНОМ*

А. В. Шмидт
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Красноярск, Россия

Differential constraints for a class of nonlinear diffusion equations with a convection term are constructed with the help of linear determining equations which are the generalization of the classical determining equations. It is proved that for the class under study the solution set of linear determining equations is wider than for the classical equations. With the help of the obtained differential constraints expanding the solution set of classical determining equations, some solutions of the appropriate diffusion equations are constructed.

1. Постановка задачи

Нелинейное диффузионное уравнение

$$u_t = (\varphi(u)u_x + \psi(u))_x \tag{1}$$

возникает при описании фильтрационных процессов в пористых средах (см., например, [1]). Зависимость коэффициентов φ и ψ от u в приложениях обычно является степенной. Отрицательные степенные показатели в коэффициенте φ используются при моделировании диффузионных процессов в полимерах, полупроводниках, в пористых средах и др. [2].

В данной работе находятся дифференциальные связи и проводится построение некоторых решений уравнения

$$u_t = (u^k u_x + u^m)_x. \tag{2}$$

Дифференциальные связи могут быть найдены с помощью линейных определяющих уравнений (в дальнейшем ЛОУ), предложенных в работе [3]. Как указано в [3], ЛОУ обобщают классические определяющие уравнения, используемые для нахождения допускаемых дифференциальными уравнениями операторов. Там же приведены результаты решения ЛОУ для уравнения

$$u_t = (u^{k_1} u_x)_x,$$

которое нелокальной заменой [4] переводится в уравнение

$$u_t = (u^{k_2} u_x + u)_x.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Интеграционного проекта СО РАН №2000–1.
© А. В. Шмидт, 2000.

Такая замена связывает также решения ЛОУ, соответствующие этим диффузионным уравнениям. Поэтому, в дальнейшем нас будут интересовать случаи $m \neq 0$ и $m \neq 1$.

С точки зрения групповой классификации [5], можно выделить следующие показатели, при которых уравнение (2) допускает нетривиальную группу преобразований: $k = 0$, $m = 0, 1, 2$ и $k = -2$, $m = 0, \pm 1$. Эти случаи мы оставим в стороне.

2. Анализ линейного определяющего уравнения

Согласно [3], многообразие H

$$h(t, x, u, u_1, \ldots, u_n) = 0,$$

где $u_i = \partial^i u / \partial x^i$, является инвариантным по отношению к эволюционному уравнению E

$$u_t = F(t, x, u, u_1, u_2),$$

если выполняется условие инвариантности

$$D_t[h]|_{[E]\cap[H]} = 0.$$

Через $[E]$ и $[H]$ здесь, как и в [3], обозначены соответственно уравнение E и многообразие H вместе с дифференциальными следствиями по переменной x.

В [3, 7] условие инвариантности было записано в виде нелинейного определяющего уравнения инвариантного многообразия

$$D_t(h) = F_{u_2} D_x^2(h) + (F_{u_1} + nD_x(F_{u_2}))D_x(h) + (F_u + nD_x(F_{u_1}) - h_{u_{n-1}} D_x(F_{u_2}) +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2} D_x^2(F_{u_2}) + F_{u_2} h h_{u_{n-1}u_{n-1}} - 2F_{u_2} D_x(h_{u_{n-1}}))h,$$

решение которого, как правило, представляет значительные трудности.

Вместо нелинейного определяющего уравнения инвариантного многообразия в работе [3] предложено использовать похожее на него ЛОУ

$$D_t(h) = F_{u_2} D_x^2(h) + (b_1 F_{u_1} + b_2 D_x(F_{u_2}))D_x(h) + (b_3 F_u + b_4 D_x(F_{u_1}) + b_5 D_x^2(F_{u_2}))h,$$

где $b_i \in R$ и определяются в ходе решения ЛОУ. Как указано в [3], выбор ЛОУ обусловлен тем, что оно по форме близко к нелинейному определяющему уравнению инвариантного многообразия, и классические определяющие уравнения, используемые для нахождения допускаемых операторов дифференциальных уравнений, являются частным случаем ЛОУ.

Несложно выписать ЛОУ, соответствующее уравнению (2)

$$D_t h - u^k D_x^2 h - (b_1 u^{k-1} u_x + b_2 u^{m-1}) D_x h - (b_3 u^{k-1} u_{xx} + b_4 u^{k-2} u_x^2 + b_5 u^{m-2} u_x) h = 0. \quad (3)$$

Решения ЛОУ (3), как и в работе [3], могут быть найдены в виде, разрешенном относительно старшей производной

$$h = u_n + g(t, x, u, u_1, \ldots, u_{n-1}), \quad (4)$$

что, в случае инвариантности h, будет гарантировать [7] существование гладкого решения системы, образованной (2) и (4). Порядком решения ЛОУ принято называть порядок старшей производной, входящей в h [3].

