Вычислительные технологии **Том 5, № 2, 2000**

МЕТОД РАСЧЕТА ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ АДВЕКЦИИ

В. М. Фомин
Институт вычислительных технологий СО РАН
Новосибирск, Россия

The work deals with constructing a finite-difference method for the calculation of generalized solutions for equations of aero- and hydrodynamics. The advantage of the suggested method is that in using it one can avoid loss of accuracy inevitable for almost all methods in current practice.

При численном моделировании гидро- и аэродинамических процессов возникает проблема с аккуратным описанием скачков и областей с большими пространственными градиентами. При численном моделировании атмосферы эта проблема появляется при описании фронтов и эволюции влажности. В связи со значительно возросшим в последнее время интересом к моделированию экологических явлений, развивающихся на фоне метеорологических процессов, аналогичная проблема возникает и с точностью расчета переноса примесей. При решении уравнений гидро- и газодинамики численными методами, как правило, указанные уравнения сводятся к уравнениям переноса пассивных примесей.

В последние годы появилась серия статей, посвященных численным методам расчета вышеуказанных явлений (см., например, [1, 2]). С обзором некоторых методов можно познакомиться в [3]. Все эти работы основаны на применении специальных монотонизирующих операторов. Существенным недостатком таких методов является потеря порядка аппроксимации. Несколько ранее для расчета рассматриваемых здесь решений использовались схемы, основанные на слежении за траекторией движения особенностей [4]. Однако этим численным схемам свойствен тот же недостаток.

Автору удалось построить такие численные схемы расчета обобщенных решений, которые дают порядок аппроксимации для класса рассматриваемых функций, равный максимальному порядку для гладких функций, достижимому на выбранном шаблоне. Кроме того, построены функционалы, которые показывают, что почти во всей области (кроме особых точек) разработанный метод гарантирует отсутствие фиктивных источников. Эти схемы основаны на расчете траекторий особенностей и возможности представления решения в виде суммы двух слагаемых: первое слагаемое — гладкая часть решения, во втором слагаемом представлены особенности.

1. Иерархия особенностей

Прежде чем представить численную схему расчета обобщенных решений, формализуем иерархическую структуру особенностей. Пусть $\chi^0(x-c)$ — функция Хевисайда и пусть последовательность функций $\chi^n(x-c)$, где $(n = 1, ..., \infty)$, задается рекуррентной формулой

$$\chi^n(x-c) = \int\limits_{-\infty}^{x} \chi^n(y-c)dy; \tag{1}$$

следовательно, $\chi^n(x-c) = \dfrac{(x-c)^n}{n!}$ при $x \geq c$ и равна нулю, если $x < c$.

Утверждение 1. *Пусть функция $\varphi(x)$, заданная на отрезке $[a,b]$, всюду непрерывна со своими производными до порядка N включительно, кроме точки $x = c$, где она, или ее производная некоторого порядка m, терпит разрыв первого рода, причем производные более высокого порядка (вплоть до порядка N) как слева, так и справа от указанной точке ограничены, и пусть*

$$A_m = \left\{ \frac{d^m\varphi(x)}{dx^m}\Big|_{x=c+} - \frac{d^m\varphi(x)}{dx^m}\Big|_{x=c-} \right\},$$

$$\ldots$$

$$A_n = \left\{ \frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\Big|_{x=c+} - \frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\Big|_{x=c-} \right\}, \tag{2}$$

$(m < n \leq N)$, а $(x = c+)$, или $(x = c-)$ — означает, что значение соответствующей величины берется справа или слева от указанной точки; тогда имеет место представление в виде суммы

$$\varphi(x) = \psi^N(x) + \sum_{n=m}^{N} A_n \chi^n(x-c), \tag{3}$$

где $\psi^N(x)$ — функция, непрерывная с производными до порядка N включительно, а константы A_n ограничены по абсолютной величине (могут быть равны и нулю), причем

$$\psi^m(x) = \varphi(x) - \left\{ \frac{d^m\varphi(x)}{dx^m}\Big|_{x=c+} - \frac{d^m\varphi(x)}{dx^m}\Big|_{x=c-} \right\} \chi^m(x-c),$$

$$\ldots$$

$$\psi^n(x) = \psi^{n-1}(x) - \left\{ \frac{d^n\varphi(x)}{d^n}\Big|_{x=c+} - \frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\Big|_{x=c-} \right\} \chi^n(x-c); \tag{4}$$

при $m = 0$ производная нулевого порядка интерпретируется как сама функция.

