Вычислительные технологии **Том 5, № 3, 2000**

МЕТОД ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИИ ТОКА И ВИХРЯ СКОРОСТЕЙ С НЕОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

М. К. Орунханов, Ш. Смагулов
Казахский государственный университет им. Аль-Фараби
Алматы, Казахстан
e-mail: orunkhan@kazgu.almaty.kz

A possible statement of the problem for the method of fictitious domain is suggested for the study of a plane flow of the viscous incompressible fluid in the complex-geometry domain with inhomogeneous conditions on the boundary. The justification of such a statement of the auxiliary problem is carried out.

Метод фиктивных областей в последние годы активно развивается и применяется для численного решения краевой задачи для уравнений Навье — Стокса. Достаточно полный обзор литературы по использованию метода фиктивных областей приведен в монографии П. Н. Вабищевича [1]. Мы лишь кратко упомянем литературу, посвященную применению этого метода для уравнений Навье — Стокса в переменных функции тока и вихря скорости. Первой работой, в которой метод фиктивных областей рассмотрен применительно к уравнениям Навье — Стокса в переменных функции тока и вихря скорости, была работа А. Н. Бугрова [2]. Алгоритм численной реализации граничных условий для уравнений Навье — Стокса предложен в [3]. Метод фиктивных областей для уравнений функции тока и вихря скорости в многосвязных областях и обоснование экономичного разностного метода его реализации рассмотрены в [4]. Во всех этих работах рассматривались только задачи с однородными граничными условиями. Заметим, однако, что в [5] рассматривался метод фиктивных областей для задач математической физики, но математическое обоснование используемого метода не осуществлено.

Настоящая работа посвящена обоснованию метода фиктивных областей для стационарных уравнений Навье — Стокса в терминах функции тока и вихря скорости. Пусть в область D с границей S_1 полностью погружена область Ω с границей S, причем $S \cap S_1 = \varnothing$. В односвязной области Ω рассмотрим краевую задачу для стационарных уравнений Навье — Стокса в терминах функции тока и вихря скорости:

$$\psi_{x_2}\omega_{x_1} - \psi_{x_1}\omega_{x_2} = \Delta\omega, \quad \Delta\psi = \omega, \tag{1}$$

$$\psi|_S = \psi_0(x), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}|_S = \psi_1(x), \tag{2}$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к границе S, $x = (x_1, x_2)$. Для простоты будем предполагать, что S — гладкая. Сделаем также следующие предположения:

1. Пусть функция $b(x) \in W_2^2(D)$ такова, что

$$\psi|_S = b(x)|_S = b_S, \quad \left.\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}\right|_S = \left.\frac{\partial b(x)}{\partial \vec{n}}\right|_S = b_{1S}.$$

2. Существует дважды непрерывно дифференцируемая срезающая функция $\xi(x, \delta)$ для $\delta \in [0, \delta_1]$, равная единице вблизи S и нулю в Ω, для которой выполнены условия

$$|\xi(x, \delta)| < C, \ \left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| < \frac{C}{\delta}, \tag{3}$$

где C не зависит от δ. Обозначим через b^δ функцию такую, что

$$b^\delta = b(x, \delta) = b(x) \cdot \xi(x, \delta).$$

Во вспомогательной области D рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\psi^\varepsilon_{x_2}\omega^\varepsilon_{x_1} - \psi^\varepsilon_{x_1}\omega^\varepsilon_{x_2} = \mu\Delta\omega^\varepsilon - \frac{\xi(x)}{\varepsilon}(\psi^\varepsilon - b(x)), \tag{4}$$

$$\Delta\psi^\varepsilon = \omega^\varepsilon, \quad \psi^\varepsilon|_{S_1} = b|_{S_1} = b_{S_1}, \ \left.\frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial \vec{n}}\right|_{S_1} = \left.\frac{\partial b}{\partial \vec{n}}\right|_{S_1}. \tag{5}$$