ЛОУ (3) обладает решениями первого и второго порядков. Однако, последние приводят лишь к инвариантным решениям уравнения (2). Поэтому начнем с поиска дифференциальных связей третьего порядка

$$h = u_3 + g(t, x, u, u_1, u_2). \tag{5}$$

После подстановки (5) в уравнение (3) все производные по t, содержащиеся в ЛОУ, выражаются с помощью (2). В результате, ЛОУ (3) становится полиномом относительно u_4 и u_3, который должен тождественно обращаться в ноль. Приводя подобные члены при u_4u_1, u_4, u_3^2, получаем три соотношения

$$b_1 - 5k = 0, \quad b_2 - m = 0, \quad g_{u_2u_2} = 0.$$

Следовательно, $b_1 = 5k$, $b_2 = m$, и, наконец,

$$g = g^1u_2 + g^2,$$

где функции g^1, g^2 могут зависеть только от t, x, u и u_1. Члены, содержащие u_3u_2 и $u_3u_1^2$, дают пару уравнений

$$2ug^1_{u_1} - 10k + b_3 = 0, \qquad 2b_3 - 10k^2 - kb_3 + 2b_4 = 0,$$

откуда, соответственно, получаем

$$g^1 = (5k - b_3/2)\frac{u_1}{u} + g^3, \qquad b_3 = 2(b_4 - 5k^2)/(k-2),$$

где функция g^3 может зависеть только от t, x, u. Собирая подобные члены при u_3u_1, получаем уравнение

$$2ug^3_u + g^3 - (4m^2 - 4m - b_5)u^{m-k-1} = 0,$$

интегрируя которое, находим

$$g^3 = g^4u^{-k/2} + \frac{2m^2 - 2m - b_5/2}{m - k/2 - 1}u^{m-k-1},$$

причем g^4 — произвольная функция от t и x. Однако, из соотношения $g^4_x = 0$, которое дают слагаемые с u_3, следует, что g^4 может зависеть только от t.

Затем собираются члены, содержащие u_2^2, $u_2u_1^3$, что приводит к двум новым уравнениям

$$\begin{gathered}
-g^2_{u_1u_1}u^{3k/2+1}(k-2)^2(k-2m+2) + u_1u^{3k/2-1}(-31b_4k^2 + 125k^4 + 80k^2 - 185k^3 + 4b_4 + \\
+ 20kb_4 - 20k + 2b_4^2)(k+2-2m) + g^4u^k(k-2)(k-2m+2)(13k^2 - 6k - 2b_4) + \\
+ u^{k/2+m-1}(k-2)(-49m^2k^2 + 13b_5k^2 + 49k^2m + 30m^2k - 6kb_5 - 6m^3k - 24km - \\
- 2b_4b_5 + 12m - 24m^2 - 8mb_4 + 12m^3 + 8m^2b_4) = 0, \\
(b_4 - 5k^2)(-b_4 - 2 - 3k + 7k^2)(-b_4 - 6 - k + 7k^2) = 0.
\end{gathered} \tag{6}$$

Интегрируя первое из них, находим

$$g^2 = u_1^3 u^{-2} \frac{-31b_4k^2 + 125k^4 + 80k^2 - 185k^3 + 4b_4 + 20kb_4 - 20k + 2b_4^2}{6(k-2)^2} +$$

$$+ u_1^2 g^4 u^{-1-k/2} \frac{13k^2 - 6k - 2b_4}{2(k-2)} + \frac{u_1^2 u^{-k+m-2}}{2(k-2)(k-2m+2)}(-49m^2k^2 + 13b_5k^2 + 49k^2m +$$

$$+ 30m^2k - 6kb_5 - 6m^3k - 24km - 2b_4b_5 + 12m - 24m^2 - 8mb_4 + 12m^3 + 8m^2b_4) +$$

$$+ g^5 u_1 + g^6,$$

где функции g^5, g^6 могут зависеть только от t, x, u.

Рассматривая (6) как кубическое уравнение на b_4, находим его корни: $5k^2$, $7k^2-3k-2$, $7k^2-k-6$. Пусть $b_4 = 5k^2$. Приводя подобные члены при $u_2u_1^2$, получаем уравнение

$$g^4 k u^{k/2}(2+k)(k+2-2m) - 4u^{m-1}(k-m+2)(k-m+1)(-b_5 - 4m + 4m^2) = 0, \tag{7}$$

из которого заключаем, что возможны четыре случая: $k=-2$, $b_5 = 4m(m-1)$; $g^4 = 0$, $m = k+2$; $g^4 = 0$, $m = k+1$; $g^4 = 0$, $b_5 = 4m(m-1)$. Дальнейший поиск показывает, что в первом и четвертом случаях не существует решений третьего порядка ЛОУ (3), отвечающих интересующим нас показателям k и m. Поэтому далее рассматриваются только второй и третий случаи.

