

# ЭНТРОПИЙНЫЕ И КВАЗИЭНТРОПИЙНЫЕ СВОЙСТВА СХЕМ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ АППРОКСИМАЦИИ\*

В. И. ПИНЧУКОВ

*Институт вычислительных технологий СО РАН*

*Новосибирск, Россия*

e-mail: pinchvi@net.ict.nsc.ru

Artificial dissipative terms of adaptive type are constructed for difference schemes of high order of approximations. Artificial dissipation must be little on smooth decisions and must grow near discontinuities, and to provide appearance of negative sources of difference energy similar as viscous terms of Navier – Stokes equations provide appearance of entropy sources. Two difference schemes of second and sixth order are considered for compressible flow equations. It is shown that usage of constructed dissipative terms allows to achieve good scheme's convergence in time.

Схемы высоких порядков аппроксимации вызывают стабильный интерес у специалистов-аэродинамиков и в настоящее время бурно развиваются. Однако пока для решения практических задач они применяются в недостаточной мере. Это связано с тем, что при использовании таких схем, помимо усложнения алгоритма, возникает ряд проблем, без решения которых реального повышения точности при повышении порядка аппроксимации может и не быть или проведение расчета будет связано с большими трудностями. По мере развития теории схемы высоких порядков становятся все более популярными.

Как показывает практика математического моделирования, для улучшения точности численных решений, кроме формального повышения порядка аппроксимации разностных методов, эффективным средством является использование схем с дискретными аналогами свойств исходных дифференциальных уравнений. В их числе можно назвать свойства сохранения (консервативность и полная консервативность, закон сохранения Бернулли, изэнтропичность), геометрические свойства (сохранение монотонности решения или неубывание полной вариации в одномерных скалярных уравнениях, выполнение принципа максимума в некоторых пространственных задачах), энтропийные неравенства, асимптотические свойства и свойства инвариантности.

Проблема построения схем с заданными дополнительными свойствами была сформулирована еще в 60-е годы в работах Ю. И. Шокина, Н. Н. Яненко. Были разработаны [1]

---

\*Работа выполнена при частичной поддержке Американского фонда гражданских исследований и развития для независимых государств, образованных на территории бывшего Советского Союза (CRDF) (грант RM1-212), а также Российского фонда фундаментальных исследований (грант №97-01-00711). © В. И. Пинчуков, 1997.

разностные схемы, первое дифференциальное приближение которых является инвариантным по отношению к тем же преобразованиям, что и исходная система уравнений динамики невязкого сжимаемого газа. Аналогичным образом можно добиваться выполнения и других свойств исходных уравнений. Данный подход допускает использование методов из теории дифференциальных уравнений, что относится к его достоинствам.

Геометрические качества разностных схем — сохранение монотонности решений, невозрастание полной вариации в одномерных задачах и выполнение принципа максимума в разных формулировках для многомерных задач [2] — определили успех в решении многих задач. Эти свойства необходимы прежде всего при интегрировании разрывных решений, где они предотвращают появление осцилляционных эффектов. Они также позволяют повысить качество расчета гладких решений с разномасштабными структурами, если используются разностные сетки с небольшим количеством узлов.

Одно из этих свойств — невозрастание полной вариации — привлекательно с теоретической точки зрения тем, что при выполнении некоторых дополнительных условий (аппроксимационное условие для потоков и энтропийное условие) оно гарантирует сходимость разностных схем и, таким образом, может замещать в теоретическом анализе устойчивость схем. Геометрические качества важны также в том плане, что они выполняются для решений любой гладкости, кроме того, они имеют место как для линейных, так и для нелинейных уравнений. Поэтому их учет позволяет улучшить качество численных схем для сложных нелинейных уравнений и обеспечить успех численного моделирования прикладных задач. Для нелинейных схем весьма важны и энтропийные условия, которые позволяют в задачах с разрывными решениями из двух удовлетворяющих уравнениям ветвей (с волной разрежения и ударной волной) выбрать реализующееся в реальности решение — с ударной волной, а также могут играть роль априорных оценок. Для последней цели целесообразно использовать во многом им аналогичные, но более простые при реализации квазиэнтропийные условия.

Далее везде будем использовать обозначения  $f_{ik}^n = f(n\tau, i\Delta x, k\Delta y)$ ,  $\delta_x^\pm f_{ik}^n = \pm f_{i\pm 1k}^n \mp f_{ik}^n$ ,  $\delta_y^\pm f_{ik}^n = \pm f_{ik\pm 1}^n \mp f_{ik}^n$ ,  $\Delta_x^\pm = \delta_x^\pm / \Delta x$ ,  $\Delta_y^\pm = \delta_y^\pm / \Delta y$ . В одномерных задачах размер пространственного интервала будем обозначать  $h$ .

## 1. Энтропийные и квазиэнтропийные условия

Весьма важным свойством нелинейных уравнений математической физики являются энтропийные условия, которые выполняются для основных математических моделей, описывающих движения сжимаемых сред. Проиллюстрируем их на примере простейших уравнений. Рассмотрим два уравнения

$$f_t = \mu f_{xx} \quad (a),$$

$$f_t = (\mu f_x)_x \quad (b).$$

Умножив уравнение (a) на  $f$ , интегрируя по  $x$  от  $-\infty$  до  $\infty$  и полагая выполненным условие  $f_x \rightarrow 0$ ,  $f \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ , получаем в результате интегрирования по частям

$$\partial E / \partial t = \partial / \partial t \int_{-\infty}^{\infty} f^2 / 2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} f \mu f_{xx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (-\mu f_x^2 - \mu_x f_x f) dx.$$

Таким образом, если  $\mu_x = 0$ , мы получаем  $\partial E / \partial t \leq 0$  и, следовательно,  $E(t) \leq E(0)$ . В противном случае, вообще говоря, это соотношение не имеет места. В то же время для

уравнения (b) имеем

$$\partial E/\partial t = \partial/\partial t \int_{-\infty}^{\infty} f^2/2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} [(f\mu f_x)_x - \mu f_x^2] dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \mu f_x^2 dx \leq 0$$

при любом  $\mu \geq 0$ . Рассмотрим дифференциально-разностную схему для уравнения (b), полученную в результате дискретизации по пространственной переменной:

$$\partial f_i/\partial t + \Delta^- F_{i+1/2} = 0, \quad F_{i+1/2} \approx \partial f/\partial x |_{i+1/2}, \quad -\infty \leq i \leq \infty.$$

Для “разностной энергии”  $\sum_{-\infty}^{\infty} f_i^2/2$  схемы имеет место соотношение (естественно, в предположении, что  $F_{i+1/2} = 0$  при  $|i| > I$ )

$$\begin{aligned} \partial E/\partial t &= \partial/\partial t \sum_{-\infty}^{\infty} f_i^2/2 = - \sum_{-\infty}^{\infty} f_i(F_{i+1/2} - F_{i-1/2})/h = - \sum_{-\infty}^{\infty} f_i F_{i+1/2}/h + \\ &+ \sum_{-\infty}^{\infty} f_i F_{i-1/2}/h = - \sum_{-\infty}^{\infty} f_i F_{i+1/2}/h + \sum_{-\infty}^{\infty} f_{i+1} F_{i+1/2}/h = \sum_{-\infty}^{\infty} F_{i+1/2} \Delta^+ f_i. \end{aligned}$$

В частности, для простейшей аппроксимации второго порядка  $F_{i+1/2} = -\mu_{i+1/2} \Delta^+ f_i$  имеем дискретный аналог интегрального соотношения

$$\partial E/\partial t = \partial/\partial t \sum_{-\infty}^{\infty} f_i^2/2 = \sum_{-\infty}^{\infty} F_{i+1/2} \Delta^+ f_i = - \sum_{-\infty}^{\infty} \mu_{i+1/2} (\Delta^+ f_i)^2 \leq 0.$$

Для более сложных аппроксимаций автоматически это свойство не выполняется и следует принимать меры к его обеспечению.