Доказательство утверждения проводится с помощью метода математической индукции и не представляет труда, поскольку последовательность операций (4) пошагово устраняет разрыв первого рода в производной, уже подправленной на предыдущем шаге функции $\psi^{n-1}(x)$, и не вносит новых особенностей. Чтобы в этом убедиться, достаточно в (4) положить $n = N$ и последовательно исключать функции $\psi(x)$ с меньшими индексами до тех пор, пока не придем к функции $\psi^m(x)$.

В случае, если такая точка представлена на отрезке не в единственном числе, имеет место обобщение утверждения 1.

Утверждение 2. *Пусть функция $\varphi(x)$, заданная на $x \in [a, b]$, всюду непрерывна со своими производными любого порядка, кроме счетного числа точек $x = c_i$ $(i = 1, ..., I)$, где она или ее производная некоторого порядка m_i терпят разрыв первого рода; причем производные более высокого порядка (вплоть до порядка N) как слева, так и справа от указанных точек ограничены; тогда имеет место представление в виде суммы*

$$\varphi(x) = \psi^N(x) + \sum_{i=1}^{I} \sum_{n=mi}^{N} A_{i,n} \chi^n(x - c_i), \tag{5}$$

где $\psi^N(x)$ — функция, непрерывная с производными до порядка N включительно, а для постоянных A выполняется условие: модуль A — величина ограниченная. Функции $\psi^N(x)$ и необходимые константы рассчитываются так:

$$\psi^M(x) = \varphi(x) - \sum_{i=1}^{I} \left\{ \frac{d^M\varphi(x)}{dx^M}\Big|_{x=c_i+} - \frac{d^M\varphi(x)}{dx^M}\Big|_{x=c_i-} \right\} \chi^M(x - c_i),$$

$$\dots$$

$$\psi^n(x) = \psi^{n-1}(x) - \sum_{i=1}^{I} \left\{ \frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\Big|_{x=c_i+} - \frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\Big|_{x=c_i-} \right\} \chi^n(x - c_i),$$

$$A_{i,M} = \left\{ \frac{d^M\varphi(x)}{dx^M}\Big|_{x=c_i+} - \frac{d^M\varphi(x)}{dx^M}\Big|_{x=c_i-} \right\},$$

$$\dots$$

$$A_{i,n} = \left\{ \frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\Big|_{x=c_i+} - \frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\Big|_{x=c_i-} \right\}$$

$$(M < n \le N). \tag{6}$$

В соотношениях (6) число M равно минимальному из чисел m_i; если для точки с определенным индексом i $m_i > M$, то формально соотношения (6) все равно справедливы, поскольку соответствующие слагаемые обращаются в нуль. Доказательство утверждения аналогично доказательству утверждения 1.

2. Разделение решения на компоненты

Итак, рассмотрим одномерное уравнение переноса пассивной примеси (это могут быть и водяной пар, и облачные капли, и частицы, попадающие в атмосферу вследствие как природных процессов, так и жизнедеятельности человека):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \tag{7}$$

где x — горизонтальная координата ($x[0, L]$), $u(x)$ — скорость (полагаем, что $u(x) \ge 0$; здесь вопросы гладкости функции u не рассматриваются, считаем, что она имеет непрерывные производные необходимого порядка) периодична (с периодом L), $\varphi(x, 0)$ — концентрация примеси с начальным условием

$$\varphi(x, 0) = \psi(x, 0) + \omega(x, 0). \tag{8}$$

Будем полагать, что необходимые граничные условия заданы; кроме того будем считать, что функция $\psi(x,0)$ периодична с периодом L (это позволяет упростить рассмотрение трансформации интегральных величин); функция ω равна нулю на левой границе области; функция $\psi(x,0)$ представляет гладкую часть решения; в функции $\omega(x,0)$ представлены особенности.