Обозначим $\tilde{\psi}^\varepsilon = \psi^\varepsilon - b(x, \delta) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$. Такая функция удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int\limits_D \Delta(\tilde{\psi}^\varepsilon + b(x,\delta)) \left[(\tilde{\psi}^\varepsilon + b(x,\delta))_{x_2}\Phi_{x_1} - (\tilde{\psi}^\varepsilon + b(x,\delta))_{x_1}\Phi_{x_2}\right] dx +$$
$$+\mu \int\limits_D \Delta(\tilde{\psi}^\varepsilon + b(x,\delta)) \cdot \Delta\Phi dx + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{D\setminus\Omega} \tilde{\psi}^\varepsilon \cdot \Phi dx = 0, \quad \forall \Phi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(D). \tag{6}$$

Введем пространство функций, которое обозначим $\overset{\circ}{H}{}^2(D)$. Норму функции из этого пространства определим следующим образом:

$$||\tilde{\psi}^\varepsilon||^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)} = \mu||\Delta\tilde{\psi}^\varepsilon||^2_D + \frac{1}{\varepsilon}||\tilde{\psi}^\varepsilon||^2_{D_1},$$

где $D_1 = D \setminus \Omega$. Если $C_0^\infty(D)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций в D, то $\overset{\circ}{H}{}^2(D)$ — пополнение $C_0^\infty(D)$ в норме

$$||u||_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)} = \mu||\Delta u||_D + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}||u||_{D_1},$$

где $||u||_D = \left(\int\limits_D |u|^2 dx\right)^{1/2}$. Пространство $\overset{\circ}{H}{}^2(D)$ — полное гильбертово пространство со скалярным произведением, определяемым следующим образом:

$$[u, v]_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)} = \int\limits_D \Delta u \cdot \Delta v dx + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int\limits_{D_1} u \cdot v dx, \ \forall u, \ v \in \overset{\circ}{H}{}^2(D).$$

На основании сделанных предположений рассмотрим теорему.

Теорема 1. *Пусть* $b^\delta = b(x,\delta) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2$. *Тогда существует хотя бы одно обобщенное решение задачи (4)–(5) и для этого решения имеет место оценка*

$$\|\psi^\varepsilon - b(x,\delta)\|_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)} \le C < \infty$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Для применения теоремы Риса заметим, что интегральное тождество (6) эквивалентно операторному уравнению в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^2(D)$:

$$\tilde{\psi}^\varepsilon = A\tilde{\psi}^\varepsilon + F, \tag{7}$$

где A — нелинейный вполне непрерывный оператор в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^2(D)$, порожденный формой

$$\left[A\tilde{\psi}^\varepsilon, \Phi\right]_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)} = \int\limits_D \Delta\left(\tilde{\psi}^\varepsilon + b(x,\delta)\right)\cdot\left[\left(\tilde{\psi}^\varepsilon + b(x,\delta)\right)_{x_2}\Phi_{x_1} - \left(\tilde{\psi}^\varepsilon + b(x,\delta)\right)_{x_1}\Phi_{x_2}\right]dx,$$

а правая часть $F = \mu\int\limits_D \Delta b(x,\delta)\Delta\Phi dx$. Докажем полную непрерывность оператора A. Пусть $\{\psi^m\}$ — слабо сходящаяся последовательность в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^2\,(D)$. Покажем, что $\{\psi^m\}$ — фундаментальная последовательность. С этой целью рассмотрим форму

$$[A\psi^m - A\psi^n, \Phi]_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)} = \int\limits_D \Big\{\Delta\left(\psi^m + b(x,\delta)\right)\cdot\left[\left(\psi^m + b(x,\delta)\right)_{x_2}\cdot\Phi_{x_1} - \left(\psi^m + b(x,\delta)\right)_{x_1}\cdot\Phi_{x_2}\right] -$$

$$-\Delta\left(\psi^n + b(x,\delta)\right)\cdot\left[\left(\psi^n + b(x,\delta)\right)_{x_2}\cdot\Phi_{x_1} - \left(\psi^n + b(x,\delta)\right)_{x_1}\cdot\Phi_{x_2}\right]\Big\}dx. \tag{8}$$