Проведем аналогичное рассмотрение для уравнения Бюргерса

$$f_t + f f_x = (\mu f_x)_x.$$

Как и ранее, умножив это уравнение на  $f$ , проинтегрировав по  $x$  от  $a$  до  $b$ , получим в результате интегрирования по частям

$$\partial/\partial t \int_a^b (f^2/2) dx = \int_a^b f[(\mu f_x)_x - f f_x] dx = (f\mu f_x - f^3/3) |_a^b - \int_a^b \mu f_x^2 dx.$$

Таким образом, учитывая, что  $\mu \geq 0$ , получаем

$$\partial E/\partial t - (f\mu f_x - f^3/3) |_a^b \leq 0$$

при любом  $\mu \geq 0$ . Итак, если рассмотреть последовательность функций  $\mu(x, t)$ , такую, что в любой точке  $(x, t)$   $\mu(x, t) \rightarrow 0$ , получим энтропийное условие для нелинейного уравнения переноса

$$\partial E/\partial t + f^3/3 |_a^b \leq 0.$$

Следует отметить, для случая  $\mu = 0$  мы можем получить бесконечное количество подобных интегральных условий, умножая исходное уравнение Бюргерса на множители  $f^k$ ,

$k = 1, 2, \dots$  Для отбора физически реализуемых решений следует определить вид энтропийного условия, т. е. определить функции  $S(f)$  и  $U(f)$ , такие, что

$$\partial E / \partial t + U(f) \Big|_a^b \leq 0, \quad E = \int_a^b S(f) dx.$$

Выше был рассмотрен случай  $S(f) = f^2/2$ ,  $U(f) = f^3/3$ , который определялся диффузионным слагаемым. Естественно, меняя диффузионное слагаемое, получим другие функции  $S(f)$ ,  $U(f)$ . Аналогично, если мы имеем дифференциально-разностную схему для уравнения переноса

$$\partial f_i / \partial t + \Delta^- F_{i+1/2} = 0, \quad -\infty \leq i \leq \infty, \quad (1)$$

то для корректного моделирования разрывных решений (в частности, чтобы гарантировать отсутствие волн разрежения) должно выполняться энтропийное условие

$$\partial S_i^* / \partial t + \Delta^- U_{i+1/2}^* \leq 0, \quad -\infty \leq i \leq \infty, \quad (2)$$

где  $S_i^* = S^*(f_{i-l}, \dots, f_{i+l})$ ,  $U_{i+1/2}^* = U^*(f_{i-l+1}, \dots, f_{i+l})$ , причем  $S^*(f, \dots, f) = S(f)$ ,  $U^*(f, \dots, f) = U(f)$ .

Для уравнений сжимаемого газа есть аналогичное свойство, отражающее базовые принципы физики. Рассмотрим одномерную систему уравнений газовой динамики:

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ [\rho u^2/2 + P/(\gamma - 1)]_t + [\rho u^3/2 + \gamma u P/(\gamma - 1)]_x &= [(4/3)\mu u u_x + \lambda(P/\rho)_x]_x, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P)_x &= ((4/3)\mu u_x)_x. \end{aligned} \quad (3)$$

Умножая первое уравнение на  $u^2(\gamma - 1)\rho/(2P) + (\ln P - \gamma \ln \rho - \gamma)$ , второе на  $(\gamma - 1)\rho/P$ , третье на  $-u(\gamma - 1)\rho/P$  и суммируя, получаем после несложных преобразований

$$[\rho(\ln P - \gamma \ln \rho)]_t + [(\ln P - \gamma \ln \rho)\rho u]_x = (\gamma - 1)\rho/P[(4/3)\mu u_x^2 + (\lambda(P/\rho)_x)_x].$$

Интегрируя это уравнение по  $x$  от  $a$  до  $b$ , можно получить соотношение, выражающее фундаментальный физический принцип возрастания энтропии:

$$\begin{aligned} \int_a^b [\rho(\ln P - \gamma \ln \rho)]_t dx + [(\ln P - \gamma \ln \rho)\rho u] \Big|_a^b - (\gamma - 1)(\rho/P)\lambda(P/\rho)_x \Big|_a^b = \\ \int_a^b (\gamma - 1)\{(\rho/P)(4/3)\mu u_x^2 + (\rho/P)^2\lambda[(P/\rho)_x]^2\} dx \geq 0. \end{aligned}$$

При использовании методов сквозного счета, даже если схема не содержит физические диссипативные слагаемые, должен выполняться разностный аналог этого неравенства, в противном случае возможно получение численных решений, содержащих скачки разрежения, не существующие в природе. Рассмотрим дифференциально-разностную схему для уравнений газовой динамики:

$$\begin{aligned} (\rho_i)_t + \Delta^- F_{i+1/2}^\rho &= 0, \\ (E_i)_t + \Delta^- F_{i+1/2}^E &= 0, \quad E = \rho u^2/2 + P/(\gamma - 1), \end{aligned}$$

$$(m_i)_t + \Delta^- F_{i+1/2}^m = 0, \quad m = \rho u.$$

Здесь  $F_{i+1/2}^\rho = F^{\rho*}(f_{i-l+1}, \dots, f_{i+l})$ ,  $F_{i+1/2}^m = F^{m*}(f_{i-l+1}, \dots, f_{i+l})$ ,  $F_{i+1/2}^E = F^{E*}(f_{i-l+1}, \dots, f_{i+l})$ ,  $f$  — вектор искомым переменных в системе уравнений (3),  $F^\rho(f)$ ,  $F^m(f)$ ,  $F^E(f)$  — потоки, причем  $F^{\rho*}(f, \dots, f) = F^\rho(f)$ ,  $F^{m*}(f, \dots, f) = F^m(f)$ ,  $F^{E*}(f, \dots, f) = F^E(f)$ .

Чтобы гарантировать отсутствие волн разрежения, следует потребовать выполнения энтропийного условия

$$\partial S_i^* / \partial t + \Delta^- U_{i+1/2}^* \geq 0, \quad (4)$$

где  $S_i^* = S^*(f_{i-l}, \dots, f_{i+l})$ ,  $U_{i+1/2}^* = U^*(f_{i-l+1}, \dots, f_{i+l})$ , причем  $S^*(f, \dots, f) = \rho(\ln P - \gamma \ln \rho)$ ,  $U^*(f, \dots, f) = (\ln P - \gamma \ln \rho)\rho u$ . Это соотношение может служить для проверки соответствия разностной схемы фундаментальному физическому принципу возрастания энтропии. Следует также отметить, что хотя условия (2) и (4) получены здесь для дифференциально-разностных схем, они могут служить критерием качества консервативных разностных схем с дискретизацией как по времени, так и по пространственной переменной, явных и неявных. Это объясняется тем, что и те, и другие в предельном случае  $\tau \rightarrow 0$  ведут себя как рассмотренные здесь дифференциально-разностные схемы и, таким образом, полученные условия являются необходимыми, хотя и не достаточными. Несложно обобщить выписанные условия для явных разностных схем первого порядка аппроксимации по времени.