Пусть $g^4 = 0$ и $m = k+2$. Члены при u_2u_1, u_2, u_1^5 дают три уравнения

$$2(k+2)ug^5_u + 2k(k+2)g^5 - (3k^2+9k+6-b_5)(4k^2+12k+8-b_5)u^2 = 0,$$

$$g^5_x = 0,$$

$$k(k+2)(2k+1)(2k+3) = 0. \tag{8}$$

Таким образом, функция g^5 имеет представление

$$g^5 = g^7 u^{-k} + \frac{(3k^2+9k+6-b_5)(4k^2+12k+8-b_5)u^2}{k+2},$$

где g^7 — произвольная функция от t. Согласно уравнению (8), полагаем, что $k=-1/2$ либо $k=-3/2$. Однако, дальнейший анализ показывает, что решение ЛОУ (3) существует только для $k=-3/2$. Собирая подобные члены при u_1^4, u_1^3, u_1^2, имеем

$$b_5 = -3/4, \qquad g^7 = 0, \qquad g^6_{uu}u^2 - 6g^6_u u + \frac{45}{4}g^6 = 0,$$

следовательно, имеет место представление

$$g^6 = g^8 u^{9/2} + g^9 u^{5/2},$$

где функции g^8 и g^9 могут зависеть только от t, x. Однако, уравнение, определяемое коэффициентами при u_1

$$3g^8u^3 + 3g^9u - 6g^8_x u^2 + 10g^9_x = 0,$$

показывает, что $g^8 = g^9 = 0$. Окончательно получаем решение ЛОУ (3) в виде

$$h_1 = u_3 - \frac{u_2}{2}\left(u + 15\frac{u_1}{u}\right) + \frac{35u_1^3}{4u^2} + \frac{3u_1^2}{4}. \tag{9}$$

Рассмотрим третий случай, когда $g^4 = 0$ и $m = k + 1$. Члены, содержащие $u_2 u_1$, u_2, u_1^5, приводят к трем уравнениям

$$2kug_u^5 + 2k^2 g^5 - (3k^2 + 3k - b_5)(4k^2 + 4k - b_5) = 0,$$

$$g_x^5 = 0,$$

$$(k+2)(2k+1)(2k+3) = 0.$$

Следовательно, для функции g^5 справедливо представление

$$g^5 = g^7 u^{-k} + \frac{(3k^2 + 3k - b_5)(4k^2 + 4k - b_5)}{k},$$

где g^7 — произвольная функция от t, а показатель k может принимать значения -2, $-3/2$, $-1/2$. В первом случае имеем линеаризуемое уравнение, которое связано нелокальной заменой [4] с уравнением Бюргерса. Во втором случае, как показал анализ, решений ЛОУ не существует.

Рассмотрим третий случай, $k = -1/2$. Подобные члены при u_1^4, u_1^3, u_1^2 дают, соответственно, уравнения

$$b_5 = -3/4, \qquad g^7 = 0,$$

$$g_{uu}^6 u^2 - 2g_u^6 u + \frac{5}{4} g^6 = 0,$$

откуда, интегрируя последнее, имеем

$$g^6 = g^8(t,x) u^{1/2} + g^9(t,x) u^{5/2}.$$

И, наконец, остаются два уравнения, первое из которых дают слагаемые с u_1

$$u^2(10g_x^9 - 3g^9) - 3(2g_x^8 + g^8) = 0,$$

$$\frac{6}{25} u^2 g^9 - u^{1/2} g_t^8 - u^{5/2} g_t^9 = 0.$$

Следовательно, $g^9 = 0$, $g^8 = e^{-x/2}$. Окончательно, получаем решение ЛОУ (3)

$$h_2 = u_3 + \frac{u_2}{2}\left(1 - 5\frac{u_1}{u}\right) + \frac{5u_1^3}{4u^2} - \frac{3u_1^2}{4u} + c_1 u^{1/2} e^{-x/2}. \tag{10}$$

Пусть теперь $b_4 = 7k^2 - 3k - 2$ (второй корень уравнения (6)). Приводя подобные члены при $u_2 u_1^2$, получаем

$$3k(5k+2)(k - 2m + 2) g^4 u^{k/2} - 4u^{m-1}(-5b_5 m - 10k^2 m - 24m^2 + 18m^3 + b_5 m^2 + 4b_5 -$$

$$- b_5 k^2 - 21km^2 + 10m + 10k^2 m^2 + 9km - 6b_5 km + 6b_5 k - 4m^4 + 12km^3) = 0.$$

Следовательно,

$$b_5 = \frac{m(-4m^3 - 10k^2 + 18m^2 + 10k^2 m + 12km^2 - 21km + 9k - 24m + 10)}{k^2 - m^2 + 6km - 6k + 5m - 4},$$

и либо $g^4 = 0$, либо $k = 0$, либо $k = -2/5$. Как показал дальнейший анализ, в случае $k = 0$ решений ЛОУ (3), соответствующих показателям $m \neq 0, 1, 2$, не выделяется.

