Вычислительные технологии **Том 3, № 2, 1998**

МЕТОД ГЕНЕРАЦИИ СТОЛБЦОВ В ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ВЗАИМОЗАВИСИМЫМИ ИНТЕРВАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. П. Мартынов
Уфимский государственный авиационный технический университет
Россия
e-mail: ramazanov@imat.rb.ru

The linear programming problems class with interdependent interval coefficients placed both in separate columns and in various colunms is considered. Columns generation method substantiation for solving and a practical application review is given.

Рассматривается класс задач линейного программирования с взаимозависимыми переменными коэффициентами

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_{\bullet j}^{\top} a_{\bullet j} x_j \tag{1}$$

при основных условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\bullet j} x_j \leqslant b, \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

и ограничениях на переменные коэффициенты

$$\underline{a}_{ij} \leqslant a_{ij} \leqslant \overline{a}_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

$$T^{(j)} a_{\bullet j} \leqslant L^{(j)}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} S^{(j)} a_{\bullet j} = r, \tag{6}$$

где $[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ — интервал изменения переменного коэффициента a_{ij}, (если $\underline{a}_{ij} = \overline{a}_{ij}$, то коэффициент a_{ij} — постоянный), $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$; b, $c_{\bullet j}$, $a_{\bullet j}$ — m-мерные векторы, $j = 1, \ldots, n$; $T^{(j)}$ — матрица размерности $(m_j \times m)$, $j = 1, \ldots, n$; $L^{(j)}$ — вектор размерности m_j, $j = 1, \ldots, n$; $S^{(j)}$ — матрица размерности $m_0 \times m$, $j = 1, \ldots, n$; r — вектор размерности m_0.

В условии (5) задаются системные ограничения на переменные коэффициенты отдельных столбцов. В условие (6) включаются системные ограничения на переменные коэффициенты, расположенные в различных столбцах. Ограничения (4) в общем случае могут входить в состав ограничений (5).

В задаче (1) – (6) искомыми величинами являются x_j и a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. (Как было отмечено, некоторые коэффициенты a_{ij} могут быть постоянными, то есть известными.)

В случае отсутствия ограничения вида (6) генерирование текущего варианта j-го переменного столбца производится решением вспомогательной задачи линейного программирования ($1 \leqslant j \leqslant n$)

$$\min \sum_{i=1}^{m} (u_i a_{ij} - c_{ij} a_{ij}) \tag{7}$$

при условиях (4) – (5).

Целевая функция (7) выражает текущую оценку j-го столбца. Традиционно для ввода в базис в симплексном методе выбирается столбец с минимальной оценкой. Поэтому текущие варианты переменных столбцов, полученные решением задачи (7), будут удовлетворять этому основному принципу симплексного метода. Теоретические основы такого подхода рассмотрены в [1] и [2], в которых дополнительно предполагается, что целевая функция не зависит от переменных коэффициентов.

В работах [3–5] изложены первые результаты теоретических и практических исследований автора в моделировании нефтеперерабатывающего производства. Во-первых, поскольку решения задачи (7) определяют угловые точки области допустимых значений переменных столбцов и внутренние точки в случае их оптимальности могут быть выражены через линейные комбинации базисных угловых точек, разработаны правила представления (усреднения) переменного столбца одним вариантом

$$a_{\bullet j} = \sum_{k=1}^{k_j} \lambda_{jk} a_{\bullet k}^{(j)}, \tag{8}$$

где

$$\lambda_{jk} = x_{jk} / \sum_{k=1}^{k_j} x_{jk}, \quad \text{если} \quad \sum_{k=1}^{k_j} x_{jk} \neq 0,$$

$$\lambda_{jk} = 1/k_j, \quad \text{если} \quad \sum_{k=1}^{k_j} x_{jk} = 0.$$

Во-вторых, разработаны и исследованы, с вычислительной точки зрения, различные схемы генерирования текущих вариантов переменных столбцов. В первой схеме на каждой итерации симплексного метода для задачи (7) генерируется вариант каждого переменного столбца и среди них выбирается один столбец в качестве главного. Во второй схеме на определенных этапах решения задачи (1) – (5) производится генерация вариантов переменных столбцов, и при помощи этих вариантов происходит оптимизация целевой функции (1). В обоих случаях процесс продолжается до получения общего признака оптимальности решения задачи (1) – (5). В-третьих, разработаны различные модификации мультипликативного алгоритма симплексного метода, связанные с учетом вычислительной погрешности и блочной структуры основных условий (2), а также вспомогательной задачи (7). Полное описание алгоритмического и программного обеспечений автоматизированного формирования условий задачи (1) – (5) и деловой документации на основе оптимального решения задачи (1) – (5) содержится в [6].