Рассмотрим поведение особенностей со временем. Ранее мы ввели обозначения: A_n — значение скачка соответствующей производной в особой точке $x=x_\star$ (причем $0<x(t)<L$), далее штрихами сверху будем помечать дифференцирование функции u по переменной x; тогда, используя уравнение (7) и операции дифференцирования справа и слева от указанной точки, получаем:

$$\frac{dA_0}{dt}=0, \quad \frac{dA_1}{dt}=-u'_\star A_1, \quad \frac{dA_2}{dt}=-2u'_\star A_2-u''_\star A_1. \tag{9}$$

Уравнения (9) позволяют получить интегралы движения, перейдя от интегрирования вдоль траектории к интегрированию по координате x ($dx_\star = u_\star dt$). Поскольку при заданных ограничениях на функцию $u(x)$ характеристики не пересекаются, неизменными вдоль характеристик остаются величины

$$A_0, \quad A_1 u_\star, \quad A_2, \quad u_\star^2 + A_1 u'_\star u_\star. \tag{10}$$

Из (10) следует, что уравнение (7) обладает следующим свойством: если в начальных условиях содержится разрыв ($n=0$) или излом ($n=1$), то такая особенность не исчезает. Справедливо и обратное: если в начальных условиях одна из указанных особенностей не представлена, то в дальнейшем она и не появляется. Что касается особенности, характеризующейся числом n, равным двум, здесь дело обстоит иначе: скачок во второй производной может появляться и исчезать при наличии разрыва первой производной. При этом величина A_2 остается ограниченной.

Выполненные вычисления показывают: если в начальных данных произведено разбиение на две части, то в решении уравнения (7) в любой момент времени можно произвести аналогичное разделение на две составляющие: гладкую и содержащую особенности.

Численная схема, предлагаемая для расчетов течений с особенностями, основана на идее применения конечно-разностной аппроксимации задачи (7)–(8) для гладкой части $\varphi(x,0)$ и непосредственно аналитических выражений — к членам формул (5) или (3), описывающим скачки, изломы и т. д. (составляющая ω).

Аппроксимация уравнения (7) центральными разностями со вторым порядком точности дает в решении, согласно теореме Лакса [5], для гладкой функции $\psi(x,0)$ ошибку того же порядка. Для рассматриваемого уравнения необходимая гладкость заключается в требовании, чтобы функция $\psi(x,0)$ была дифференцируема до третьего порядка включительно. Из доказанных выше теорем и формулы разложения в ряд Тейлора следует, что если мы строим схему второго порядка аппроксимации, то достаточно в разложении (5) или (3) ограничиться значением N, равным трем; тогда после выделения особенностей до третьего порядка включительно функция ψ^3 дифференцируема нужное число раз. Однако оказывается, что для того, чтобы в этом случае решение было представлено со вторым порядком точности, достаточно, чтобы функция $\varphi(x,0)$ имела непрерывные производные до второго порядка; для третьей производной допускается наличие счетного количества разрывов первого рода; следовательно, чтобы необходимые особенности были представлены в начальных условиях, их следует записать в виде (5) или (3), ограничившись значением N, равным двум.

Доказательство этого утверждения лежит через ревизию двух известных теорем. Сформулируем последовательно их новые модификации.

Теорема о среднем (аналог теоремы Лагранжа). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b), кроме счетного числа точек $x = c_i$, где имеется разрыв первого рода, то разность $f(a) - f(b)$ может быть выражена как*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\xi-} + \Theta\left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\xi+} - \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\xi-}\right), \quad (\xi \in [a,b]), \tag{11}$$

где $(0 \le \Theta \le 1)$.

Разумеется, как и в оригинальной трактовке теоремы о среднем, возможно одновременное выполнение равенства (11) не в единственной точке.

Для доказательства воспользуемся формулировкой теоремы о среднем в интегральном виде: $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b F(x)dx = F(\xi)$, где $\xi \in [a, b]$. Если интегрируемость понимается в смысле Римана, то от функции $F(x)$ не требуется непрерывности. В том случае, когда $\xi = c_i$, вертикальная координата прямой $y = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b F(x)dx$ ограничена следующим неравенством: $F(c_i-) \le y \le F(c_i+)$ (или наоборот); т. е. $y = F(c_i-) + \Theta(F(c_i+) - F(c_i-))$. Это значение y и принимается за значение $F(\xi)$. В противном случае (11) совпадает с выражением в классической формулировке теоремы. Далее, полагая, что $F(x) = \frac{df}{dx}$ (функция f уже непрерывна), получаем (11). Доказательство завершено. Такая модификация теоремы о среднем необходима потому, что на этой теореме основано выражение остаточного члена в формуле Тейлора.