Подчеркнем, что проверка выполнения энтропийных условий (2) или (4) для конкретных разностных схем нетривиальна, видимо, поэтому примеры схем, для которых доказаны энтропийные условия, немногочисленны. В этой связи представляет интерес следующий технически более простой, хотя и не имеющий строгого обоснования подход.

Представим потоки схемы (1) в виде

$$F_{i+1/2} = G_{i+1/2} + H_{i+1/2},$$

где  $G_{i+1/2} = G(f_{i-l+1}, \dots, f_{i+l})$  — симметричная функция своих аргументов:  $G(f_{i-l+1}, \dots, f_{i+l}) = G(f_{i+l}, \dots, f_{i-l+1})$ ,  $H_{i+1/2} = H(f_{i-l+1}, \dots, f_{i+l})$  — антисимметричная функция своих аргументов, т. е.  $H(f_{i-l+1}, \dots, f_{i+l}) = -H(f_{i+l}, \dots, f_{i-l+1})$ .

Ясно, что имеет место соотношение  $H(f_i, \dots, f_i) = -H(f_i, \dots, f_i) = 0$  и, таким образом,  $H_{i+1/2} = (h)$  может трактоваться как искусственное диссипативное слагаемое. Потребуем, чтобы для функций  $f_i$  с конечным носителем,  $f_i = 0$  при  $|i| > I$ , это слагаемое удовлетворяло неравенству

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f_i (H_{i+1/2} - H_{i-1/2}) / h \geq 0. \quad (5)$$

Несложные преобразования позволяют получить более удобную форму этого неравенства:

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} f_i (H_{i+1/2} - H_{i-1/2}) / h &= \sum_{-\infty}^{\infty} f_i H_{i+1/2} / h - \sum_{-\infty}^{\infty} f_i H_{i-1/2} / h = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} f_i H_{i+1/2} / h - \sum_{-\infty}^{\infty} f_{i+1} H_{i+1/2} / h = - \sum_{-\infty}^{\infty} H_{i+1/2} \Delta^+ f_i \geq 0. \end{aligned}$$

Технически проверка этого соотношения сводится к доказательству алгебраических неравенств и, как правило, достаточно проста. Например, для противопотоковых схем

первого порядка аппроксимации имеем  $F_{i+1/2} = (f_i + f_{i+1})a/2 + (f_i - f_{i+1}) |a|/2$ , следовательно,  $H_{i+1/2} = -(\Delta^+ f_i) |a|/2$ , и приведенное выше неравенство выполняется автоматически:  $\sum_{-\infty}^{\infty} (\Delta^+ f_i)^2 |a|/2 \geq 0$ . Следует отметить, что симметричное слагаемое в случае постоянного коэффициента переноса  $a$  удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} & \sum_{-\infty}^{\infty} f_i (G_{i+1/2} - G_{i-1/2})/h = \sum_{-\infty}^{\infty} f_i G_{i+1/2}/h - \sum_{-\infty}^{\infty} f_i G_{i-1/2}/h = \\ & = \sum_{-\infty}^{\infty} f_i G_{i+1/2}/h - \sum_{-\infty}^{\infty} f_{i+1} G_{i+1/2}/h = \sum_{-\infty}^{\infty} (f_i + f_{i+1})(f_i - f_{i+1})a/(2h) = \\ & = \sum_{-\infty}^{\infty} (f_i^2 - f_{i+1}^2)a/(2h) = \left( \sum_{-\infty}^{\infty} f_i^2 - \sum_{-\infty}^{\infty} f_i^2 \right) a/(2h) = 0. \end{aligned}$$

Подобное соотношение также выполняется, если  $G_{i+1/2}$  — произвольная линейная комбинация с постоянными коэффициентами выражений  $f_i + f_{i+1}$ ,  $f_{i-1} + f_{i+2}$ ,  $f_{i-2} + f_{i+3}$ , ... Действительно, докажем стандартный индукционный переход. Пусть выполнено

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (f_{i-k} + f_{i+1+k})(f_i - f_{i+1}) = 0.$$

Покажем справедливость соотношения, получающегося при добавлении здесь к индексу  $k$  единицы.

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (f_{i-k-1} + f_{i+2+k})(f_i - f_{i+1}) = 0.$$

Вычитая из последнего равенства предпоследнее и вводя разностную функцию  $z_i = f_{i+1} - f_i$ , проведем очевидные выкладки

$$\begin{aligned} & \sum_{-\infty}^{\infty} (f_{i-k-1} - f_{i-k} + f_{i+2+k} - f_{i+1+k})(f_i - f_{i+1}) = \sum_{-\infty}^{\infty} z_{i-k-1} z_i - \\ & - \sum_{-\infty}^{\infty} z_{i+1+k} z_i = \sum_{-\infty}^{\infty} z_i z_{i+1+k} - \sum_{-\infty}^{\infty} z_{i+1+k} z_i = 0. \end{aligned}$$

Это доказывает нужное нам соотношение, а следовательно, для рассматриваемого общего класса схем имеет место энтропийное условие, которое для функций с конечным носителем принимает форму

$$\begin{aligned} \partial/\partial t \sum_{-\infty}^{\infty} f_i^2/2 & = - \sum_{-\infty}^{\infty} f_i (G_{i+1/2} - G_{i-1/2})/h - \sum_{-\infty}^{\infty} f_i (H_{i+1/2} - H_{i-1/2})/h = \\ & = - \sum_{-\infty}^{\infty} f_i (H_{i+1/2} - H_{i-1/2})/h = \sum_{-\infty}^{\infty} H_{i+1/2} \Delta^+ f_i \leq 0. \end{aligned}$$

Методы построения диссипативных слагаемых потоков (т.е. их “антисимметричных” компонент) с адаптивными свойствами рассматриваются далее.

Для более сложных уравнений соотношение (5) не гарантирует, вообще говоря, выполнение энтропийного условия. Для иллюстрации возникающих проблем рассмотрим нелинейное уравнение переноса

$$f_t + (f^2/2)_x = 0.$$

В качестве энтропийного выберем соотношение

$$\partial/\partial t \int_{-\infty}^{\infty} (f^2/2) dx \leq 0.$$

Рассмотрим дифференциально-разностную схему

$$\partial f_i/\partial t + \Delta^- F_{i+1/2} = 0, \quad F_{i+1/2} = G_{i+1/2} + H_{i+1/2}, \quad -\infty \leq i \leq \infty.$$

Здесь  $H$  — антисимметричная компонента потоков, удовлетворяющая соотношению (5),  $G$  — симметричная их часть, которая должна удовлетворять условию энергетической нейтральности

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f_i (G_{i+1/2} - G_{i-1/2})/h = 0.$$

Чтобы удовлетворить этому условию, будем вычислять  $G_{i+1/2}$  по формуле второго порядка точности

$$G_{i+1/2} = (f_i^2 + f_i f_{i+1} + f_{i+1}^2)/3.$$

Покажем, что в результате мы получили схему, удовлетворяющую энтропийному условию

$$\partial/\partial t \sum_{i=-\infty}^{\infty} (f_i^2/2) dx \leq 0.$$

Действительно, умножая разностную схему на  $f_i$  и суммируя по  $i$ , получаем соотношение

$$\partial/\partial t \sum_{i=-\infty}^{\infty} (f_i^2/2) dx + \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i \Delta^- (G_{i+1/2} + H_{i+1/2}) = 0.$$

Учитывая соотношение (5), а также тот факт, что мы рассматриваем функции с конечным носителем, для которых оператор разностного дифференцирования  $\Delta^-$  может быть переброшен на другой сомножитель, получим

$$\partial/\partial t \sum_{i=-\infty}^{\infty} (f_i^2/2) dx - \sum_{i=-\infty}^{\infty} G_{i+1/2} \Delta^+ f_i = - \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i \Delta^- H_{i+1/2} \leq 0.$$

Очевидно, имеет место формула  $G_{i+1/2} \Delta^+ f_i = (f_i^2 + f_i f_{i+1} + f_{i+1}^2)(f_{i+1} - f_i)/(3h) = (f_{i+1}^3 - f_i^3)/(3h)$ . Ясно, что при суммировании этого выражения мы получаем нуль для функций с конечным носителем. Таким образом, последнее неравенство превращается в энтропийное условие, так как вычитаемое слева есть нуль. Это условие имеет вид априорной оценки со строгим убыванием разностной энергии, которая выполняется для произвольных, в том числе разрывных начальных условий.