Рассмотрим слагаемое

$$\int\limits_D (\Delta\psi^m\psi^m_{x_2}\cdot\Phi_{x_1} - \Delta\psi^n\psi^n_{x_2}\cdot\Phi_{x_1})dx =$$

$$= \int\limits_D \left[(\Delta\psi^m - \Delta\psi^n)\psi^m_{x_2}\cdot\Phi_{x_1} - \Delta\psi^n(\psi^m_{x_2} - \psi^n_{x_2})\cdot\Phi_{x_1})\right]dx.$$

Оценим интегралы правой части последнего равенства по теореме вложения

$$\left|\int\limits_D \Delta\psi^n(\psi^m_{x_2} - \psi^n_{x_2})\cdot\Phi_{x_1}dx\right| \le ||\Delta\psi^n||_{L_2(D)}\cdot||\psi^m_{x_2} - \psi^n_{x_2}||_{L_4(D)}||\Phi_{x_1}||_{L_4(D)} \le$$

$$\le C||\nabla(\psi^m - \psi^n)||_{L_4(D)}||\Phi||_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)},$$

$$\left|\int\limits_D \Delta(\psi^m - \psi^n)\psi^m_{x_2}\Phi_{x_1}dx\right| \le \left|\int\limits_D \Delta(\psi^m - \psi^n)(\nabla\psi^m_{x_1}\Phi_{x_1} + \nabla\psi^m_{x_2}\Phi_{x_1})dx\right| \le$$

$$\leq ||\nabla\psi^m_{x_1}||_{L_4(D)}||\nabla\Phi||_{L_4(D)}||\nabla(\psi^m-\psi^n)||_{L_4(D)}+||\nabla\psi^m_{x_2}||_{L_4(D)}||\nabla\Phi_{x_1}||_{L_2(D)}\times$$
$$\times||\nabla(\psi^m-\psi^n)||_{L_4(D)}\leq C||\nabla(\psi^m-\psi^n)||_{L_4(D)}||\Phi||_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)}.$$

Совершенно аналогично оцениваются остальные слагаемые; в результате приходим к оценке

$$[A\psi^m-A\psi^n,\Phi]_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)}\leq C\cdot||\nabla(\psi^m-\psi^n)||_{L_4(D)}||\Phi||_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)}. \tag{9}$$

Теперь полагаем

$$\Phi=A\psi^m-A\psi^n,$$
$$||A\psi^m-A\psi^n||^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)}\leq C\cdot||\nabla(\psi^m-\psi^n)||_{L_4(D)}||A\psi^m-A\psi^n||_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)}.$$

Из последнего неравенства следует

$$||A\psi^m-A\psi^n||^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)}\leq C\cdot||\nabla(\psi^m-\psi^n)||_{L_4(D)}. \tag{10}$$

Левая часть (10) стремится к нулю при $m,n\to\infty$. Это следует из компактности вложения $\overset{\circ}{H}{}^2(D)$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_4(D)$. Итак, доказана полная непрерывность оператора A в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^2(D)$. Доказательство теоремы существования основано на использовании теоремы о неподвижной точке Лере—Шаудера [6]. Рассмотрим однопараметрическое семейство операторных уравнений

$$\tilde{\psi}^\varepsilon=\lambda A\tilde{\psi}^\varepsilon. \tag{11}$$

Нужно показать, что все возможные решения уравнения (11) при $\lambda\in[0,1]$ не выходят за пределы некоторого ограниченного шара. Пусть $\tilde{\psi}^\varepsilon(x,\delta_1,\lambda)$ — какое-нибудь решение уравнения (11). Тогда оно будет удовлетворять уравнению

$$\lambda\int\limits_D\Big[\Delta\left(\tilde{\psi}^\varepsilon+b(x,\delta_1)\right)\Big[\left(\tilde{\psi}^\varepsilon+b(x,\delta_1)_{x_2}\right)\cdot\Phi_{x_1}-\left(\tilde{\psi}^\varepsilon+b(x,\delta_1)_{x_1}\right)\cdot\Phi_{x_2}\Big]\Big]\,dx+$$
$$+\mu\int\limits_D\Delta\left(\tilde{\psi}^\varepsilon+b(x,\delta_1)\right)\Delta\Phi dx+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{D_1}\tilde{\psi}^\varepsilon\Phi dx=0. \tag{12}$$