Теорема о разложении функции в ряд Тейлора. *Если функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на отрезке $x \in [a, b]$ n раз и имеет производную $n+1$-го порядка в интервале $x \in (a, b)$, кроме счетного числа точек $x = c_i$, где она терпит разрыв первого рода, то имеет место разложение в ряд Тейлора:*

$$f(x) = f(a) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}(x-a) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=a}(x-a)^2 + ... + \frac{1}{n!}\left.\frac{d^nf}{dx^n}\right|_{x=a}(x-a)^n + R_n(x), \tag{12}$$

где остаточный член $R_n(x)$ имеет порядок $O(x-a)^{n+1}$ и может быть записан в форме

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\left[\left.\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}\right|_{x=\xi-} + \Theta\left(\left.\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}\right|_{x=\xi+} - \left.\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}\right|_{x=\xi-}\right)\right](x-a)^{n+1} \quad (\xi \in [a,b]) \tag{13}$$

в полном соответствии с доказанной выше теоремой.

Выражение для остаточного члена ряда можно получить таким же путем, как это сделано в [6].

3. Конечно-разностная аппроксимация задачи

Перемещение координаты особенности, описываемое уравнением (7), определим конечно-разностным уравнением

$$\frac{x_\star^{k+1} - x_\star^{k-1}}{2\Delta t} = u(x_\star^k), \tag{14}$$

где $x_\star^m$ — координата особенности в момент времени $t = m\Delta t$, Δt — шаг по времени, $u(x_\star^m)$ — значения скорости в точке прохождения особенности, которые могут быть получены с помощью интерполяции по значениям функции $u(x_i)$ в узлах сетки с равномерным шагом Δx. Условие Куранта—Фридрихса—Леви, которое для выбранной сетки выглядит как $\Delta t \le \dfrac{\Delta x}{\max(u_i)}$, налагает ограничение на перемещение траектории за интервал времени $2\Delta t$. Так, если $x_{J-1} \le x_\star^k \le x_J$, то хронология движения скачка описывается следующими вариантами:

$$\begin{aligned} &I. \quad x_\star^{k+1} > x_J, \quad x_\star^{k-1} \le x_{J-1},\\ &II. \quad x_\star^{k+1} > x_J, \quad x_\star^{k-1} > x_{J-1},\\ &III. \quad x_\star^{k+1} \le x_J, \quad x_\star^{k-1} \le x_{J-1},\\ &IV. \quad x_\star^{k+1} \le x_J, \quad x_\star^{k-1} > x_{J-1}, \end{aligned} \tag{15}$$

здесь нижний индекс означает номер точки на отрезке $x \in [0, L]$, верхний индекс — временной.

Формула линейной интерполяции

$$u(x_\star^k) = \frac{u_{J-1}(x_J - x_\star^k) + u_J(x_\star^k - x_{J-1})}{\Delta x} \tag{16}$$

позволяет выразить правую часть уравнения (14) через значения сеточной функции u_i $(1 \le i \le I+1)$, причем $u_1 = u_{I+1}$.

Конечно-разностная схема (14) трехуровневая; следует задать еще одно начальное условие, скажем, применив на первом шаге интегрирования метод Эйлера. Используем здесь следующую модификацию метода: второе начальное условие с помощью формулы $x_\star^{-1} = x_\star^0 - \Delta t u_\star^0$ поставим при $t = t^{-1}$ в предположении, что $x_\star^{-1} \in [0, L]$. Пользуясь формулой (16), нетрудно установить, что уравнение (14) аппроксимирует уравнение $\dfrac{dx_\star}{dt} = u_\star$ со вторым порядком точности. Пусть ошибка аппроксимации оператора (в норме C) равна $B(\Delta x)^2$ (B — положительная константа), поскольку временной шаг и шаг по пространству в силу условия Куранта—Фридрихса—Леви связаны линейной зависимостью.