Пусть $g^4 = 0$. Члены, содержащие u_2u_1, дают уравнение

$$2(k^2 - m^2 + 6km - 6k + 5m - 4)^2(g^5_u u + (3k+1)g^5) +$$
$$+ 3m^2(m-1)^2(2k+1)(7k+m+2)(k-m+1)u^{2m-2k-2} = 0,$$

интегрируя которое, находим

$$g^5 = g^7 u^{-3k-1} - \frac{3m^2(m-1)^2(2k+1)(7k+m+2)(k-m+1)}{2(2m+k-1)(k^2-m^2+6km-6k+5m-4)^2} u^{2m-2k-2},$$

где g^7 может зависеть только от t и x. Далее, собирая коэффициенты при u_2, u_1^4, имеем

$$(2k+1)u^{k-1}g^6 + u^{-2k-1}g^7_x = 0,$$
$$m(m-1)(2k+1-m)(k+2-m)(k+1-m)(2k+4-m) = 0. \tag{11}$$

Из двух последних уравнений следует, что функция g^6 представима в виде

$$g^6 = -\frac{u^{-3k}g^7_x}{2k+1},$$

а показатель m может принимать следующие значения: $k+1$, $2k+1$, $2k+4$. Случай $m = k+2$ доставляет решения ЛОУ (3), соответствующие лишь показателям k, m, не представляющим интереса.

Пусть $m = k+1$. Тогда имеем соотношение $g^7 = 0$, которое дают слагаемые с u_1^3, и решение ЛОУ (3) существует для произвольного показателя k

$$h_3 = u_3 + u_2\left(k + 1 + (3k-1)\frac{u_1}{u}\right) + k(k-2)\frac{u_1^3}{u^2} + (k^2-1)\frac{u_1^2}{u}. \tag{12}$$

Рассмотрим случай, когда $m = 2k+1$. Приводя подобные члены при u_1^3, получаем

$$(k+1)(g^7(3k+2)^2(5k+1) - 2u^{5k+1}k(4k+1)(k-1)(2k+1)^2) = 0.$$

Следовательно, либо $k = -1$, либо $g^7 = 0$ и $k = 1, -1/4$. Но, как показало дальнейшее решение ЛОУ, дифференциальные связи выделяются лишь в случае $k = -1$. При этом слагаемые ЛОУ с u_1^2, u_1 дают соотношения $g^7_x = 0$, $g^7_t = 0$. То есть $g^7 = c_1$, где c_1 — константа. Итак, мы показали существование решения ЛОУ (3) в случае $k = -1$, которое имеет следующий вид:

$$h_4 = u_3 - \frac{2u_2}{u}(1 + 2u_1) + \frac{3u_1^3}{u^2} + \frac{4u_1^2}{u^2} + \left(c_1u^2 + \frac{1}{u^2}\right)u_1. \tag{13}$$

Наконец, в последнем случае, когда $m = 2k+4$, приводя подобные при u_1, получаем уравнение

$$(k+1)(2u^{5k+7}(k+3)(4k^2 - 11k - 14)(2k+3)^2(k+2)^3 - g^7(5k+7)(3k+4)^2k^3) = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что либо $g^7 = 0$, $k = -3/2, -3, (11 \pm 345^{1/2})/8$, либо $k = -1$, и тогда, с учетом уравнений $g^7_x = 0$, $g^7_t = 0$, которые дают слагаемые с u_2 и u_1, имеем решение ЛОУ

$$h_5 = u_3 + 2u_2\left(u^2 - \frac{2u_1}{u}\right) + \frac{3u_1^3}{u^2} + 2u_1^2u + u_1u^2(c_1 + 2u^2). \tag{14}$$

Однако, решение ЛОУ существует лишь при $k=-3$

$$h_6 = u_3 - 2u_2\left(1+\frac{5u_1}{u}\right) + \frac{15u_1^3}{u^2} + \frac{8u_1^2}{u}. \tag{15}$$

Пусть теперь $k=-2/5$. Члены с u_2u_1, u_2 дают пару уравнений

$$g^5_u - \frac{g^5}{5u} = -\frac{m(1-m)(5m-3)}{2(5m-9)}g^4u^{m-7/5} + \frac{15m^2(5m-3)(m-1)^2}{2(5m-4)(5m-9)^2}u^{2m-11/5},$$

$$g^6 = \frac{5}{2}g^4_t u^{8/5} - 5g^5_x u^{6/5}.$$

Проинтегрировав первое уравнение, имеем

$$g^5 = g^7(t,x)u^{1/5} - \frac{5m(m-1)}{2(5m-9)}g^4u^{m-2/5} + \frac{75m^2(5m-3)(m-1)^2}{2(5m-4)(5m-9)^2(10m-7)}u^{2m-6/5},$$

$$g^6 = \frac{5}{2}g^4_t u^{8/5} - 5g^7_x u^{6/5}.$$

Приводя подобные при u_1^4, получаем

$$48g^4(5m-4)(5m-9) - 5m(m-1)(5m-1)(5m-3)(5m-8)(5m-16)u^{m-4/5} = 0.$$

Следовательно, $g^4=0$ и $m=1/5, 3/5, 8/5, 16/5$. Однако, решение ЛОУ существует только при $m=3/5$ и представляется в виде

$$h_7 = u_3 + \frac{u_2}{5}\left(3 - \frac{11u_1}{u}\right) + \frac{24u_1^3}{25u^2} - \frac{21u_1^2}{25u}. \tag{16}$$