В данном случае вывод энтропийного соотношения основывался на специальной аппроксимации симметричной части потоков схемы. Для более сложных уравнений и для получения формул более высоких порядков точности столь простые рецепты не эффективны. Тем не менее мы будем строить схемы для решения уравнений газовой динамики

с диссипативными слагаемыми в каждом уравнении, удовлетворяющими свойству (5). В результате обеспечивается наличие “стоков разностной энергии”, тем более интенсивных, чем “хуже” разностное решение. В общем случае это не гарантирует выполнения энтропийного условия (2) для уравнения переноса или энтропийного условия (4) для уравнений газовой динамики, но позволяет улучшить сходимость схем по времени. Ввиду того, что мы налагаем на искусственные диссипативные слагаемые условия, аналогичные тем, которым удовлетворяют физические диссипативные слагаемые параболических уравнений и которые обеспечивают энтропийные соотношения, здесь и далее мы будем называть эти условия квазиэнтропийными.

Отметим, что выполнение свойства (5) особенно актуально для схем, коэффициенты которых являются быстро меняющимися функциями независимых переменных. Так, современные схемы типа TVD могут трактоваться как схемы с диссипативными слагаемыми, коэффициенты которых являются сильно меняющимися функциями независимых переменных. Кроме того, схемы высоких порядков аппроксимации имеют достаточно большие шаблоны, которые повышают значимость переменных коэффициентов схем. Энергетические соотношения для диффузионного уравнения (а) иллюстрируют возможность порождения “энергии” переменными коэффициентами уравнения. Аналогичное свойство имеет место для разностных схем, что неблагоприятно влияет, в частности, на сходимость к стационарным решениям. Опыт численных расчетов говорит о том, что искусственные диффузионные слагаемые, удовлетворяющие свойству (5), могут решать эту проблему. Примеры построения диффузионных членов будут приведены в дальнейших разделах.

## 2. Неявная схема для уравнений сжимаемого газа.

Проиллюстрируем свойства, обеспечиваемые квазиэнтропийными диффузионными слагаемыми, на примере неявной двуслойной схемы с искусственными диссипативными членами составного типа [3]. Отметим, что в [3] они используются в явной многошаговой пересчетной схеме, однако скалярный характер этих диффузионных операторов позволяет почти полностью представить их в стабилизирующем операторе и получить в результате неявную схему с высокой скоростью стационарирования, что иллюстрируется далее численными примерами (см. п. 5).

Схема предназначена для решения задач в произвольных криволинейных координатах. Однако здесь мы ограничимся лишь случаем декартовых координат. Систему уравнений сжимаемого газа запишем в консервативной форме

$$f_t + F_x + G_y = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим вначале схему в общем виде, не указывая способ дискретизации по пространственным переменным:

$$\begin{aligned} & [1 + (\tau/2)(A\partial/\partial x + B\partial/\partial y - U_{ik} - V_{ik})](f_{ik}^{n+1} - f_{ik}^n)/\tau = \\ & = -(F_x + H_y)^n + U_{ik}f_{ik}^n + V_{ik}f_{ik}^n, \end{aligned}$$

где  $A = DF/Df$ ,  $B = DH/Df$ ,  $U, V$  — диффузионные операторы [3] составного типа, переключающиеся в зависимости от гладкости решения (диффузия третьего порядка на “гладких” решениях и первого возле ударных волн).

Будем применять для первых производных разностные операторы  $\Lambda_x, \Lambda_y$ ,  $\partial/\partial x \approx \Lambda_x = \Delta_x^0(1 - \beta\Delta_x^2\Delta_x^-\Delta_x^+)$ ,  $\partial/\partial y \approx \Lambda_y = \Delta_y^0(1 - \beta\Delta_y^2\Delta_y^-\Delta_y^+)$ , имеющие при  $\beta = 1/6$  четвертый



порядок аппроксимации (однако и в этом случае с учетом диффузионных слагаемых в итоге схема имеет третий порядок по пространственным переменным). Используя метод приближенной факторизации, запишем окончательно:

$$\begin{aligned} & [1 + \tau(A\Lambda_x - U_{ik})/2][1 + \tau(B\Lambda_y - V_{ik})/2](f_{ik}^{n+1} - f_{ik}^n) = \\ & = -(\Lambda_x F + \Lambda_y H)^n + U_{ik} f_{ik}^n + V_{ik} f_{ik}^n, \end{aligned} \quad (7)$$

Это разностное уравнение может быть переписано в виде трехшагового численного алгоритма, включающего вычисление правой части и поочередное обращение операторных множителей, действующих на разностную производную по времени. Диффузионные операторы  $U$ ,  $V$  вычисляются как комбинации членов второго и четвертого порядков. Для прямоугольных равномерных координатных сеток формулы выглядят следующим образом:

$$U_{ik} f_{ik} = \delta_x^- d_{i+1/2k}, \quad d_{i+1/2k} = a_{i+1/2k} [\epsilon_{i+1/2}^{(2)} \delta_x^+ f_i^n - \epsilon_{i+1/2}^{(4)} \delta_x^+ \delta_x^+ \delta_x^- f_i^n], \quad (8)$$

где

$$\epsilon_{i+1/2}^{(4)} = \max(0, w^{(4)} - \alpha^{(4)} \epsilon_{i+1/2}^{(2)}), \quad a = \sqrt{\gamma P / \rho + |u|}, \quad (9)$$

$$\epsilon_{i+1/2}^{(2)} = w^{(2)} \max(\nu_{i-1}, \nu_i, \nu_{i+1}, \nu_{i+2}), \quad \nu_i = |\delta_x^+ \delta_x^- P_i| / (4P_i + \delta_x^+ \delta_x^- P_i), \quad (10)$$

$P$  — давление. Вместо формулы (9) часто используется (в частности, при проведении описываемых в п. 5 расчетов) более простая

$$\epsilon_{i+1/2}^{(2)} = w^{(2)} \max(\nu_i, \nu_{i+1}).$$

В качестве одного из проверенных в практических расчетах набора параметров можно предложить  $w^{(2)} = 1$ ,  $w^{(4)} = 1/32$ ,  $\alpha^{(4)} = 1$ .

