МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Б. Р. Рысбайулы
Казахский государственный национальный университет им. Аль-Фараби, Алматы, Казахстан
e-mail: mexmat@mail.lorton.almaty.kz

The finite -difference method for the multi-dimensional equations of potential flows of a viscous compressible fluid with small Reynolds numbers.

1. Постановка задачи

В области $Q_T = (0,T) \times \Omega, \Omega \in R^3$ рассмотрим систему

$$\begin{aligned}&\mu\Delta\vec{v} + (\lambda+\mu)\nabla(\mathrm{div}\vec{v}) - \nabla p = 0,\ p = c^2\rho, \\ &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0.\end{aligned} \tag{1}$$

В работе [?] в предположении, что течение потенциально, из (1) получена задача

$$\frac{\partial\Delta u}{\partial t} + (\nabla u\cdot\nabla)\Delta u + (1+\Delta u)\Delta u = 0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0,\ u|_{t=0} = u_0(x),\ 1+\Delta u_0 \geq 0,\ \int\limits_{\Omega} u(x,t)dx = 0, \tag{3}$$

где u — потенциальная функция. Там же доказаны существование, единственность и стабилизация решений. В лагранжевых переменных устойчивость и сходимость разностных схем для одномерного случая вязкого газа хорошо изучена в [2]. Для одномерного случая системы (1) устойчивость и сходимость разностной схемы исследована в [3], а в работе [4] изучается устойчивость и сходимость метода Роте для задачи (2),(3).

2. Разностная схема

Для наглядности изложения в качестве области Ω рассмотрим двух- или трехмерный параллелепипед. Область Q_T разбивается на элементарные ячейки с шагами τ и h_i, такие, что $\tau \cdot k = T$, $h_i N_i = l_i$, $i = 1, 2, 3$. Здесь l_1, l_2, l_3 — длина соответствующих сторон параллелепипеда. Полученную после такого разбиения область обозначим через $Q_T^{\tau,h}$. В частности,

$$\omega_\tau = \{t = k\tau; k = 0, 1, ..., N\},$$

$$\Omega_h = \{x = ih_j; i = 0, 1, ..., N_j, j = 1, 2, 3.\},$$
$$x = \{x_1, x_2, x_3\}, h = \{h_1, h_2, h_3\}.$$

Область Ω на разбиваем на четыре части, такие, что

$$\Omega_1 = \left\{x, \frac{\partial u}{\partial x_1} \geq 0, \frac{\partial u}{\partial x_2} \geq 0\right\}, \qquad \Omega_2 = \left\{x, \frac{\partial u}{x_1} \geq 0, \frac{\partial u}{\partial x_2} < 0\right\},$$
$$\Omega_3 = \left\{x, \frac{\partial u}{\partial x_1} < 0, \frac{\partial u}{\partial x_2} \geq 0\right\}, \qquad \Omega_4 = \left\{x, \frac{\partial u}{x_1} < 0, \frac{\partial u}{\partial x_2} < 0\right\}. \tag{4}$$

Введем следующие разностные операторы:

$$y = u_{x_1\bar{x}_1} + u_{x_2\bar{x}_2},$$

$$A(u) = (\breve{u}_{x_1} y)_{\bar{x}_1}, \quad B(u) = (\breve{u}_{x_1} y)_{x_1}, \quad C(u) = (u_{x_2} y)_{\bar{x}_2},$$

$$D(u) = (u_{x_2} y)_{x_2}, \quad E(u) = y_{\bar{t}} + y. \tag{5}$$

Используемые здесь и далее обозначения взяты из [5] и [6]. Для составления разностных схем используются следующие константы:

$$\alpha_{ij} = \frac{\breve{u}_{\bar{x}_1} + \epsilon}{\sqrt{(\breve{u}_{\bar{x}_1})^2 + \epsilon}}, \quad \beta_{ij} = \frac{\breve{u}_{\bar{x}_2} + \epsilon}{\sqrt{(\breve{u}_{\bar{x}_2})^2 + \epsilon}},$$

$$\gamma_{ij} = \left[\frac{\alpha_i + 1 + \epsilon_1}{2}\right], \quad \eta_{ij} = \left[\frac{\beta_j + 1 + \epsilon_1}{2}\right], \quad (i, j) \in \Omega_h.$$