Положив $b_4 = 7k^2-k-6$ (третий корень уравнения (6)), собираем члены, содержащие $u_2u_1^2$, в результате чего приходим к уравнению

$$3(k+2)(5k+8)(k-2m+2)g^4 - 4u^{m-k/2-1}(16m^2 - 6b_5km + 22m^3 + 10k^2m^2 - 34m -$$

$$- 9b_5m - 4b_5k - b_5k^2 - 4m^4 + 25km^2 - 10k^2m - 4b_5 - 37km + b_5m^3 + 12km^3) = 0.$$

Следовательно,

$$b_5 = \frac{m(34 - 22m^2 + 4m^3 - 25km + 10k^2 - 10k^2m + 37k - 16m - 12km^2)}{m^2 - 6km - 4k - k^2 - 9m - 4},$$

и либо $g^4=0$, либо $k=-8/5$. В случае $k=-2$ решения ЛОУ (3) существуют лишь для линеаризуемых уравнений, которые, как сказано выше, не представляют для нас интереса.

Пусть $g^4=0$. Приводя подобные члены при u_2u_1, u_2, приходим к двум уравнениям

$$2(k^2 - m^2 + 6km + 4k + 9m + 4)^2(ug^5_u + 3(1+k)g^5) +$$

$$+ 3m^2(m-1)^2(2k+3)(7k+m+11)(k-m+2)u^{2m-2k-2} = 0,$$

$$g^6 = -\frac{1}{2k+3}g^5_x u^{-3k-2}.$$

Интегрируя первое, находим функцию g^5

$$g^5 = g^7 u^{-3k-3} - \frac{3m^2(m-1)^2(2k+3)(7k+m+11)(k-m+2)}{2(2m+k+1)(k^2-m^2+6km+4k+9m+4)^2} u^{2m-2k-2},$$

$$g^6 = -\frac{1}{2k+3} g^7_x u^{-3k-2},$$

где g^7 может зависеть от t и x. Собирая слагаемые с u_1^4, получаем соотношение

$$m(m-1)(2k+1-m)(k+1-m)(k+2-m)(2k+4-m) = 0,$$

согласно которому показатель m может принимать следующие значения: $k+1$, $k+2$, $2k+1$, $2k+4$.

В случае $m = k+1$ не существует решений ЛОУ (3) для интересующих нас показателей k и m уравнения (2). При $m = k+2$, с учетом уравнения $g^7 = 0$, которое дают слагаемые с u_1^3, имеем решение для произвольного показателя k

$$h_8 = u_3 + u_2\left(3(k-1)\frac{u_1}{u} + (k+1)u\right) + (k^2-3k+2)\frac{u_1^3}{u^2} + k(k+1)u_1^2. \tag{17}$$

Когда $m = 2k+1$, приводя подобные члены с u_1^3, приходим к уравнению

$$(k+1)(g^7(5k+3)(3k+2)^2(k+2)^3 - 2k^3(k-1)(4k^2+27k+24)(2k+1)^2 u^{5k+3}) = 0.$$

Несложно видеть, что либо $k = -1$, либо $g^7 = 0$ и $k = 1, -1/2, (-27 \pm 345^{1/2})/8$. Однако решения ЛОУ (3) существуют лишь при $k = 1$, $k = -1$, $k = -1/2$ и записываются в следующем виде:

$$h_9 = u_3 + 2u_2 u + 2u_1^2, \tag{18}$$

$$h_{10} = u_3 - \frac{2u_2}{u}(3u_1+1) + \frac{6u_1^3}{u^2} + \frac{8u_1^2}{u^2} + u_1\left(c_1 + \frac{2}{u^2}\right), \tag{19}$$

а решение для $k = -1/2$ совпадает с (10).