Исследуем поведение решения рассматриваемого уравнения на ограниченном промежутке времени $[0, t^k]$; пусть $t^k = T$. На основании (14) и знакоположительности величины u нетрудно получить оценку $\min(u_j)T \le x_\star^k - x_\star^0 \le \max(u_j)T$, которую можно использовать как показатель устойчивости схемы (14). На основании теоремы Лакса [5] для ошибки решения можно получить следующую оценку:

$$\|(x_\star^k - x_\star(t^k))\| \le B(T)(\Delta x)^2, \tag{17}$$

где $B(T)$ — функция положительная. Используемые далее в оценках такого рода функции также положительны. Пусть

$$\omega(x,t) = \sum_{n=0}^{2} A_n(t)\chi^n(x - x_\star),$$

тогда можно написать

$$\frac{d\omega}{dt} + u\frac{d\omega}{dx} = \sum_{n=1}^{2}\left(\frac{dA_n}{dt}\chi^n(x-x_\star) + A_n(u-u_\star)\chi^{n-1}(x-x_\star)\right) \equiv W, \tag{18}$$

поскольку $\dfrac{dA_0}{dt} = 0$, $\dfrac{d\chi^0(x-x_\star)}{dt} = 0$ и член в сумме (18) с индексом равным нулю пропадает.

Теперь можно оценить ошибку расчета составляющей ω, возникающую вследствии перехода от дифференциального уравнения характеристики к конечно-разностному уравнению (14). Проведенный анализ поведения особенностей со временем (формулы (9) и (10)) позволяет перейти от функции $\omega(x,t)$ к функции $\Omega(x,t)$. Замена обозначений $\omega \to \Omega$ есть следствие того, что в части решения, содержащей особенности, расчет перемещения особенной точки теперь производится с помощью конечно-разностного уравнения. Рассмотрим случай: пусть особенность — скачок, т. е. в функции ω представлен лишь единственный член суммы с индексом равным нулю. Тогда $W = 0$ и оценка ошибки решения δ для составляющей Ω дается как

$$\delta = \frac{1}{L}\int_0^L |\Omega^k - \omega(x-x_\star^k))|dx = \frac{1}{L}|(A_0(x_\star^k - x_\star(t^k))| \le D(T)(O\Delta x)^2. \tag{19}$$

Чтобы проделать подобную оценку для общего случая, когда в начальных данных (8) представлены другие особенности, следует предварительно провести оценку близости значений функций $A_n(t^k)$ и A_n^k, т. е. “истинного” и приближенного. Уточним наши требования на гладкость функции u. Из формул (10) следует, что для расчета коэффициентов A_n с необходимой точностью (второй порядок по переменной x) с такой же точностью должна быть рассчитана конечно-разностная производная u'. Это означает, что функция u должна иметь непрерывную производную вплоть до второго порядка включительно; в противном случае следует представить указанную функцию в виде ряда (5), а формулу (16) использовать лишь для гладкой составляющей, исключив особенности с номерами $N = 0, 1, 2$. Тогда мера близости значений функций $u(x_\star(t))$ и $u(x_\star^k)$ может быть представлена в соответствии с оценкой (17) (в -норме) как пропорциональная величине $(\Delta x)^2$. Используя для аппроксимации производной по пространству в (10) шаблон из четырех узлов ($i = J-2, ..., J+1$), можно получить оценку $|A_n(t^k) - A_n^k| \sim (\Delta x)^2$. Предположим, что выполняется условие $x_\star^k \ge x_\star(x^k)$. На окончательных результатах вычислений такое допущение не сказывается, а влияет лишь на способ проведения промежуточных вычислений. Пусть $a = x_\star(t^k)$, $b = x_\star^k$ и $b > a$; тогда

$$|\chi^n(x-a) - \chi^n(x-b)| = |\chi^n(x-b+(b-a)) - \chi^n(x-b)| \sim (\Delta x)^2$$