Легко проверить, что константы γ_{ij}, η_{ij} принимают одно из двух значений: 0 или 1. В области $Q^{h\tau}$ исследуется следующая разностная задача:

$$E(u) + [\gamma_{ij} A(u) + (1 - \gamma_{ij}) B(u)] 2^{\gamma_{i+1,j} - \gamma_{ij}} +$$

$$+ [\eta_{ij} C(u) + (1 - \eta_{ij+1}) D(u)] 2^{\eta_{ij+1} - \eta_{ij}} + \Theta(1 + \breve{y}) y, \tag{6}$$

где $\Theta = \{\gamma_{ij} = 0\} \bigcap \{\gamma_{i+1j} = 1\}$ или $\Theta = \{\eta_{ij} = 0\} \bigcap \{\eta_{ij+1} = 1\},$ (7)

$$u_{\bar{x}_1}|_{i=1} = u_{\bar{x}_1}|_{i=N_1, N_1+1} = u_{\bar{x}_2}|_{j=1} = u_{\bar{x}_2}|_{j=N_2, N_2+1} = 0, \tag{8}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x_1, x_2), \quad \sum_{\Omega_h} w^0 h_1 h_2 = 0, 1 + w^0 \geq 0, \quad \sum u_0 h_1 h_2 = 0. \tag{9}$$

При достаточно гладких решениях системы (2)–(3) разностная схема (6)–(9) имеет первый порядок аппроксимации. В работе доказывается корректность задачи (6)–(9). Для наглядности изложения рассмотрим случай, когда $\gamma_{ij} = 1$ при всех $(i, j) \in \Omega_h$,

$$\eta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = 1, \ldots, N_1 - 1;\ j = 1, \ldots, j_1; \\ 0 & \text{при} \quad i = 1, \ldots, N_1 - 1;\ j = j_1 + 1, \ldots, j_2; \\ 1 & \text{при} \quad i = 1, \ldots, N_1 - 1;\ j = j_2 + 1, \ldots, N_2 - 1. \end{cases}$$

Для этого случая из (6) выводим следующую схему:

$$y_{\bar t} + \breve u_{\bar x_1} y_{x_1} + \breve u_{\bar x_2} y_{\bar x_2} + (1 + \breve y) y = 0, \quad j = 1, .., j_1 - 1, \tag{10}$$

$$y_{\bar t} + \breve u_{\bar x_1} y_{\bar x_1} + 0.5 \breve u_{j+1 x_2} y_{x_2} + 0.5 \breve u_{\bar x_2} y_{\bar x_2} + [\breve u_{x_1 \bar x_1} + 0.5(\breve u_{x_2 \bar x_2} + \breve u_{x_2 x_2}) + 1] y = 0, \quad j = j_1, \tag{11}$$

$$y_{\bar t} + \breve u_{\bar x_1} y_{\bar x_1} + \breve u_{j+1 x_2} y_{x_2} + (1 + \breve y_{j+1}) y = 0, \quad j = j_1 + 1, \ldots, j_2 - 1, \tag{12}$$

$$y_{\bar t} + \breve u_{\bar x_1} y_{\bar x_1} + (1 + \breve y) y = 0, \quad j = j_2, \tag{13}$$

$$y_{\bar t} + \breve u_{\bar x_1} y_{\bar x_1} + \breve u_{\bar x_2} y_{\bar x_2} + (1 + \breve y) y = 0, \quad j = j_2 + 1, \ldots, N_2 - 1. \tag{14}$$

Система (10)–(14) с начально-граничными условиями (7)–(8) является объектом дальнейшего исследования.

3. Алгоритм решения задачи (8)–(14)

1. Из (10) при $i = 1$, $j = 1$ с учетом условия (8) вычисляется y_{11}.

2. При $i = 1$ из (10) определяются y_{i1}, $i = 1, \ldots, N_1 - 1$.

3. При $j = 1$ из (10) определяются y_{1j}, $j = 1, \ldots, j_1 - 1$.