Наконец, в случае $m = 2k+4$, имеем уравнение

$$(k+1)(k+2)(2(k+2)(k+3)(2k+3)^2(4k+7)u^{3k+4} - g^7(3k+4)^2(5k+9)u^{-2k-5}) = 0,$$

составленное из слагаемых с u_1^3. Очевидно, что либо $k = -1$, либо $g^7 = 0$ и $k = -3, -7/4$. При этом решение ЛОУ существует лишь для $k = -1$ и, с учетом соотношений $g^7_x = 0$, $g^7_t = 0$ при u_1^2, u_1, представляется в виде

$$h_{11} = u_3 + 2u_2\left(u^2 - 3\frac{u_1}{u}\right) + \frac{6u_1^3}{u^2} - 2u_1^2 u + u_1(c_1 + u^4). \tag{20}$$

Пусть теперь $k = -8/5$. Собирая подобные члены при $u_2 u_1$, получаем уравнение

$$2(5m-1)(5m+4)^2(5ug^5_u - 9g^5) + 5m(m-1)(5m-2)((5m-1)(5m+4)g^3 u^{m+7/5} +$$

$$+15m(m-1)u^{2m+6/5}) = 0,$$

проинтегрировав которое, находим представление для функции g^5

$$g^5 = g^7 u^{9/5} - \frac{m(m-1)(5m-2)}{2(m-2/5)(5m+4)} u^{m+7/5} - \frac{15m^2(5m-2)(m-1)^2}{2(2m-3/5)(5m-1)(5m+4)^2} u^{2m+6/5},$$

где g^7 — произвольная функция от t и x.

Дальнейший анализ ЛОУ (3) показывает, что функция g^6 имеет следующее представление:

$$g^6 = 5g^7_x u^{14/5},$$

и решение ЛОУ (3) существует для показателя $m = 2/5$

$$h_{12} = u_3 - \frac{3u_2}{5}\left(u + \frac{13u_1}{u}\right) + \frac{234u_1^3}{25u^2} + \frac{24}{25}u_1^2. \tag{21}$$

Очевидно, что решения (9), (18) и (21) являются частным случаем решения (17). Аналогично, решения (15) и (16) содержатся в (12). Нетрудно показать, что существование решения (12) связано с разделением переменных, которое допускает уравнение

$$u_t = (u^k u_x + u^{k+1})_x. \tag{22}$$

Приравнивая (12) к нулю, получаем инвариантное многообразие [3]

$$u_{xxx} + u_{xx}\left(k + 1 + (3k-1)\frac{u_x}{u}\right) + k(k-2)\frac{u_x^3}{u^2} + (k^2-1)\frac{u_x^2}{u} = 0,$$

которое, с учетом (22), можно записать следующим образом

$$(u^{k-1}u_{xx} + (k+1)u^{k-1}u_x + ku^{k-2}u_x^2)_x = (u_t u^{-1})_x = (\ln u)_{tx} = 0.$$

Следовательно, u представима в виде $u = T(t)X(x)$. Здесь функции T, X удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$T'T^{-k-1} = X''X^{k-1} + (k+1)X'X^{k-1} + kX'^2X^{k-2}.$$

Необходимо заметить, что уравнение (22) с помощью нелокальной замены

$$\xi = \int_{x_0}^{x} u(y,t)dy, \quad w = u^{-1}, \tag{23}$$

приведенной в [4], переводится в уравнение

$$w_t = (w^k w_\xi + w^{k+2})_\xi. \tag{24}$$

Нетрудно проверить, что замена (23) также переводит инвариантное многообразие $h_3 = 0$, соответствующее уравнению (22), в инвариантное многообразие $h_8 = 0$, соответствующее (24).

Наконец, преобразование (23) связывает уравнения

$$u_t = (u^{-1}u_x + u^{-1})_x, \qquad u_t = (u^{-1}u_x + u^2)_x,$$

и, вместе с тем, инвариантные многообразия $h_4 = 0$, $h_{11} = 0$ и $h_{10} = 0$, $h_5 = 0$.

Таким образом, доказана

Лемма. *При любом k существуют два решения третьего порядка ЛОУ (3), соответствующие показателям $m = k+1$ и $m = k+2$ и представляющиеся формулами (12), (17). Кроме того, в случаях $k = -1/2, m = 1/2$; $k = -1, m = -1$; $k = -1, m = 2$, выделяются решения, задаваемые, соответственно, формулами (10), (13), (19), (14), (20).*

Кратко остановимся на решениях четвертого порядка ЛОУ (3). Кроме решений ЛОУ, отвечающих не интересующим нас показателям k и m, найдены следующие дифференциальные связи, соответствующие $k = -1/2$, $m = 1/2$ и $k = -3/2$, $m = 1/2$:

$$h_{13} = u_4 + u_3\left(1 - 3\frac{u_1}{u}\right) - \frac{5u_2^2}{2v} + u_2\left(\frac{15u_1^2}{2u^2} - 3\frac{u_1}{u} + \frac{1}{4}\right) - \frac{25u_1^4}{8u^3} + \frac{7u_1^3}{4u^2} - \frac{3u_1^2}{8u}, \tag{25}$$

$$h_{14} = u_4 - u_3\left(u + 12\frac{u_1}{u}\right) - \frac{15u_2^2}{2u} + u_2\left(\frac{135u_1^2}{2u^2} + 7u_1 + \frac{u^2}{4}\right) - \frac{455u_1^4}{8u^3} - \frac{31u_1^3}{4u} - \frac{3}{8}u_1^2 u. \tag{26}$$