для $x \ge b$ (на основании разложения функции $\chi^n(x-a)$ в ряд Тейлора). Для $x < b$ вышеприведенная оценка очевидна. Далее в норме C имеем

$$|A_n(t^k)\chi^n(x-a) - A_n^k\chi^n(x-b)| \sim (\Delta x)^2. \tag{20}$$

Пользуясь теми же приемами и применяя к производным по пространству из (9) четырехточечный шаблон, можно показать, что

$$\|\frac{d}{dt}\Big[A_n(t^k)\chi(x-x_\star(t^k))\Big] - \frac{1}{2\Delta t}\times$$

$$\times\Big[A_n^{k+1}\chi^n(x_i - x_\star^{k+1}) - A_n^{k-1}\chi^n(x_i - x_\star^{k-1})\Big]\| \sim (\Delta x)^2. \tag{21}$$

Чтобы из (7) выделить уравнение для гладкой моды, воспользуемся линейностью уравнения (7) и выражением (18). Запишем уравнение для ψ сразу в конечно-разностном виде:

$$\frac{\psi_i^{k+1} - \psi_i^{k-1}}{2\Delta t} + u_i \frac{\psi_{i+1}^k - \psi_{i-1}^k}{2\Delta x} = -W_i^k \tag{22}$$

с граничным условием $\psi_{I+1}^k = \psi_1^k$. Здесь также необходимы два начальных условия. Полагаем, что мы их получили так же, как и при решении уравнения (14).

Функция W непрерывна и дифференцируема в точке $x = x_\star(\hat{t}), t = \hat{t}$ (где $\hat{t}$ — произвольный момент времени) необходимое число раз: $W \sim O(x - x_\star)^2$ при $x \to x_\star$ справа и $t \to \hat{t}$ слева, что легко проверяется анализом уравнений (9), (10), (18). Уравнение (22) аппроксимирует исходную задачу для гладкой части со вторым порядком точности по обеим переменным. Здесь учтена и оценка (21). Конечно-разностное уравнение (22) хорошо изучено. Условие Куранта—Фридрихса—Леви обеспечивает устойчивость; отсюда следует сходимость решения к решению соответствующей аналитической задачи с тем же порядком точности. Ошибка решения (δ) в норме C записывается так:

$$\delta \le H(T)(\Delta x)^2. \tag{23}$$

В принципе, уравнение (7) можно записать в конечно-разностном виде, учитывая особенности каждой составляющей; для этого добавим к правой и левой частям уравнения (18) выражение

$$\frac{\Omega_i^{k+1} - \Omega_i^{k-1}}{2\Delta t} + u_i \frac{\Omega_{i+1}^k - \Omega_{i-1}^k}{2\Delta x} - W_i^k. \tag{24}$$

Вообще говоря, (24) не является конечно-разностной аппроксимацией уравнения (18), но обладает следующими свойствами: во всех точках левее узла с индексом i равным $J-1$ оно тождественно равно нулю (на основании условий (15) и задания функции Ω в виде суперпозиции полиномов $\chi^n(x - x_\star)$); в точках правее узла $i = J$ рассматриваемое выражение равно нулю с точностью до $(\Delta x)^2$, поскольку в этой области функция Ω — гладкая. Так как $\varphi_i^k = \psi_i^k + \Omega_i^k$, на основании сказанного записываем

$$\frac{\varphi_i^{k+1} - \varphi_i^{k-1}}{2\Delta t} + u_i \frac{\varphi_{i+1}^k - \varphi_{i-1}^k}{2\Delta x} = \frac{\Omega_i^{k+1} - \Omega_i^{k-1}}{2\Delta t} + u_i \frac{\Omega_{i+1}^k - \Omega_{i-1}^k}{2\Delta x} - W_i^k \tag{25}$$

для точек $i = J-1, J$, где правая часть может быть выражена через функции $\chi^n(x_i - x_\star^k)$ на основании решения уравнения (14), условий (15), уравнений (9) и интегралов (10). Для точек слева от узлов с указанными номерами правая часть (25) равна нулю; для точек справа полагаем ее равной нулю. Такое уравнение и будем решать численно. Решая его, мы по сути решаем уравнение (22) с правой частью, равной $W + O(\Delta x)^2$, т. е. не выходя за пределы аппроксимации заданного порядка. Наиболее просто уравнение (25) выглядит, если в слагаемом представлен лишь скачок. Как это уже было определено выше для части решения, описывающей скачок, оценка дается в норме L_1; для оставшейся части оценка дается в норме C.