В интегральном тождестве возьмем в качестве Φ функцию ψ. В результате имеем

$$\lambda\int\limits_D\Big[\Delta\left(\tilde{\psi}^\varepsilon+b(x,\delta_1)\right)\Big[b(x,\delta_1)_{x_2}\cdot\tilde{\psi}_{x_1}-b(x,\delta_1)_{x_1}\cdot\tilde{\psi}_{x_2}\Big]\Big]\,dx+$$
$$+\mu\int\limits_D\left|\Delta\tilde{\psi}^\varepsilon\right|^2dx+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{D_1}\left|\tilde{\psi}^\varepsilon\right|^2dx+\int\limits_D b(x,\delta_1)\Delta\Phi dx=0,$$
$$\mu\int\limits_D\left|\Delta\tilde{\psi}^\varepsilon\right|^2dx+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{D_1}\left|\tilde{\psi}^\varepsilon\right|^2dx=\lambda\int\limits_D\Big[\Delta\tilde{\psi}^\varepsilon\cdot b(x,\delta_1)_{x_2}\cdot\tilde{\psi}_{x_1}-$$
$$-\Delta\tilde{\psi}^\varepsilon\cdot b(x,\delta_1)_{x_1}\cdot\tilde{\psi}_{x_2}\Big]\,dx\leq$$

$$\leq \lambda_0 \left| \int\limits_D \left[\Delta\tilde{\psi}^\varepsilon \cdot b(x,\delta_1)_{x_2} \cdot \tilde{\psi}_{x_1} - \Delta\tilde{\psi}^\varepsilon \cdot b(x,\delta_1)_{x_1} \cdot \tilde{\psi}_{x_2} \right] dx \right| +$$

$$+C||\Delta b(x,\delta_1)||_{L_2(\Omega)} \cdot ||\nabla b||_{L_4(\Omega)} \cdot ||\nabla\tilde{\psi}^\varepsilon||_{L(D)} + ||b(x)||_{L_2(D)}||\nabla\tilde{\psi}^\varepsilon||_{L_2(D)}. \tag{13}$$

Теперь будем предполагать, что множество решений $\{\tilde{\psi}^\varepsilon(x,\delta_1,\lambda)\}$ при $\lambda \in [0,1]$ неограниченно. Тогда существует такая последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n \to \lambda_0$, что последовательность

$$S_n = ||\tilde{\psi}_n^\varepsilon(x,\delta_1,\lambda_n)||_{\overset{\circ}{H}^2(D)} \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Обозначим $\omega_n^\varepsilon = \dfrac{1}{S_n}\tilde{\psi}_n^\varepsilon$. Очевидно, что $||\omega_n^\varepsilon||_{\overset{\circ}{H}^2(D)} \leq 1$. Следовательно, $\omega_n^\varepsilon \to \omega^\varepsilon$ сильно в $L_4(D)$ и слабо в $\overset{\circ}{H}^2(D)$ при $n \to \infty$. Разделим (13) на S_n и, перейдя к пределу, получим

$$1 \leq \lambda_0 \left| \int\limits_D \Delta\omega^\varepsilon(b(x,\delta_1)_{x_2} \cdot \omega_{x_1} - b(x,\delta_1)_{x_1} \cdot \omega_{x_2}) dx \right|. \tag{14}$$