4. Далее из (10) определяются все y_{ij}, $i = 2, \ldots, N_1 - 1$; $j = 1, \ldots, j_1 - 1$.

5. Из (13) определяются y_{ij_2}; $i = 1, \ldots, N_1 - 1$.

6. С использованием y_{ij_2} из (11) и (14) определяются остальные значения y_{ij}.

7. Затем решается задача

$$u_{x_1 \bar x_1} + u_{x_2 \bar x_2} = \bar y,$$

$$\bar y = y - \frac{1}{(l_1 - h)(l_2 - h)} \sum_{\Omega_h} y h_1 h_2$$

с граничными условиями (8). Всюду ниже предполагается, что $h_1 = h_2 = h$. Для исследования корректности задачи нам нужны априорные оценки.

4. Априорные оценки

Умножим уравнения (10)–(14) на $2n(\Delta u)^{2n-1}h_1h_2$ и просуммируем по всем узлам сетки Ω_h. Затем, складывая полученные выражения, применим формулу суммирования по частям [5, 6]. Тогда

$$\|\Delta u\|_{2n,\bar{t}}^{2n} + (2n-1)\sum_{\Omega_h}(1+\Delta u)(\Delta u)^{2n}h_1h_2 + \sum_{\Omega_h}(\Delta u)^{2n}h_1h_2 \le 0. \tag{15}$$

Из (10)–(14), применяя принцип максимума, получим

$$\max_{\Omega_h}|\Delta u| \le \max_{\Omega_h}|\Delta u_0|,$$

Пусть $\min \Delta u = \Delta u_{i_1j_1} < 0$. Рассматривая уравнения (10)–(14) в точке минимума Δu, имеем

$$(1+\Delta u)_{\min} \ge (1+\Delta\breve{u})_{\min} \ge ... \ge (1+\Delta u_0)_{\min}. \tag{16}$$

Из уравнения (10) выводим:

$$y_{x_1\bar{t}} + \breve{u}_{\bar{x}_1}y_{x_1\bar{x}_1} + \breve{u}_{x_1\bar{x}_1}y_{x_1} + \breve{u}_{\bar{x}_2}y_{x_1\bar{x}_2} + \breve{u}_{x_1\bar{x}_2}(y_{\bar{x}_2})_{i+1} + (1+\Delta\breve{u})y_{x_1} + \breve{y}_{\bar{x}_1}y_{i+1} = 0, \tag{17}$$

$$y_{x_2\bar{t}} + \breve{u}_{\bar{x}_1}y_{x_2\bar{x}_1} + u_{x_2\bar{x}_1}(y_{\bar{x}_1})_{j+1} + \breve{u}_{\bar{x}_2}y_{x_2\bar{x}_2} + u_{x_2\bar{x}_2}y_{x_2} + (1+\Delta\breve{u})y_{x_2} + \breve{y}_{\bar{x}_2}y_{j+1} = 0. \tag{18}$$

Аналогичные уравнения можно выписать для (11)–(14). Умножим (17) на $4(y_{x_1})^3h_1h_2$, а (18) на $4(y_{x_2})^3h_1h_2$ и просуммируем по всем узлам сетки Ω_1. Аналогично умножая уравнения типа (17) и (18) для уравнений (11)–(14) на соответствующие величины, суммируем по $(i,j)\in\Omega_h$. Затем, предварительно применив формулу суммирования по частям, складываем полученные неравенства с учетом условий (7). После этого, применяя неравенство Гельдера, получим

$$z_{\bar{t}} \le \max_{\Omega_h}|\breve{u}_{\bar{x}_i\bar{x}_j}|z + M\breve{z}^{1/4}z^{3/4}, \tag{19}$$

где

$$z = \|\Delta u_{\bar{x}_1}\|_{4,\Omega}^4 + \|\Delta u_{\bar{x}_2}\|_{4,\Omega}^4.$$

Лемма. *Пусть*

$$|\Delta u| = |u_{x_1\bar{x}_1} + u_{x_2\bar{x}_2} + u_{x_3\bar{x}_3}| \le M,\ \ u_{\bar{x}_i}|_\Gamma = 0.$$