Диффузионные слагаемые в данной схеме построены так, чтобы обеспечить наличие “стоков разностной энергии”, т. е. чтобы для функций с конечным носителем ( $f_i = 0$  если  $|i| > I$ ) обеспечивалось квазиэнтропийное неравенство

$$-\sum_{-\infty}^{\infty} f_i (d_{i+1/2k} - d_{i+1/2k}) = \sum_{-\infty}^{\infty} d_{i+1/2k} (f_{i+1} - f_i) \geq 0.$$

Действительно, введем для упрощения выкладок величины  $\hat{\epsilon}^{(2)} = \epsilon^{(2)} a$ ,  $\hat{\epsilon}^{(4)} = \epsilon^{(4)} a$ . Поскольку для функций с конечным носителем имеет место тождество  $\sum_{-\infty}^{\infty} u_i \delta_x^- v_i = -\sum_{-\infty}^{\infty} v_i \delta_x^+ u_i$ , введя функцию  $z_i = \delta_x^+ f_i$ , используя легко проверяемое соотношение  $z_i (\delta_x^+ \delta_x^- z_i) = [-(\delta_x^+ z_i)^2 - (\delta_x^- z_i)^2 + \delta_x^+ \delta_x^- (z_i^2)]/2$ , нетрудно получить

$$\begin{aligned} & \sum_{-\infty}^{\infty} d_{i+1/2} z_i = \sum_{-\infty}^{\infty} z_i [\hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(2)} z_i - \hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(4)} \delta_x^+ \delta_x^- z_i] = \\ & = \sum_{-\infty}^{\infty} \{z_i^2 \hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(2)} + \hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(4)} [(\delta_x^+ z_i)^2 + (\delta_x^- z_i)^2]/2 - \hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(4)} \delta_x^+ \delta_x^- (z_i^2)/2\}. \end{aligned}$$

Используя еще раз тождество  $\sum_{-\infty}^{\infty} u_i \delta_x^- v_i = -\sum_{-\infty}^{\infty} v_i \delta_x^+ u_i$ , преобразуем последнее слагаемое, получим

$$\sum_{-\infty}^{\infty} d_{i+1/2} z_i = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(4)} [(\delta_x^+ z_i)^2 + (\delta_x^- z_i)^2] / 2 + \sum_{-\infty}^{\infty} z_i^2 [\hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(2)} - \delta_x^+ \delta_x^- \hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(4)}] / 2.$$

Таким образом, для того чтобы искомое свойство выполнялось, достаточно выполнения неравенств  $\hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(4)} \geq 0$ ,  $2\hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(2)} \geq \delta_x^+ \delta_x^- \hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(4)}$ . Первое неравенство сразу следует из формулы (10). Используя очевидные тождества  $\max(a+b, a+c) = a + \max(b, c)$ ,  $\max(b, c) = -\min(-b, -c)$ , выражение для  $\hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(4)}$  можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(4)} &= a_{i+1/2} w^{(4)} + \max(-a_{i+1/2} w^{(4)}, -\alpha^{(4)} \hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(2)}) = \\ &= a_{i+1/2} w^{(4)} - \min(a_{i+1/2} w^{(4)}, \alpha^{(4)} \hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(2)}). \end{aligned}$$

Итак, второе неравенство переписывается в виде

$$\begin{aligned} 2\hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(2)} &\geq 2 \min(a_{i+1/2} w^{(4)}, \alpha^{(4)} \hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(2)}) - \min(a_{i-1/2} w^{(4)}, \alpha^{(4)} \hat{\epsilon}_{i-1/2}^{(2)}) - \\ &\quad - \min(a_{i+3/2} w^{(4)}, \alpha^{(4)} \hat{\epsilon}_{i+3/2}^{(2)}). \end{aligned} \quad (11)$$

В данном случае используется значение  $\alpha^{(4)} = 1$  (допустимы значения  $\alpha^{(4)}$  лишь из диапазона  $[0, 1]$ ). Поэтому, очевидно, имеет место неравенство  $2\hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(2)} \geq 2 \min(a_{i+1/2} w^{(4)}, \alpha^{(4)} \hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(2)})$ . Вычитаемые в правой части (11) лишь усиливают это неравенство. Таким образом, неравенство (11) верно, что доказывает наше утверждение. То есть проанализированные выше диффузионные составляющие схемы гарантируют наличие “стоков разностной энергии” при любых положительных коэффициентах  $\hat{\epsilon}_{i+1/2}^{(2)}$ . Вычисление их по формуле (10) гарантирует увеличение “грубой” диффузии второго порядка вблизи разрывов.

### 3. Диффузия типа нелинейных фильтров

В п. 1 были рассмотрены общие принципы построения схем, удовлетворяющих энтропийным условиям. Ниже аналогичные идеи используются для модификации нелинейных фильтров. Отметим, нелинейные фильтры представляют собой диффузионные нелинейные члены составного типа, имеющие высокий порядок на “гладких” монотонных участках решения, автоматически понижающие порядок до первого на разрывных или пилообразных участках. Показано [2, 4], что процедуры сглаживания с использованием нелинейных фильтров обладают свойствами сохранения монотонности решения и невозрастания его полной вариации. Однако в многомерных уравнениях эти свойства уже не выполняются в отличие от свойства возрастания энтропии. Поэтому далее строятся модификации нелинейных фильтров со свойством (5), обеспечивающим наличие стоков разностной энергии, так что, если используются энергетически нейтральные аппроксимации для первых производных, то, как показано в предыдущем разделе, схема в целом будет подчиняться априорной энергетической оценке, причем со строгим убыванием энергии, несмотря на нелинейный характер зависимости коэффициентов схемы от решения. Если же энергетической нейтральности нет, как это имеет место для рассматриваемых здесь схем решения

уравнений сжимаемого газа, предлагаемые диффузионные члены позволяют повысить качество решения и улучшить сходимость схемы по времени.

Исходные нелинейные фильтры записываются в следующем виде:

$$f_i^* = f_i - \delta^- [D_i^+ + D_i^- - \alpha \delta^- f_i], \quad (12)$$

$$D_i^+ = s_i \Phi(s_i C f_i, | \delta^+ f_i | \alpha, s_i \delta^- f_i \alpha \lambda), \quad \lambda > 0.5, \quad (13)$$

$$D_i^- = s_i \Phi(s_i C f_i, | \delta^+ f_i | \alpha, s_i \delta^+ f_{i+1} \alpha \lambda), \quad s_i = \text{sign}(\delta^+ f_i), \quad (14)$$

$$C f_i = (\alpha \delta^+ + M U) f_i / 2, \quad U f_i \approx \Delta x^k M \partial^k / \partial x^k, \quad M = \text{const.}$$

Здесь  $\Phi(b_1, \dots, b_n)$  — функция:

$$\Phi(b_1, \dots, b_n) = \max[0, \min(b_1, \dots, b_n)].$$

На “гладких” решениях вне экстремумов имеем, как нетрудно показать,  $D_i^+ = C f_i$ ,  $D_i^- = C f_i$ . В этом случае нелинейный фильтр превращается в линейный сглаживающий оператор высокого порядка, т. е. с минимальным искажением “гладких” функций,  $f_i^* = f_i - \delta^- M U f_i$ . Параметр  $\lambda$  позволяет регулировать количество узлов, где происходит понижение порядка. При его увеличении оно имеет место лишь в узлах, ближайших к точкам экстремумов и разрывов решения.

**Теорема** [2, 7]. Пусть последовательность  $f_i$ ,  $-\infty \leq i \leq \infty$ , имеет определенное направление роста, т. е. она либо невозрастающая, либо неубывающая, кроме того, выполнено условие

$$2\alpha(1 + \lambda) \leq 1.$$

Тогда последовательность  $f_i^*$ ,  $-\infty \leq i \leq \infty$ , имеет то же направление роста, что и последовательность  $f_i$ .