Это неравенство получено с функцией $b = b(x,\delta_1)$, выбранной нами с самого начала. Заметим, что функция $\tilde{\psi}^\varepsilon(x,\delta,\lambda) = \tilde{\psi}^\varepsilon(x,\delta_1,\lambda) + b(x,\delta_1) - b(x,\delta)$ является обобщенным решением задачи (4) – (5) с функцией $b(x,\delta)$ для любого $\delta \in [0,\delta_1]$. Норма

$$||\tilde{\psi}_n^\varepsilon|| = ||\tilde{\psi}^\varepsilon(x,\delta,\lambda_n)||_{\overset{\circ}{H}^2(D)} \leq$$

$$\leq ||\tilde{\psi}^\varepsilon(x,\delta_1,\lambda_n)||_{\overset{\circ}{H}^2(D)} + ||b(x,\delta_1)||_{\overset{\circ}{H}^2(D)} + ||b(x,\delta)||_{\overset{\circ}{H}^2(D)} \to \infty \ \text{при} \ \lambda_n \to \lambda_0 \ \text{и}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\psi}^\varepsilon(x,\delta,\lambda_n)}{||\tilde{\psi}^\varepsilon(x,\delta,\lambda_n)||_{\overset{\circ}{H}^2(D)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\psi}^\varepsilon(x,\delta_1,\lambda_n) + b(x,\delta_1) - b(x,\delta)}{||\tilde{\psi}^\varepsilon(x,\delta_1,\lambda_n)||_{\overset{\circ}{H}^2(D)} \cdot ||\tilde{\psi}^\varepsilon(x,\delta_1,\lambda_n) + b(x,\delta_1) - b(x,\delta)||_{\overset{\circ}{H}^2(D)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\psi}^\varepsilon(x,\delta_1,\lambda_n) + b(x,\delta_1) - b(x,\delta)}{||\tilde{\psi}^\varepsilon(x,\delta_1,\lambda_n)||_{\overset{\circ}{H}^2(D)} \cdot ||1 + (b(x,\delta_1) - b(x,\delta))/||\tilde{\psi}^\varepsilon(x,\delta_1,\lambda_n)||_{\overset{\circ}{H}^2(D)}||_{\overset{\circ}{H}^2(D)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\psi}^\varepsilon(x,\delta_1,\lambda_n)}{||\tilde{\psi}^\varepsilon(x,\delta_1,\lambda_n)||_{\overset{\circ}{H}^2(D)}} = \omega^\varepsilon(x).$$

Здесь $\omega^\varepsilon(x)$ не зависит от δ. Покажем, что на самом деле это не так. Для $\omega^\varepsilon(x)$ справедливо неравенство

$$1 \leq \lambda_0 \left| \int\limits_D \Delta\omega^\varepsilon(b(x,\delta)_{x_2} \cdot \omega_{x_1}^\varepsilon - b(x,\delta)_{x_1} \cdot \omega_{x_2}^\varepsilon) dx \right|. \tag{15}$$

Для $\tilde{\psi}_n^\varepsilon = \tilde{\psi}^\varepsilon(x,\delta,\lambda_n)$ получим интегральное соотношение

$$S_n^2 = \mu \int\limits_D ||\Delta\psi_n^\varepsilon||^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{D_1} |\psi_n^\varepsilon|^2 dx \leq$$

$$\leq \lambda_n \left| \int\limits_D \Delta\tilde{\psi}_n^\varepsilon(b(x,\delta)_{x_2} \cdot \tilde{\psi}_{n_{x_1}}^\varepsilon - b(x,\delta)_{x_1} \cdot \tilde{\psi}_{n_{x_2}}^\varepsilon dx \right| + C||b(x,\delta)||_{W_2^2(D)}||\tilde{\psi}_n^\varepsilon||_{\overset{\circ}{H}^2(D)}. \tag{16}$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{||b(x,\delta)||_{W_2^2(D)}||\tilde{\psi}_n^\varepsilon||_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)}}{S_n}=0.$$