Тогда справедливо неравенство

$$|D^2u| = |\breve{u}_{\bar{x}_i\bar{x}_j}| \le C_1Mln(C_2 + C_3M^{-1}\|\nabla\Delta u\|_{L_{2p}(\Omega_h)}) + 2M,$$

где

$$\|\nabla\Delta u\|_{L_{2p}(\Omega_h)} = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{\Omega_h}(\Delta u_{\bar{x}_i})^{2p}h_1h_2h_3\right)^{1/2p}, \quad p\ge 2.$$

Данная лемма доказывается с помощью вспомогательной леммы из работы [7] и восполнением сеточной функции Δu по Ω. Теперь, пользуясь леммой и ϵ-неравенством Коши, из (19) выводим

$$z_{\bar{t}} \le C_1M\ln(C_2 + C_3M^{-1}\|\nabla\Delta\breve{u}\|_{L_4(\Omega_h)})z + 9z/4 + \breve{z}/4.$$

Отсюда, рассуждая аналогично [4], имеем

$$\|\nabla\Delta u\|_{L_4(\Omega_h)} \le M\exp(C_4)/C_3,$$

при этом на τ ставится ограничение

$$\tau \le (1-a)\left\{C_1 M\left[\exp(C_5 t)\ln(C_2 + C_3 M^{-1} z^0) + \right.\right.$$

$$\left.\left.+C_6(\exp(C_5 t)-1)/(\exp(C_5\tau)-1) + 9M/4\right]\right\}^{-1}, \quad 0 < a < 1. \tag{20}$$

Замечание 1. Если $M \to 0$ при $t \to \infty$, то как в работе [4] доказывается, что $C_5 t \to 0, C_4 \to 0$ т. е. ограничение на τ (20) теряет силу.

Тем самым доказана

Теорема 1. *Если $\Delta u_0 \in L_\infty(\Omega_h)$, $\nabla\Delta u_0 \in L_4(\Omega_h)$, то для решения задачи (8)–(14) имеют место оценки*

$$1 + \Delta u \ge 0, |\Delta u| \le M, \|\nabla\Delta u\|_{L_4(\Omega_h)} \le C_7 < \infty.$$

5. Корректность задачи (8)–(14).

На основе теоремы 1 доказывается следующая

Теорема 2. *1). Если $\Delta u_0 \in L_\infty(\Omega_h)$, $\nabla\Delta u_0 \in L_4(\Omega_h)$, то схема (8)–(14) устойчива по u_0.*

2). Если $\Delta u_0 \in L_\infty(\Omega_h)$, то схема (8)–(14) имеет единственное решение.

3). Решение задачи (1)–(2) есть предел функций $\{\tilde{u}^{h,\tau}\}$, вычисляемых из соотношений (8)–(14).

4). Если $1 + \Delta u_0 \ge m > 0$, то решение задачи (8)–(14) стабилизируется при $t \to \infty$, т. е. $\Delta u \to 0$ при $t \to \infty$.

Доказательство. Утверждение 2) теоремы 2 следует из алгоритма решения задачи (8)–(14).

Для доказательства утверждения 1) положим $w = y - \tilde{y}$, где $\tilde{y}$ — решение возмущенной задачи системы (8)–(14). Тогда для w из (10) получится уравнение

$$w_{\bar{t}} + \check{u}_{\bar{x}_1} w_{\bar{x}_1} + \check{u}_{\bar{x}_2} w_{\bar{x}_2} + (\check{u}_{\bar{x}_1} - \tilde{u}_{\bar{x}_1})\tilde{y}_{\bar{x}_1} + (\check{u}_{\bar{x}_2} - \tilde{u}_{\bar{x}_2})\tilde{y}_{\bar{x}_2} + (1 + \check{y})w + \tilde{w}\tilde{y} = 0. \tag{21}$$

Аналогичные уравнения составляются для системы (11)–(14). Умножим (21) и аналогичные уравнения типа (21) на $2wh$ и просуммируем по всем узлам сетки Ω_h. Затем применяем формулу суммирования по частям и, учитывая теорему 1, применим разностный аналог леммы Гронуолла. Тогда получится оценка

$$\|w\|^2 \le C_7 \|w^0\|^2,$$

что указывает на устойчивость схемы (8)–(14).