В работах [7–11] постановка задачи (1) – (6) рассматривается полностью. Разработаны вычислительные схемы генерации текущих вариантов переменных столбцов в случае наличия ограничения (6). То есть задача (7) решается при условиях (4) – (6). На каждом этапе генерации определяются взаимосвязанные варианты переменных столбцов. Однако в оптимальном базисе могут оказаться варианты переменных столбцов, которые после их усреднения по условию (8) могут не удовлетворять условиям (4) – (6). В связи с этим нами разработан метод двухэтапной линеаризации задачи (1) – (6), в котором интенсивности использования взаимосвязанных вариантов различных переменных столбцов должны удовлетворять дополнительным условиям вида

$$x_{1k} - d_j x_{jk} = 0, \quad d_j \in [\underline{d}_j, \overline{d}_j], \quad j = 2, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, k_j, \tag{9}$$

где d_j — переменный коэффициент, для которого известны лишь границы его изменений $\underline{d}_j$ и $\overline{d}_j$.

Ограничения (9) присоединяются к условию (2). Отсюда следует, что в процессе использования взаимосвязанных вариантов переменных столбцов задача (1) – (6) превращается в задачу вида (1) – (5), которая решается с применением метода генерации столбцов. Если в процессе решения задачи (1) – (6) некоторые базисные взаимосвязанные варианты переменных столбцов становятся небазисными, то соответствующие ограничения вида (9) можно исключать из состава условий (2). Полное математическое обоснование такого подхода приведено в работе [11]. Постановка задачи (1) – (6) может быть использована в следующих направлениях.

1. Оптимизация коррекции несобственных задач линейного программирования в оптимальном управлении производством, рассматриваемых в работе [12]. Могут быть различные варианты корректировок таких задач: поиск более экономичных значений нормативных коэффициентов, дополнительное вовлечение компонентов ресурсов или сдвиги в ассортименте конечной продукции. В зависимости от выбранных вариантов корректировки несовместной задачи линейного программирования определяются управляемые параметры, для которых формируются ограничения типа (1) – (6). При этом очень важно использование структурных соотношений условий взаимозависимости и взаимозаменяемости компонентов сырья, конечной продукции и в нормативном составе. Для исследования взаимозависимых приращений компонент вектора правой части постановка задачи (1) – (6) записывается в виде

$$\max \sum_{j=1}^{n+1} c_{\bullet j}^{\top} a_{\bullet j} x_j, \tag{10}$$

при основных условиях

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{\bullet j} x_j \leqslant b, \tag{11}$$

$$x_{n+1} = 1, \tag{12}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n \tag{13}$$

и ограничениях на переменные коэффициенты

$$\underline{a}_{ij} \leqslant a_{ij} \leqslant \overline{a}_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n+1, \tag{14}$$

$$T^{(j)} a_{\bullet j} \leqslant L^{(j)}, \quad j = 1, \ldots, n+1, \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} S^{(j)} a_{\bullet j} = r, \tag{16}$$

где в отличие от постановки задачи (1) – (6) $a_{\bullet n+1} = -\delta b$, δb — вектор приращений правой части условия (11).

Введение $n+1$-го столбца позволяет формировать ограничения взаимозависимых приращений компонент вектора правой части по тем же правилам, что и для других столбцов левой части, то есть при помощи ограничений (14) – (16)

В результате решением задачи (10) – (16) определяются оптимальные значения параметров управления, при которых исходная несовместная задача линейного программирования становится совместной. Может возникнуть ситуация, когда принятый вариант корректировки, то есть система интервальных представлений параметров управления в соответствии с условиями (14) – (16), не обеспечивает совместность. В таких случаях нужно рассматривать другие варианты корректировок.

2. Решение задачи линейного программирования в условиях неопределенности с использованием методики формирования зоны неопределенности [13–14]. Постановка задачи (10) – (16) позволяет наиболее полно решать вопросы на всех этапах формирования и исследования зоны неопределенности. Во-первых, вместо дискретного множества сочетаний условий применяются непрерывные модели возможных изменений столбцов со случайными коэффициентами. Во-вторых, точно определяются границы области неопределенности с использованием двух режимов генерирования вариантов столбцов с взаимозависимыми интервальными коэффициентами. В первом случае они генерируются при помощи задачи (7) при условиях (14) – (16) и используются лучшие варианты переменных столбцов. Во втором случае варианты переменных столбцов генерируются при помощи задачи

$$\max \sum_{i=1}^{m} (u_i a_{ij} - c_{ij} a_{ij}) \tag{17}$$

при условиях (14) – (16), $j = 1, \ldots, n+1$. Указанные режимы генерирования вариантов переменных столбцов представляют позиции крайнего оптимизма и крайнего пессимизма. И, в-третьих, открываются широкие возможности системного анализа зоны неопределенности и выбора решений. Формирование условий (14) – (16) для параметров управления производится на основе использования экспертных оценок, методов статистики и теории вероятности. Следует заметить, что при таком подходе к исследованию зоны неопределенности кроме двусторонней оценки значения целевой функции определяются группы основных переменных задачи линейного программирования, имеющие различную степень устойчивости. Например, в задаче оптимизации работы Ново-Уфимского НПЗ в рамках постановки (10) – (16), где ограничения (11) имели размерность (2000×6000) (с учетом разбивки годового задания на квартальные), применение указанного метода исследования зоны неопределенности показало, что около 40 % основных переменных не зависят от изменения условий, то есть имеют степень устойчивости, равную 1.