Далее оцениваем интегралы правой части следующим образом:

$$\int\limits_D \Delta\tilde{\psi}_n^\varepsilon\left(b(x,\delta)_{x_2}\cdot\tilde{\psi}_{n_{x_1}}^\varepsilon-b(x,\delta)_{x_1}\cdot\tilde{\psi}_{n_{x_2}}^\varepsilon\right)dx=\int\limits_{\Omega_\delta}\Delta\tilde{\psi}_n^\varepsilon\left(b(x,\delta)_{x_2}\cdot\tilde{\psi}_{n_{x_1}}^\varepsilon-b(x,\delta)_{x_1}\cdot\tilde{\psi}_{n_{x_2}}^\varepsilon\right)dx+$$

$$+\int\limits_{D_1}\Delta\tilde{\psi}_n^\varepsilon\left(b(x,\delta)_{x_2}\cdot\tilde{\psi}_{n_{x_1}}^\varepsilon-b(x,\delta)_{x_1}\cdot\tilde{\psi}_{n_{x_2}}^\varepsilon\right)dx=J_1+J_2,$$

$$|J_2|=\left|\int\limits_D\Delta\tilde{\psi}_n^\varepsilon\left(b(x,\delta)_{x_2}\cdot\tilde{\psi}_{n_{x_1}}^\varepsilon-b(x,\delta)_{x_1}\cdot\tilde{\psi}_{n_{x_2}}^\varepsilon\right)dx\right|\le||\Delta\tilde{\psi}_n^\varepsilon||_{L_2(D_1)}\cdot||\nabla\tilde{\psi}_n^\varepsilon||_{L_4(D_1)}\cdot||\nabla b||_{L_4(D_1)}.$$

Далее, используя известное неравенство [7] $||\tilde{\psi}_n^\varepsilon||_{L_4(D)}\le||\tilde{\psi}_n^\varepsilon||^{3/4}_{W_2^2(D_1)}\cdot||\tilde{\psi}_n^\varepsilon||^{1/4}_{L(D_1)}$, оцениваем слагаемые

$$||\Delta\tilde{\psi}_n^\varepsilon||_{L_2(D_1)}\cdot||\nabla\tilde{\psi}_n^\varepsilon||_{L_4(D_1)}\le C||\Delta\tilde{\psi}_n^\varepsilon||_{L_2(D)}||\tilde{\psi}_n^\varepsilon||^{3/4}_{W_2^2(D_1)}||\tilde{\psi}_n^\varepsilon||^{1/4}_{L_2(D_1)}\le$$

$$\le C||\Delta\tilde{\psi}_n^\varepsilon||^{7/4}_{L_2(D)}\cdot||\tilde{\psi}_n^\varepsilon||^{1/4}_{L_2(D_1)}\le C\left(\varepsilon_1^{8/7}||\Delta\tilde{\psi}_n^\varepsilon||^2_{L_2(D)}+\varepsilon_1^{-8}||\tilde{\psi}_n^\varepsilon||^2_{L_2(D_1)}\right)\le$$

$$\le C\cdot\varepsilon_1^{8/7}\left(||\Delta\tilde{\psi}_n^\varepsilon||^2_{L_2(D)}+\varepsilon_1^{-64/7}||\tilde{\psi}_n^\varepsilon||^2_{L_2(D_1)}\right)=J_0.$$

Здесь мы использовали неравенство Юнга с ε_1. Положим $\varepsilon_1^{-64/7}=\varepsilon^{-1},\ \varepsilon_1=\varepsilon^{7/64}$. Тогда

$$J_0\le C\cdot\varepsilon^{1/8}\left(||\tilde{\psi}_n^\varepsilon||^2_{L_2(D)}+\frac{1}{\varepsilon}||\tilde{\psi}_n^\varepsilon||^2_{L_2(D_1)}\right)=C\cdot\varepsilon^{1/8}\cdot S_n^2,$$

$$J_2\le C\cdot\varepsilon^{1/8}\cdot S_n^2.$$

Разделив (16) на S_n^2 и перейдя к пределу при $n\to\infty$, получим

$$1\le\lambda_0\left|\int\limits_{\Omega_\delta}\Delta\omega^\varepsilon\left(b(x,\delta)_{x_2}\cdot\omega_{x_1}^\varepsilon-b(x,\delta)_{x_1}\cdot\omega_{x_2}^\varepsilon\right)dx\right|+C\cdot\varepsilon^{1/8}\le$$