Далее можно рассмотреть более общий случай начальных условий: если существуют односторонние производные от функции некоторого порядка, имеющие пределом при $x \to c$ бесконечность; для того чтобы предложенная теория была применима и в этом случае, рекомендуется указанную точку изъять и в малой окрестности точки $x = c$ с соответствующей стороны аппроксимировать значения φ линейно, тем самым вводя новую точку с особенностью, но уже рассмотренного характера. В полном соответствии с проведенными оценками погрешность решения задачи (7), (8) с такими подправленными начальными условиями не будет выходить за рамки заданной точности.

4. Трансформация моментов движения

Важным вопросом при конструировании численных схем является вопрос сохранения инвариантов в конечно-разностном виде. В случае, если в уравнении (7) $u = \mathrm{const} > 0$ и функция ω равна нулю, сохраняются инварианты любого порядка. Для рассматриваемого уравнения физический смысл имеют лишь два закона сохранения, а для данной постановки задачи (7), (8) речь идет о законе трансформации соответствующих физических величин. Ограничение, наложенное нами на значение скорости ($u = \mathrm{const}$), позволяет провести анализ для каждой особенности отдельно. Итак,

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \varphi(x,t)dx = -u\varphi(L,t) - \varphi(0,t) = -u\omega(L - x_\star(t)),$$

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}\int_0^L (\varphi(L,t))^2 = -\frac{u}{2}\omega(L - x_\star(t))\Big[\omega(L - x_\star(t)) + 2\psi(L,t)\Big]. \tag{26}$$

Если с первым уравнением трудностей не возникает, то после преобразования второго уравнения с использованием соотношения $\varphi = \psi + \Omega$ в правой части получаем член $2\int_0^{x_J} \psi\omega(x - x_\star)dx$, который нам не удалось записать в конечно-разностном виде так, чтобы второе уравнение (26) имело конечно-разностный аналог; в точке $x = x_\star$ появляется некомпенсируемый источник. Представляется, что этот вопрос требует дальнейшей проработки.

Заключение

Еще до проведения расчетов можно получить некоторую информацию о характере решений по предложенной численной схеме: если $u = \mathrm{const}$, то заданные в начальных условиях задачи особенности переносятся без искажений и возникновение контактных разрывов невозможно. Далее предложенный метод предполагается использовать при конструировании численных схем для двумерного уравнения переноса, убрать ограничение на гладкость функции u, увеличить порядок аппроксимации и, наконец, рассмотреть нелинейное уравнение адвекции. Есть основание полагать некоторое сближение описанного метода с методами, широко применяющимися в современной практике, на том основании, что в области больших градиентов решение можно интерпретировать как суперпозицию функций, описывающих особенности; разумеется, такой подход требует аккуратного математического обоснования.

Автор выражает благодарность Г. С. Ривину, С. Б. Медведеву и А. О. Савченко за полезное обсуждение некоторых аспектов рассматриваемой проблемы.

Список литературы

[1] **Van Leer B.** Towards the ultimate conservativ difference scheme. A second-order stquel to Godunov. *J. Comp. Phys.*, **32**, No. 1, 1989, 101–136.

[2] **Yang J. Y.** Uniformly A second-order-accurate non oscillatory schemese for the Euler equations. *AIAA J.,* **28**, No. 12, 1990, 2069–2076.

[3] **Ильин С. А., Тимофеев Е. В.** Сравнение некоторых квазимонотонных схем сквозного счета на задаче Коши для одномерного уравнения переноса. *Матем. моделирование,* **4**, №3, 1992, 62–75.

[4] **Годунов С. К., Рябенький В. С.** *Разностные схемы.* Наука, М., 1979.

[5] **Лакс П.** Об устойчивости конечно-разностных аппроксимаций решений гиперболических уравнений с переменными коэффициентами. *Математика (сб. переводов)*, **6**, №3, 1962, 25–46.

[6] **Banax S.** *Rachunek różniczkowy i całkowy.* Państowowe wydawnictwo naukowe, Warshawa, 1952.

Поступила в редакцию 13 сентября 1995 г.,
в переработанном виде 11 июня 1997 г.