Вычислительные технологии **Том 4, № 4, 1999**

О ЛОКАЛЬНОЙ СОВМЕСТНОСТИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Д. М. Ушаков
Институт систем информатики им. А. П. Ершова СО РАН
Новосибирск, Россия

The paper presents a simple criteria for a system of linear constraints to be locally consistent.

Определение 1. *Вещественным интервальным вектором* $\mathbf{x}$ назовем множество

$$\mathbf{x} = [\,\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}\,] = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \underline{\mathbf{x}} \leq x \leq \overline{\mathbf{x}}\},$$

где $\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ и $\underline{\mathbf{x}} \leq \overline{\mathbf{x}}$. Множество всех вещественных интервальных векторов обозначим $\mathbb{IR}^n$. Вещественный отрезок $[\,\underline{\mathbf{x}}_i, \overline{\mathbf{x}}_i] = \mathbf{x}_i$ назовем i-й *координатой вектора* $\mathbf{x}$. Интервальный вектор *имеет ненулевую ширину*, если хотя бы одна из его координат не является точечным отрезком.

Определим *интервальную оболочку* $\Box S$ *множества* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\Box S = \bigcap_{S \subseteq \mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n} \mathbf{x}.$$

Ограничением $c(x)$ назовем формулу вида

$$f(x) \bowtie 0,$$

где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bowtie \in \{\,=, \neq, <, >, \leq, \geq\,\}$. Интервальный вектор $\mathbf{x}$ назовем *совместным с ограничением* $c(x)$, если

$$\mathbf{x} \subseteq \Box\{x \in \mathbf{x} \mid c(x)\}.$$

Интервальный вектор $\mathbf{x}$ назовем *локально совместным с системой ограничений* $C = \{\, c_1(x),\, \ldots,\, c_m(x)\}$, если он совместен с каждым ограничением системы.

Известен факт [1], что любая система ограничений имеет наибольший (по включению) локально совместный с ней вектор. Этот интервальный вектор содержит все решения системы. Более того, существует алгоритм вычисления этого вектора для заданной системы ограничений. Такой алгоритм называется алгоритмом достижения локальной совместности. (Другое его название — метод недоопределенных вычислений.) Нам интересна следующая задача. Предположим, что система ограничений имеет единственное решение. Когда алгоритм достижения локальной совместности сходится к этому решению? Как следует из вышесказанного, можно поставить эквивалентный вопрос: когда любой локально совместный с данной системой ограничений вектор имеет нулевую ширину?

Ввиду того, что общий ответ на этот вопрос дать довольно затруднительно, в настоящей работе ограничимся случаем систем линейных ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Мы хотим решить такую задачу:

Охарактеризовать класс матриц $\mathcal{LC} \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$ *такой, что для любой матрицы* $A \in \mathcal{LC}$ *система линейных уравнений* $Ax = b$ *имеет только точечные локально совместные векторы, т. е. ширина любого локально совместного интервального вектора равна нулю.*

Решение в первом приближении дает следующая лемма.

Лемма 1. *Система ограничений (1) с непустым множеством решений имеет локально совместный вектор ненулевой ширины тогда и только тогда, когда существует вещественный вектор* $u \in \mathbb{R}^n$, $u \geq 0$, $u \neq 0$, *такой, что*

$$|a_{ij}|u_j \leq \sum_{k=1,k\neq j}^{n} |a_{ik}|u_k, \quad i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{2}$$

Для доказательства этой леммы необходимо доказать ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 2. *Интервальный вектор* $\mathbf{x}$ *совместен с ограничением* $f(x) = 0$ *тогда и только тогда, когда для любого* $i = 1,\ldots,n$

$$\underline{\mathbf{x}}_i \geq \inf_{x\in\mathbf{x}} \{\, x_i \mid f(x) = 0\},$$
$$\overline{\mathbf{x}}_i \leq \sup_{x\in\mathbf{x}} \{\, x_i \mid f(x) = 0\}.$$

Следствие 1. *Интервальный вектор* $\mathbf{x}$ *совместен с ограничением*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$$

тогда и только тогда, когда для любого $i = 1,\ldots,n$

$$\underline{a_i\mathbf{x}_i} \geq b - \sum_{j\neq i} \overline{a_j\mathbf{x}_j}\,,$$

$$\overline{a_i\mathbf{x}_i} \leq b - \sum_{j\neq i} \underline{a_j\mathbf{x}_j}.$$

Вернемся теперь к доказательству леммы 1.