$$\le\lambda_0C\cdot\int\limits_{\Omega_\delta}|\Delta\omega^\varepsilon|\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\cdot\left(|\omega_{x_1}^\varepsilon|-|\omega_{x_2}^\varepsilon|\right)dx+C\cdot\varepsilon^{1/8}\le$$

$$\le\lambda_0C\cdot(||\omega^\varepsilon||_{W_2^2(\Omega_\delta)}||\Delta\omega^\varepsilon||_{L_2(\Omega_\delta)}+\frac{1}{\delta}||\omega^\varepsilon||_{W_2^2(\Omega_\delta)}||\Delta\omega^\varepsilon||_{L_2(\Omega_\delta)}).\tag{17}$$

Будем использовать неравенство

$$||\psi||_{L_2(\Omega_\delta)}\le\delta||\nabla\psi||_{L_2(\Omega_\delta)}+\sqrt{\delta}||\psi||_{L_2(S)},$$

которое получается из представления

$$\psi(x)=\psi(y)|_{y=S}+\int\limits_y^S\frac{\partial\psi}{\partial x}dn$$

после двукратного интегрирования и использования неравенства Гельдера

$$\left\|\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega_\delta)} \le C\cdot\delta\|\omega^\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega_\delta)} + \sqrt{\delta}\left\|\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial x}\right\|_{L_2(S)}. \tag{18}$$

Последнее слагаемое оцениваем с помощью теоремы вложения [7]

$$\left\|\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial n}\right\|_{L_2(S)} \le \left\|\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial n} - \frac{\tilde\psi^\varepsilon_{n_x}}{||\tilde\psi^\varepsilon_n||_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)}}\right\| + \frac{||\tilde\psi^\varepsilon_{n_x}||}{||\tilde\psi^\varepsilon_n||_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)}} \le$$

$$\le \left\|\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial n} - \frac{\tilde\psi^\varepsilon_{n_x}}{||\tilde\psi^\varepsilon_n||_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)}}\right\| + C\cdot||\tilde\psi^\varepsilon_{n_x}||^{1/2}_{W_2^2(D_1)}\cdot||\tilde\psi^\varepsilon_n||_{W_2^1(D_1)} \le$$

$$\le \left\|\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial n} - \frac{\tilde\psi^\varepsilon_{n_x}}{||\tilde\psi^\varepsilon_n||_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)}}\right\| + C\cdot||\tilde\psi^\varepsilon_n||^{3/4}_{W_2^2(D_1)}\cdot||\tilde\psi^\varepsilon_n||^{1/4}_{L_2(D_1)}. \tag{19}$$

Используя неравенство Юнга, продолжим оценку

$$||\tilde\psi^\varepsilon_n||^{3/4}_{W_2^2(D_1)}\cdot||\tilde\psi^\varepsilon_n||^{1/4}_{L_2(D_1)} \le C\cdot\varepsilon_1^{4/3}\left(\sqrt{\mu}||\Delta\tilde\psi^\varepsilon_n||_{L_2(D)} + \varepsilon_1^{-16/3}||\tilde\psi^\varepsilon_n||_{L_2(D_1)}\right) \le$$

$$\le C\cdot\varepsilon^{1/8}\cdot\left(\sqrt{\mu}||\Delta\tilde\psi^\varepsilon_n||_{L_2(D)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}||\tilde\psi^\varepsilon_n||_{L_2(D_1)}\right)$$

при $\varepsilon_1 = \varepsilon^{3/32}$. Следовательно,

$$\frac{||\tilde\psi^\varepsilon_{n_x}||^{3/4}_{W_2^2(D_1)}\cdot||\tilde\psi^\varepsilon_{n_x}||^{1/4}_{L_2(D_1)}}{||\tilde\psi^\varepsilon_n||_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)}} \le C\cdot\varepsilon^{1/8} \tag{20}$$