Инвариантные многообразия $h_{13} = 0$ и $h_{14} = 0$, как и соответствующие им уравнения (2), также связаны нелокальной заменой (23). Однако, эти решения ЛОУ (3) не являются принципиально новыми по сравнению с решениями третьего порядка. Действительно, в случае $k = -1/2$

$$h_{13} = D_x(h_3) + \left(1 - \frac{u_1}{u}\right)\frac{h_3}{2} = 0.$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получаем h_2. Если $k = -3/2$, то справедливо соотношение

$$h_{14} = D_x(h_8) - \left(u + 9\frac{u_1}{u}\right)\frac{h_8}{2} = 0,$$

которое после интегрирования приводит к нелокальному инвариантному многообразию. Последнее, как несложно проверить, связано с $h_2 = 0$ преобразованием (23).

3. Построение решений

Как доказано выше, уравнение

$$u_t = (u^{-1/2}u_x + u^{1/2})_x \tag{27}$$

обладает инвариантным многообразием

$$u_{xxx} + \frac{u_{xx}}{2}\left(1 - 5\frac{u_x}{u}\right) + \frac{5u_x^3}{4u^2} - \frac{3u_x^2}{4u} + c_1 u^{1/2} e^{-x/2} = 0. \tag{28}$$

С учетом (27), многообразие (28) можно переписать следующим образом:

$$(\ln u)_{tx} + c_1 u^{-1} e^{-x/2} = 0.$$

Сделав замену $w = -\ln u - x/2$, получаем гиперболическое уравнение Лиувилля

$$w_{tx} = c_1 e^w. \tag{29}$$

Общеизвестно представление решения уравнения (29) через решения линейного уравнения [6]:

$$w = \ln \frac{2T'X'}{c_1(T+X)^2},$$

где T и X — произвольные функции от t и x соответственно. Следовательно, для функции u справедливо следующее представление:

$$u = c_1 \frac{(T+X)^2}{T'X'} e^{-x/2}. \tag{30}$$

Подставляя (30) в уравнение (27), получаем дифференциальное уравнение

$$e^{-x/4} X'^{-3/2}(8X'''X' - 12X''^2 + X'^2) - 8c_1^{1/2} T'^{-3/2}(T''(T+X) - 2T'^2) = 0, \tag{31}$$

последовательное дифференцирование которого по t и x дает

$$(T''T'^{-3/2})' = 0.$$

Следовательно, имеется две возможности.

Либо

$$T = a_1 t + b_1, \tag{32}$$

где a_1, b_1 — константы, и тогда из (31) следует, что функция X должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$8X'''X' - 12X''^2 + X'^2 + 16c_2^{1/2} a_1 e^{-x/4} X'^{3/2} = 0, \tag{33}$$

либо

$$T = \frac{1}{a_2 t + b_2} + c, \tag{34}$$

где a_2, b_2, c — произвольные постоянные, и функция X удовлетворяет уравнению

$$8X'''X' - 12X''^2 + X'^2 + 16c_3^{1/2} a_2 e^{-x/4} X'^{3/2}(X+c) = 0. \tag{35}$$

Таким образом, найдены два решения уравнения (27)

$$u_1 = \frac{c_2(a_1 t + X)^2}{X'} e^{-x/2}, \tag{36}$$

$$u_2 = \frac{c_3(a_2 t(X+c) + 1)^2}{X'} e^{-x/2}. \tag{37}$$

При этом, в решении (36) функция X удовлетворяет уравнению (33), а в (37) является решением уравнения (35).

Как показано выше, уравнение

$$u_t = (u^{-1}u_x + u^{-1})_x \tag{38}$$

обладает инвариантными многообразиями $h_4 = 0$, $h_{10} = 0$. Построение решений будем проводить аналогично тому, как это было сделано в [7]. Для инвариантного многообразия

$$u_{xxx} - 2\frac{u_{xx}}{u}(2u_x + 1) + 3\frac{u_x^3}{u^2} + 4\frac{u_x^2}{u^2} + u_x(u^{-2} - u^2) = 0, \tag{39}$$

x-система имеет вид

$$u_x = v, \qquad v_x = w, \qquad w_x = 2\frac{w}{u}(2v+1) - 3\frac{v^3}{u^2} - 4\frac{v^2}{u^2} - v(u^{-2} - u^2),$$

а t-система есть

$$u_t = \frac{w}{u} - \frac{v^2}{u^2} - \frac{v}{u^2}, \qquad v_t = \frac{wv}{u^2} + \frac{w}{u^2} - \frac{v^3 + 2v^2 + v}{u^3} + uv,$$