Перейдем к доказательству утверждения 3).

Определение 1. *Обобщенным решением задачи (2)–(3) назовем функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\int\limits_{Q_T} \Delta u \eta_t dx d\tau + \int\limits_{Q_T} (1 + \Delta u)\nabla u \nabla\eta dx d\eta = \int\limits_{\Omega} \Delta u \eta(1) dx, \tag{22}$$

где η — бесконечно дифференцируемая функция, такая, что $\eta|_{t=T} = \eta|_{t=T+\tau} = 0$.

Введем кусочно-постоянные интерполяции по t и x для Δu и всех остальных функций [6]. Пусть $\eta(x,t) \in C^1(Q_{T+\tau})$ и $\dfrac{\partial\eta}{\partial x}$ равно нулю на границе S_T и при $t \in [T, T+\tau]$. Построим по ней функции $\eta(k) = \eta(x,k)$, $\tilde{\eta}^{\tau h}(x,t)$, $(\nabla\tilde{\eta})^{\tau h}$, $(\tilde{\eta}_t)^{\tau h}$. Функции $\tilde{\eta}^{\tau h}$, $\dfrac{\partial\tilde{\eta}^{\tau h}}{\partial x_i}$, $(\tilde{\eta}_t)^{\tau h}$ равномерно сходятся в Q_T к η, $\dfrac{\partial\eta}{\partial x_i}$ и $\dfrac{\partial\eta}{\partial t}$ соответственно. Умножим (10)–(14) на $\eta\tau h^2$ и просуммируем по i, j, k. Тогда

$$\sum_{Q^{h\tau}} \Delta u \eta_{\bar{t}} \tau h^2 + \sum_{Q^{h\tau}} \breve{u}_{\bar{x}_1} \Delta u \eta_{x_1} \tau h^2 + \sum_{Q^{h\tau}} \breve{u}_{x_2} \Delta u \eta_{\bar{x}_2} \tau h^2 +$$

$$+ \sum_{Q^{h\tau}} u_{\bar{x}_1} \eta_{\bar{x}_1} \tau h^2 + \sum_{Q^{h\tau}} u_{\bar{x}_2} \eta_{\bar{x}_2} \tau h^2 = \sum_{\Omega_h} \Delta u \eta(1) \tau h^2.$$

Записывая данное равенство в интегральном виде и переходя к пределу при $\tau, h \to 0$, получим (22). В частности, мы доказали разрешимость задачи (2)–(3) в обобщенном смысле (22).

Докажем, наконец, утверждение 4). Если $(1 + \Delta u_0) \geq m > 0$, то из (16) следует неравенство $1 + \Delta u \geq m > 0$. Поэтому из (15) имеем

$$\|\Delta u\|^{2n}_{2n,\bar{t}} + (2n-1)m\|\Delta u\|^{2n}_{2n} + \|\Delta u\|^{2n}_{2n} \leq 0.$$

После некоторых преобразований получим

$$M = \max_i |\Delta u| \leq e^{-t\ln 2} \max |\Delta u_0|,$$

т. е. $M \to 0$ при $t \to \infty$.

Замечание 2. Аналогично исследуется схема (6)–(9) для трехмерного случая.

В заключение автор выражает благодарность проф. Смагулову Ш. С. за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

[1] Кажихов А. В. Уравнение потенциальных течений сжимаемой вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса: существование, единственность и стабилизация решений. *Сиб. матем. журн.*, **34**, №3, 1993, 70–80.

[2] Смагулов Ш. С. *Математические вопросы приближенных методов для уравнений Навье—Стокса*: Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Алма-Ата, 1987.

[3] Рысбаев Б. Р. Метод конечных разностей для одномерных течений сжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса. *Докл. АН РК.* В печати

[4] Рысбайулы Б. Метод Роте для уравнений потенциальных течений сжимаемой вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса. В печати.

[5] Самарский А. А. *Теория разностных схем.* Наука, М., 1977.

[6] Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* Наука, М., 1973.

[7] Юдович В. И. *Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости.* Изд-во Рост. ун-та, Ростов-на-Дону, 1984.

Поступила в редакцию 3 марта 1998 г.