с постоянной C, не зависящей от ε, δ. В силу (18), (20), имеем оценку

$$\left\|\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial x}\right\|_{L_2(S)} \le \left\|\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\tilde\psi^\varepsilon_{n_x}}{||\tilde\psi^\varepsilon_n||_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)}}\right\| + C\cdot\varepsilon^{1/8}. \tag{21}$$

Из (21), переходя к пределу при $n\to\infty$, в силу теоремы вложения [6] имеем

$$\left\|\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial x}\right\|_{L_2(S)} \le C\cdot\varepsilon^{1/8}.$$

Теперь с учетом (21) неравенство (18) примет вид

$$\left\|\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega_\delta)} \le C\cdot\left(\delta||\omega^\varepsilon||_{W_2^2(\Omega_\delta)} + \sqrt{\delta}\varepsilon^{1/8}\right). \tag{22}$$

В силу (22) неравенство (17) можно переписать следующим образом:

$$1 \le \lambda_0\cdot C\cdot\left(||\omega^\varepsilon||_{W_2^2(\Omega_\delta)}||\nabla\omega^\varepsilon||_{L_2(\Omega_\delta)} + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\varepsilon^{1/8}\right) + C\cdot\varepsilon^{1/8}. \tag{23}$$

Заметим, что правая часть (23) сходится к нулю при $\dfrac{\varepsilon^{1/8}}{\delta} \to 0$, $\delta \to 0$. Вместе с тем параметры ε, δ выберем достаточно малыми, чтобы левая часть (23) оказалась меньше единицы, что приводит к противоречию. Таким образом, доказано, что решение операторного уравнения (11) не выходит за пределы некоторого ограниченного шара в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^2(D)$ при всех $\lambda \in [0, 1]$. Итак, теорема 1 полностью доказана. На основе этой теоремы легко выводится другая.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда обобщенное решение задачи (4) – (5) сходится к обобщенному решению задачи (1) – (2).*

Заметим, что полученные априорные оценки обобщенного решения задачи (4) – (5) равномерны по ε при достаточно малом ε:

$$||\psi^\varepsilon - b(x)||_{W_2^2(D)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}||\psi^\varepsilon - b(x)||_{L_2(D_1)} \le C < \infty.$$

Следовательно, из последовательности $\{\psi^\varepsilon\}$ можно выделить подпоследовательность, для которой имеют место следующие соотношения:

$\psi^\varepsilon \to \psi$ слабо в $W_2^2(\Omega)$,

$\psi^\varepsilon \to \psi$ сильно в $W_2^1(\Omega)$,

$\psi^\varepsilon \to \psi$ сильно в $L_2(S)$,

$\left.\dfrac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial n}\right|_S \to \left.\dfrac{\partial b(x)}{\partial n}\right|_S$ сильно в $L_2(S)$,

при $\varepsilon \to 0$. Легко сделать вывод, что ψ является обобщенным решением задачи (1) – (2). Теорема 2 полностью доказана.

Список литературы

[1] Вабищевич П. Н. *Метод фиктивных областей в задачах математической физики.* Изд-во Московского гос. ун-та, 1991.

[2] Бугров А. Н. *Метод фиктивных областей в уравнениях относительно функции тока для вязкой несжимаемой жидкости.* Препр. Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск, 1977.

[3] Вабищевич П. Н. Неявные разностные схемы для нестационарных уравнений Навье — Стокса в переменных “функция тока — вихрь”. *Дифференц. уравнения*, **20**, №7, 1984, 1135–1144.

[4] Смагулов Ш., Орунханов М. К. Приближенный метод решения уравнений гидродинамики в многосвязных областях. *Докл. АН СССР*, **260**, №5, 1981, 1078–1082.

[5] Коробицына Ж. Л. Метод фиктивных областей для уравнения Лапласа с неоднородными краевыми условиями. *ЖВМиМФ*, **33**, №7, 1993.

[6] Ладыженская О. А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* Наука, М., 1970.

[7] Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей.* Наука, Сиб. отд-ние, Новосибирск, 1983.

Поступила в редакцию 17 сентября 1999 г.