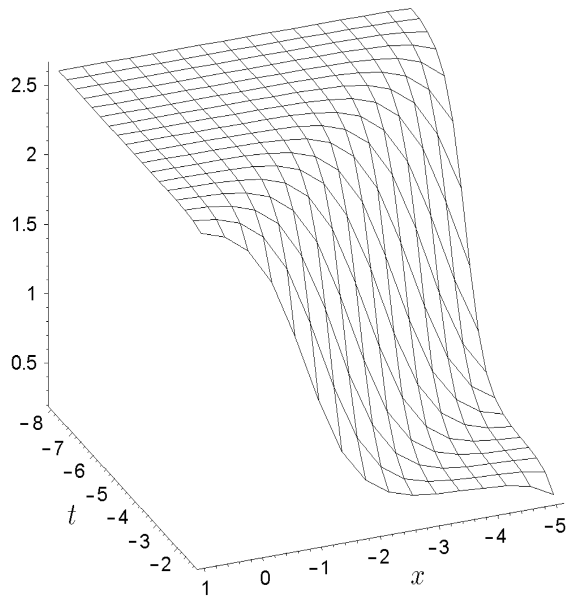

Рис. 1. Решение уравнения (38), соответствующие инвариантному многообразию (39).

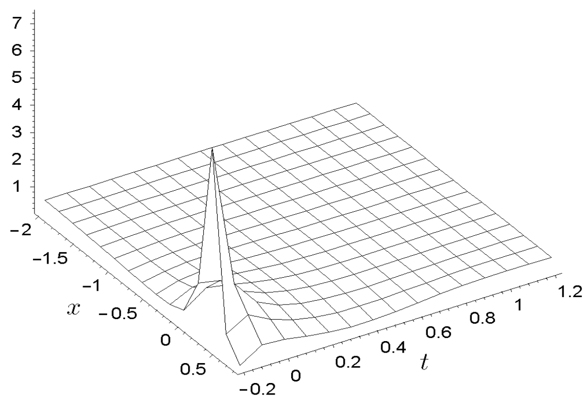

Рис. 2. Решение уравнения (38), соответствующие инвариантному многообразию (40).

$$w_t = \frac{w}{u^3}(1 - v^2) + \frac{w^2}{u^2} + wu - \frac{v^3 + 2v^2 + v}{u^4} + 2v^2 + v.$$

Численно решая x-систему с помощью стандартного метода типа Рунге—Кутты, а затем принимая найденные значения за начальные данные, численно проинтегрировав t-систему, получаем решение уравнения (38), представленное на рис. 1. Численная реализация решения уравнения (38), соответствующего инвариантному многообразию

$$u_{xxx} - 2\frac{u_{xx}}{u}(3u_x + 1) + 6\frac{u_x^3}{u^2} + 8\frac{u_x^2}{u^2} + u_x(2u^{-2} - 1) = 0, \tag{40}$$

для которого x-система есть

$$u_x = v, \qquad v_x = w, \qquad w_x = 2\frac{w}{u}(3v+1) - 6\frac{v^3}{u^2} - 8\frac{v^2}{u^2} - v(2u^{-2} - 1),$$

а t-система имеет вид

$$u_t = \frac{w}{u} - \frac{v^2}{u^2} - \frac{v}{u^2}, \qquad v_t = 3\frac{wv}{u^2} + \frac{w}{u^2} - \frac{4v^3 + 6v^2 + 2v}{u^3} + \frac{v}{u},$$

$$w_t = \frac{w}{u^3}(3wu - 2v) + \frac{w}{u} - \frac{6v^4 + 12v^3 + 8v^2 + 2v}{u^4} + \frac{2v^2 + v}{u^2},$$

представлена на рис. 2. Решения, предложенные на рис. 1, 2, являются неограниченными.

Аналогичным образом можно построить решения диффузионного уравнения

$$u_t = (u^{-1}u_x + u^2)_x,$$

для которого показано существование инвариантных многообразий $h_5 = 0$ и $h_{11} = 0$.

Автор благодарит д.ф.-м.н., проф. О. В. Капцова за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

[1] Edwards M. P., Broadbridge P. Exceptional symmetry reductions of Burgers' equation in two and three spatial dimensions. *Zeit. Angew. Math. Phys.,* **46**, 1995, 595–622.

[2] Галактионов В. А., Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрии, точные решения, асимптотики, структуры. *Современные проблемы математики. Новейшие достижения,* ВИНИТИ, М., **28**, 1986, 95–205.

[3] Капцов О. В. Линейные определяющие уравнения для дифференциальных связей. *Математический сборник,* **189**, №12, 1998, 103–118.

[4] Meirmanov A. M., Pukhnachov V. V., Shmarev S. T. *Evolution Equations and Lagrangian Coordinates.* Walter de Gruyter, N. Y., 1997.

[5] Ибрагимов Н. Х. *Группы преобразований в математической физике.* Наука, М., 1983.

[6] Гурса Э. *Курс математического анализа.* **3**. Ч. 2, ГТТИ, М., 1933.

[7] Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А. *Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике.* Наука, Новосибирск, 1994.

Поступила в редакцию 4 августа 1999 г.,
в переработанном виде 25 января 2000 г.