Следует отметить, что рассматриваемые здесь алгоритмы построения нелинейных фильтров эквивалентны комбинированию диффузионных слагаемых второго и исходного произвольно высокого порядка, то есть эквивалентны использованию меняющихся (причем в некоторых задачах жестко, например, пилообразным образом) коэффициентов диффузии. Это может приводить к ухудшению сходимости разностных методов по времени. Для предотвращения этого эффекта диффузионные слагаемые следует строить так, чтобы они допускали энергетическую оценку типа (5). Покажем, как можно это сделать на основе предложенных выше алгоритмов.

Преобразуем формулы (12)–(14), пользуясь тем, что, как показано в [2, 7], функция  $\Phi$  не превышает модуля любого своего аргумента и равняется своему любому аргументу, умноженному на неотрицательное, не превышающее единицу, число. Используя это свойство для первого аргумента, имеем

$$D_i^+ = \beta_{i+1/2}^+ C f_i = \beta_{i+1/2}^+ (\alpha \delta^+ + M U) f_i / 2,$$

$$D_i^- = \beta_{i+1/2}^- C f_i = \beta_{i+1/2}^- (\alpha \delta^+ + M U) f_i / 2.$$

Здесь коэффициенты  $\beta^+$ ,  $\beta^-$  определяются из формул (13)–(14), в частности,

$$\beta_{i+1/2}^+ = 2s_i \Phi(s_i C f_i, | \delta^+ f_i | \alpha, s_i \delta^- f_i \alpha \lambda) / (\alpha \delta^+ f_i + M U f_i).$$

Рассмотрим упрощенный вариант этой формулы, который получается в предположении  $M = 0$ :

$$\beta_{i+1/2}^+ = 2s_i \Phi(|\delta^+ f_i| \alpha/2, |\delta^+ f_i| \alpha, s_i \delta^- f_i \alpha \lambda) / (\alpha \delta^+ f_i).$$

Очевидно, второй аргумент можно опустить, поскольку он заведомо больше первого, коэффициент  $\alpha$  выносится и сокращается, так что имеем

$$\beta_{i+1/2}^+ = 2\Phi(|\delta^+ f_i| / 2, s_i \delta^- f_i \lambda) / |\delta^+ f_i|.$$

Подставляя это выражение в формулы (12)–(14), получим

$$\begin{aligned} f_i^* &= f_i + \delta^- [\alpha \delta^+ f_i - D_i^+ - D_i^-] = f_i + \delta^- [\alpha \delta^+ f_i - \beta_{i+1/2}^+ C f_i - \beta_{i+1/2}^- C f_i] = \\ &= f_i + \delta^- [\alpha(1 - \beta_{i+1/2}) \delta^+ f_i - \beta_{i+1/2} M B f_i], \quad \beta_{i+1/2} = (\beta_{i+1/2}^+ + \beta_{i+1/2}^-) / 2. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай, когда оператор дифференцирования  $B$  аппроксимирует третью производную:  $B = \delta^+ \delta^- \delta^+$ . Переставляя коэффициент  $\beta$  под оператор дифференцирования в последнем слагаемом, вычисляя коэффициенты по симметризованным формулам и поэтому переобозначая их, окончательно получаем

$$f_i^* = f_i + \delta^- [\alpha(1 - \gamma_{i+1/2}^1) \delta^+ f_i - M \delta^+ \gamma_i^2 \delta^- \delta^+ f_i], \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{i+1/2}^1 &= [\Phi(|\delta^+ f_i| / 2, s_i \delta^+ f_{i+1} \lambda) + \Phi(|\delta^+ f_i| / 2, s_i \delta^- f_i \lambda)] / |\delta^+ f_i|, \\ \gamma_i^2 &= \Phi(|\delta^+ f_i| / 2, s_i \delta^- f_i \lambda) / |\delta^+ f_i| + \Phi(|\delta^- f_i| / 2, s_i \delta^+ f_i \lambda) / |\delta^- f_i|. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $\lambda > 0.5$ . Покажем, что для функций с конечным носителем ( $f_i = 0$  если  $|i| > I$ ) при любых коэффициентах  $\gamma$  обеспечивается свойство  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} (f_i^* - f_i) f_i \leq 0$ , а это является аналогом (5)  $\partial/\partial t \int (f^2/2) dx = \int f \partial f / \partial t dx \leq 0$ . Действительно, поскольку для функций с конечным носителем имеет место тождество  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} u_i \delta^- v_i = -\sum_{j=-\infty}^{\infty} v_i \delta^+ u_i$ , из уравнений (15) нетрудно получить

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_i (f_i^* - f_i) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_i \delta^- [-\alpha(1 - \gamma_{i+1/2}^1) \delta^+ f_i + M \delta^+ \gamma_i^2 \delta^- \delta^+ f_i] = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\delta^+ f_i) [-\alpha(1 - \gamma_{i+1/2}^1) \delta^+ f_i + M \delta^+ \gamma_i^2 \delta^- \delta^+ f_i] = \\ &= - \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\delta^+ f_i)^2 \alpha(1 - \gamma_{i+1/2}^1) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\delta^+ f_i) M \delta^+ \gamma_i^2 \delta^- \delta^+ f_i = \\ &= - \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\delta^+ f_i)^2 \alpha(1 - \gamma_{i+1/2}^1) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\delta^- \delta^+ f_i)^2 M \gamma_i^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Учитывая неотрицательность коэффициентов под знаками суммирования, имеем нужное свойство. Таким образом, данная процедура фильтрования обеспечивает наличие “стоек разностной энергии”, причем вблизи разрывов или участков “пониженной гладкости”

их интенсивность возрастает. Практика расчетов показывает, что при введении подобных диссипативных операторов в схемы численного решения задач аэродинамики удается улучшить сходимость их по времени и обеспечить разумную степень монотонности решений на разрывах, хотя степень их разрешения хуже, нежели при использовании метода коррекции потоков [2, 5–7].

Аналогичные процедуры можно построить на основе диффузионных операторов более высокого порядка. Рассмотрим диффузионные выражения 6-го порядка

$$f_i^* = f_i - \delta^- [-\alpha(1 - \gamma_{i+1/2})\delta^+ f_i + M\delta^+\delta^- \gamma_{i+1/2}\delta^+\delta^- \delta^+ f_i], \quad (17)$$

где

$$\gamma_{i+1/2} = [\Phi(|\delta^+ f_i|/2, s_i \delta^+ f_{i+1} \lambda) + \Phi(|\delta^+ f_i|/2, s_i \delta^- f_i \lambda)] / |\delta^+ f_i|. \quad (18)$$

Естественно, данные формулы строгих гарантий монотонности процедуры фильтрации не дают. Необходимо, однако, отметить, что поведение коэффициентов  $\gamma$  в зависимости от структуры решения таково, что на гладких решениях имеем  $\gamma = 1$ , и реализуется режим диссипации высокого порядка. В то же время вблизи разрывов коэффициенты  $\gamma$  уменьшаются и включается более грубая диссипация низкого порядка, которая уничтожает осцилляции решения. Это позволяет добиться приемлемых профилей зависимых переменных на разрывах в схемах для решения гиперболических уравнений, как это делается в приводимой ниже схеме.