3. Моделирование распределительных задач с интервальными нормативными параметрами. Например, в работе [15] автором разработана системная модель распределения капитальных вложений и инвестиционных потоков с переменными нормативными коэффициентами для развития социально-экономической сферы региона.

4. Задачи оптимального управления сельскохозяйственным производством районов и регионов. В качестве взаимозависимых интервальных коэффициентов принимались нормативы расхода компонентов кормов на единицу вида скота в животноводстве. Системные ограничения на интервальные коэффициенты формируются в рамках задачи (1) – (6). Результаты практического применения задачи (1) – (6) в управлении сельскохозяйственным производством четырех районов Башкортостана и Самарской области совместно со специалистами института Волгогипрозем приведены в работе [16].

В заключение следует заметить, что вычислительная эффективность применения методов генерации текущих вариантов переменных столбцов задачи (1) – (6) достигается за счет минимизации размерности основных условий (2) – (3) и обеспечения необходимой гибкости модели при помощи ограничений на интервальные коэффициенты вида (4) – (6). Использование в целевой функции переменных коэффициентов позволяет учитывать ценности, связанные с выбором способов организации модели и их интенсивностей при практическом применении в современных условиях.

В настоящее время в Центре информационных технологий и АСУ АО Ново-Уфимский НПЗ разрабатывается автоматизированная подсистема управления основным производством, в которой, как и в [6], задача (1) – (6) формируется автоматически на основе описания способов производства (технологических установок) с взаимозависимыми интервальными параметрами управления. Решение задачи (1) – (6) и исследование ее устойчивости ориентированы на использование мультипликативного алгоритма симплекс-метода с генерацией текущих вариантов столбцов с взаимозависимыми интервальными коэффициентами.

Список литературы

[1] Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. *Новые направления в ЛП.* Сов. радио, М., 1996.

[2] Канторович Л. В., Романовский И. В. Генерирование столбцов в симплекс-методе. В *“Экономика и матем. методы”*, **21**, вып. 1, ЦЭМИ АН СССР, М., 1985, 128–138.

[3] Мартынов А. П., Афанасьев А. С. Оптимизация производственной программы при переменных коэффициентах выпуска и затрат на НПЗ. В *“Моделирование производственных процессов”*, Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1977, 60–76.

[4] Мартынов А. П., Резванов Р. Г. Программа УНИ-25 мультипликативного алгоритма симплекс-метода для ЭВМ М-222. В *“Оптимизационные экономико-математические задачи”*, Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1978, 111–133.

[5] Мартынов А. П. Вычислительные схемы линейного программирования с переменными коэффициентами и их применения: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, ЛГУ, Л., 1983.

[6] *Пакет прикладных программ для планирования производства отрасли.* Науч. рук. Мартынов А. П., М., ОФАП ГИВЦ Миннефтехимпрома СССР, 1985.

[7] Мартынов А. П. Методы линейного программирования с переменными столбцами в задачах принятия решений. В *“Принятие решений в условиях неопределенности”*, УАИ, Уфа, 1990, 58–65.

[8] А. П. Мартынов Задачи ЛППК в методах коррекции противоречивых моделей оптимального планирования. В *“Математическое программирование и приложения”*: Мат. науч конф. Изд. ИММ УрО РАН, Свердловск, 1991, 103–104.

[9] Мартынов А. П., Мартынова Е. А. Анализ погрешности при обработке химических измерений методами линейного программирования. *Баш. хим. журн.*, **1**, вып. 4, 1994, 44–53.

[10] Мартынов А. П. Об одном методе разложения задачи линейного программирования с взаимозависимыми переменными коэффициентами. В *“Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. VI. Применения численных методов. Геометрические задачи”*, ИМВЦ УНЦ РАН, Уфа, 1996, 91–96.

[11] Мартынов А. П., Салимоненко Е. А., Салимоненко Д. А. Пути совершенствования в моделировании производственных процессов нефтепереработки. В *“Баш. хим. журн.”*, **4**, вып. 1, 1997, 72–77.

[12] Еремин И. И. *Противоречивые модели оптимального планирования.* Наука, М., 1988.

[13] Макаров А. А., Мелентьев Л. А. *Методы исследования и оптимизации энергетического хозяйства.* Наука, Новосибирск, 1973.

[14] Калика В. И., Мартынов А. П. Об учете неопределенности исходной информации в задачах оптимального планирования. В *“Матем. методы в эконом. исследованиях”*, БашФАН СССР, Уфа, 1975, 5–56.

[15] Мартынов А. П., Салимоненко Е. А., Салимоненко Д. А. Системная модель оптимизации в развитии социальной инфраструктуры региона в современных условиях. В *“Стратегия предпринимательства”*, Восточный ун-т, Уфа, 1997, 10–20.

[16] Мартынов А. П., Ивонина Г. Д., Стафийчук И. Д. Оптимизация сельскохозяйственного производства с помощью математических методов при обосновании проектов землеустройства в границах административных районов Башкирской АССР. *Передовой опыт в землеустройстве: Экспресс-информация*, №12, МСХ СССР, М., 1979, 21–23.

Поступила в редакцию 25 сентября 1997 г.