Пусть система (1) имеет локально совместный вектор $\mathbf{x}$ ненулевой ширины, т. е. согласно следствию 1

$$\underline{a_{ij}\mathbf{x}_j} \geq b_i - \sum_{k\neq j} \overline{a_{ik}\mathbf{x}_k}\,,$$

$$\overline{a_{ij}\mathbf{x}_j} \leq b_i - \sum_{k\neq j} \underline{a_{ik}\mathbf{x}_k}$$

для любых $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Тогда, положив $u = \overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}$ (понятно, что $u \geq 0$, $u \neq 0$) и замечая, что

$$\overline{a_{ij}\mathbf{x}_j} - \underline{a_{ij}\mathbf{x}_j} = |a_{ij}|u_j,$$

комбинируем последнюю систему неравенств и получаем (2).

Наоборот, положим, что (2) выполняется. Пусть x^* — произвольное решение системы (1). Тогда, определив $\mathbf{x} = [x^* - u, x^* + u]$ (понятно, что $\mathbf{x}$ имеет ненулевую ширину), получим

$$b_i - \sum_{k \neq j} \overline{a_{ik}\mathbf{x}_k} = b_i - \sum_{k \neq j} (a_{ik}x_k^* + |a_{ik}|u_k) = b_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k^* + a_{ij}x_j^* - \sum_{k \neq j} |a_{ik}|u_k =$$

$$= a_{ij}x_j^* - \sum_{k \neq j} |a_{ik}|u_k \leq a_{ij}x_j^* - |a_{ij}|u_j = \underline{a_{ij}\mathbf{x}_j}$$

для всех $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Аналогично доказывается двойственное неравенство. Опираясь на следствие 1, получаем, что интервальный вектор $\mathbf{x}$ ненулевой ширины локально совместен с системой (1).

Таким образом, лемма 1 доказана.

К сожалению, условие, описанное в лемме 1, не является эффективной характеристикой класса $\mathcal{LC}$. В работе [2] вводится понятие H-матриц. Ограниченное на случай точечных матриц, это определение (одно из ряда эквивалентных) звучит следующим образом. Квадратная матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется *H-матрицей*, если для любого $u \in \mathcal{R}^n$, $u \geq 0$, из

$$|a_{ii}|u_i \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|u_j, \quad i = 1, \dots, n \tag{3}$$

следует, что $u = 0$. Опираясь на это определение, мы можем сформулировать следующее предложение.

Предложение 1. *Если существует перестановка (возможно, тождественная) строк (столбцов) невырожденной матрицы $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, в результате которой получается H-матрица, то система линейных уравнений $Ax = b$ сходится к своему единственному решению в результате применения алгоритма достижения локальной совместности.*

Обратное, вообще говоря, неверно уже для размерности $n = 2$. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

не является H-матрицей, так как существует вектор $u = (1, 1/3)^T$, который нарушает условие 3. Для матрицы, получаемой из A перестановкой строк, таким вектором будет $u = (1, 1/2)^T$. В то же время нетрудно видеть, что для случая $m = n = 2$ условие леммы 1 имеет вид

$$|a_{11}|u_1 = |a_{12}|u_2,$$
$$|a_{21}|u_1 = |a_{22}|u_2$$

и выполняется только в случае $\det |A| = 0$. Таким образом, на матрице A алгоритм достижения локальной совместности сходится к решению.

В заключение заметим, что существуют эффективные способы проверки того, является ли данная матрица H-матрицей [2]. К сожалению, свойство, сформулированное в предложении 1, невозможно эффективно проверить (надо перебрать $n!$ вариантов перестановки строк (столбцов) исходной матрицы и для каждого из вариантов проверить принадлежность получившейся матрицы классу H-матриц).

Наши дальнейшие усилия будут направлены на нахождение эффективной характеристики класса $\mathcal{LC}$ и расширение этого понятия на матрицы с интервальными элементами.

Настоящая работа во многом есть результат плодотворной беседы автора с С. П. Шарым.

Список литературы

[1] Ushakov D. *Some Formal Aspects of Subdefinite Models.* Prepr. No. 49, A. P. Ershov In-te of Informat. Systems SB RAS, Novosibirsk, 1998.

[2] Neumaier A. *Interval Methods for Systems of Equations.* Cambridge University Press, 1990.

Поступила в редакцию 15 мая 1999 г.