#### 4. Неявная компактная схема для уравнений сжимаемого газа

Сконструируем разностную схему типа предиктор-корректор для уравнений (6) в следующей форме:

$$\begin{aligned} & [E - \Delta_x^- 2(\sigma a \tau)_{i+1/2}^2 \Delta_x^+] [E - \Delta_y^- 2(\sigma b \tau)_{k+1/2}^2 \Delta_y^+] (f_{ik}^* - f_{ik}^n) = \\ & = \tau(-L + U + V)_{ik}^n, \quad a = \sqrt{\gamma P / \rho} + |u|, \quad b = \sqrt{\gamma P / \rho} + |v|, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & [E - \tau \Delta_x^- c_{i+1/2}^x \Delta_x^+] [E - \tau \Delta_y^- c_{k+1/2}^y \Delta_y^+] (f_{ik}^{n+1} - f_{ik}^n) = \\ & = f_{ik}^* - f_{ik}^n - \sigma \tau (L_{ik}^* - L_{ik}^n), \quad 1/2 \leq \sigma \leq 1, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $a$  и  $b$  — максимальные по модулю собственные значения матриц  $D\Phi/Df$ ,  $DG/Df$ ,  $U$ ,  $V$  — диффузионные слагаемые, построенные на основе алгоритмов, рассмотренных в п. 3:

$$U_{ik}^n = \delta_x^- [e_{i+1/2}^x \delta_x^+ f_{ik} - \delta^+ d_i^x \delta_x^+ \delta_x^- f_{ik} + \delta_x^+ \delta_x^- h_{i+1/2}^x \delta_x^+ \delta_x^- \delta_x^+ f_{ik}] \quad (21)$$

(коэффициенты  $e, d, h$  приводятся далее),  $L$  — симметричные компактные аппроксимации слагаемых с пространственными производными уравнений (6):

$$\begin{aligned} L_{ik} &= \Delta_x^0 Q^x \hat{F}_{ik} + \Delta_y^0 Q^y \hat{G}_{ik}, \quad Q^x = E + \mu \delta_x^+ \delta_x^-, \quad Q^y = E + \mu \delta_y^+ \delta_y^-, \\ \hat{F}_{ik} &= (E + \kappa \delta_y^+ \delta_y^-) F_{ik}, \quad \hat{G}_{ik} = (E + \kappa \delta_x^+ \delta_x^-) G_{ik}. \end{aligned} \quad (22)$$

Значениями параметров  $\kappa$ ,  $\mu$  можно задавать порядок аппроксимации динамических членов уравнений (6). Здесь мы будем использовать  $\kappa = 1/5$ ,  $\mu = 1/30$ , определяющие шестой порядок.

Стабилизирующий оператор уравнения (19) соответствует динамическим слагаемым  $L$ , уравнения (20) — искусственным диффузионным членам  $U^n$ ,  $V^n$ .

При построении диффузионных членов непосредственное применение формул (15) или (17) успеха не принесло. Отметим, что эти формулы гарантируют выполнение априорной оценки квазиэнтропийного типа для линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Однако для нелинейной системы газовой динамики диссипативные свойства искусственной вязкости (15)–(16) оказываются недостаточными и с целью обеспечения интенсивных “стоков” разностной энергии приходится привлекать как численный эксперимент, так и дополнительные гипотезы. В результате многочисленных пробных расчетов были найдены следующие коэффициенты диффузионных операторов:

$$\begin{aligned} e_{i+1/2}^x &= a_{i+1/2}(4 - \gamma_{i-1}^x - \gamma_i^x - \gamma_{i+1}^x - \gamma_{i+2}^x), \\ d_i^x &= (a_{i+1/2} + a_{i-1/2}) \min((1 - \gamma_{i+1}^x), (1 - \gamma_{i-1}^x)) \gamma_i^x, \\ h_{i+1/2}^x &= a_{i+1/2} \gamma_{i+1}^x \gamma_i^x, \quad c_{i+1/2}^x = a_{i+1/2}^x / 8, \\ \gamma_i &= \frac{[\Phi(|\delta^+ f_i|, s_i \delta^- f_i 2\lambda + \epsilon) + \Phi(|\delta^- f_i|, s_{i-1} \delta^+ f_i 2\lambda) + \epsilon]}{(|\delta^+ f_i| + |\delta^- f_i| + 10^{-8})}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\epsilon = 10/I^2 = 10 \times \Delta x^2. \quad (24)$$

Отметим, что если во всех узлах  $\gamma_i = 1$ , т. е. мы имеем “гладкое” решение, то диффузионные слагаемые первого и третьего порядков исчезают и остается лишь диффузия пятого порядка. Малая константа  $\epsilon$  введена для того, чтобы не включать диффузионные слагаемые низкого порядка вблизи “гладких” экстремумов. Аналогичный прием использовался ранее при построении TVB-схем [8], т. е. схем с ограниченной полной вариацией (вообще говоря, возрастающей в отличие от TVD-схем).

Рассмотрим аппроксимационные свойства схем. Используя разложения в ряд по малым параметрам  $\Delta y$ ,  $\Delta x$ , учитывая, что имеют место соотношения  $1/6 + \mu = \kappa$ ,  $1/120 + \mu/4 = \kappa/12$ ,  $\mu = \kappa/6$ , можно получить равенство

$$L = \Delta_x^0 Q^x \hat{F} + \Delta_y^0 Q^y \hat{G} = S_y S_x \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) + O(\Delta x^6 + \Delta y^6),$$

где

$$S_y = E + \Delta y^2 \kappa \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \Delta y^4 \kappa / 12 \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

оператор  $S_x$  дается аналогичной формулой. Таким образом, на стационарных решениях для погрешности приводимой ниже схемы справедлива оценка  $R = (S_y S_x - E) \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) + (\Delta y^6 + \Delta x^6) + (U + V)_{ik}^n = (S_y S_x - E) J \frac{\partial f}{\partial t} + O(\Delta x^6 + \Delta y^6) + O(\Delta x^5 + \Delta y^5) = O(\Delta x^5 + \Delta y^5)$ . Следовательно, порядок аппроксимации расчета стационарных течений определяется искусственной диффузией. Схема имеет второй порядок по времени при  $\sigma = 1/2$ . Анализ Фурье позволяет установить абсолютную устойчивость данной схемы для уравнений с постоянными коэффициентами.

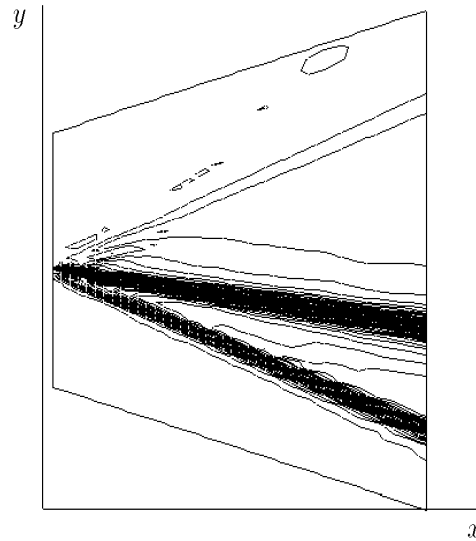


Рис. 1. Изолинии плотности, схема шестого порядка.

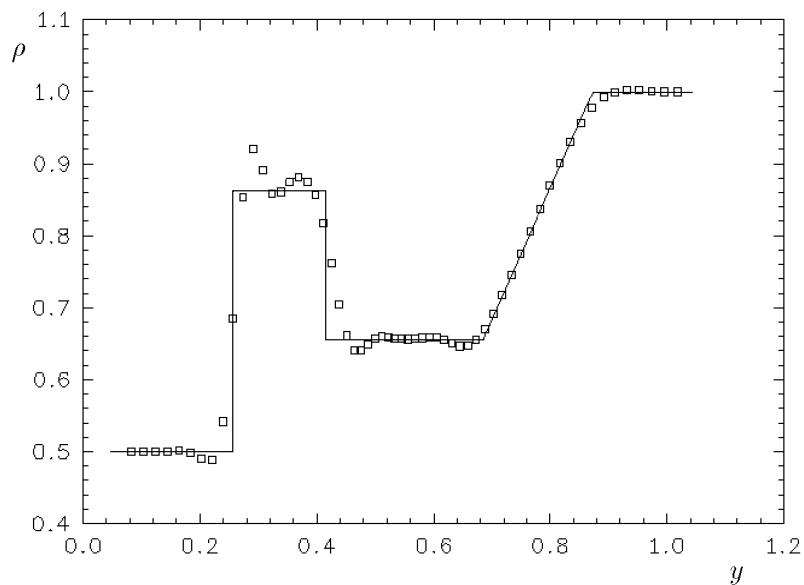


Рис. 2. Профиль плотности, схема третьего порядка.

## 5. Результаты расчетов

Наибольшие проблемы с обеспечением высокой степени сходимости по времени возникают при расчете разрывных решений уравнений газовой динамики. Поэтому для иллюстрации качества построенных численных методов рассмотрим результаты расчета двумерной задачи распада разрыва.

Пусть в начальный момент заданы два параллельных полубесконечных потока с параметрами  $P = 1$ ,  $r = 1$ ,  $u = 2.4(1.4)^{1/2}$  (при  $y > 0$ ) и  $P = 0.25$ ,  $r = 0.5$ ,  $u = 4(1.4)^{1/2}$  (при  $y \leq 0$ ). Используется сетка из  $45 \times 60$  узлов. Расчеты проведены для  $\gamma = 1.4$ , максимальное число Куранта  $K_y$  для схем (7) – (10) и (19) – (24) равно 1.1. На наветренных границах все

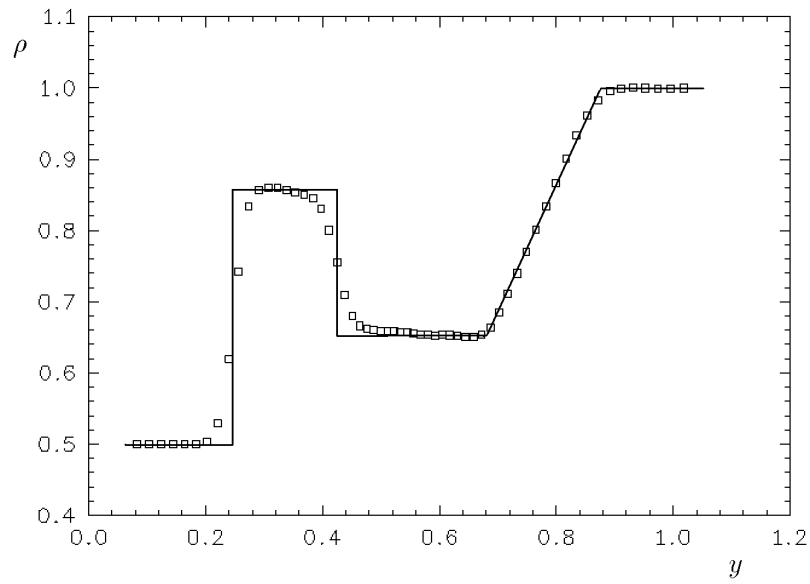


Рис. 3. Профиль плотности, схема шестого порядка.

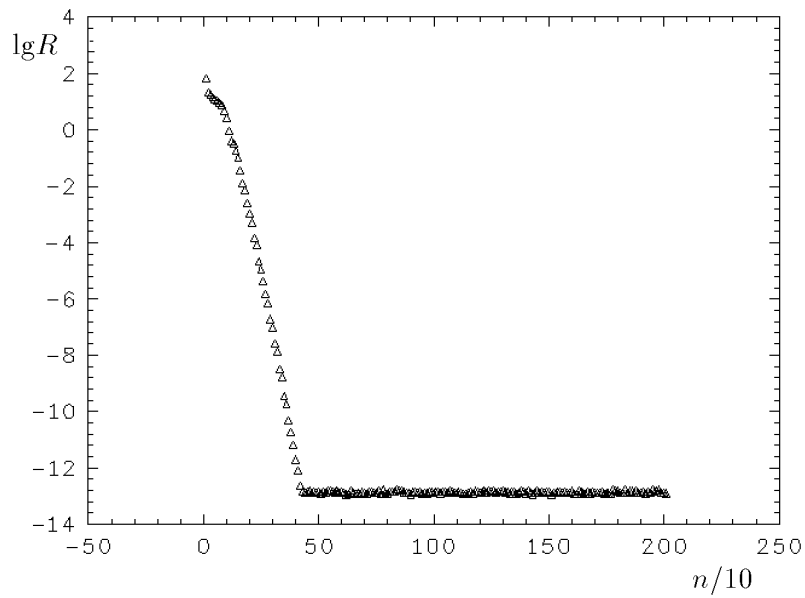


Рис. 4. Динамика сходимости, схема третьего порядка.



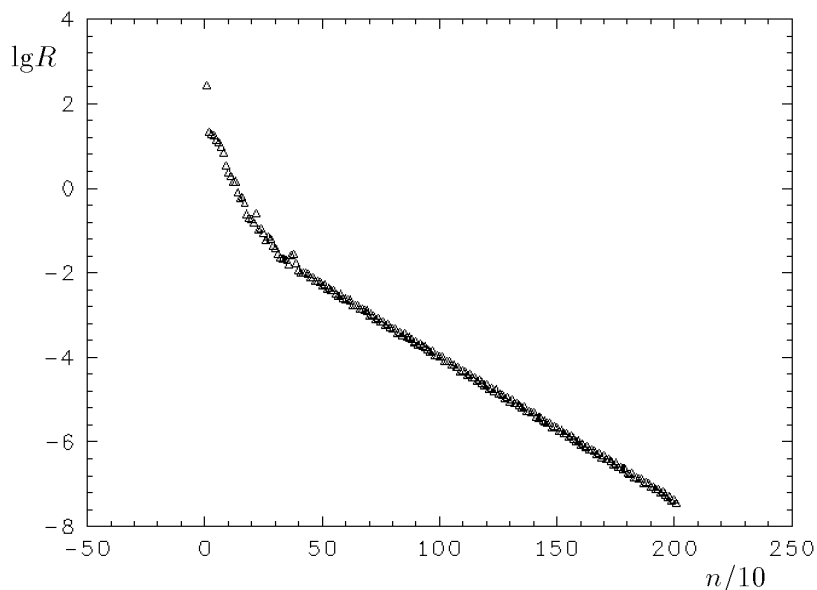


Рис. 5. Динамика сходимости, схема шестого порядка.

параметры фиксированы, на подветренных вычисляются с помощью экстраполяционных соотношений.

На рис. 1 изображены изолинии плотности, полученные с помощью схемы (19)–(24). Отметим, что для приведенных выше параметров взаимодействующих потоков вниз распространяется ударная волна, далее контактный разрыв и выше — веер волн разрежения.

На рис. 2 приведено сравнение вертикальных профилей плотности, полученных с помощью схемы третьего порядка, с данными [9] (сплошной линией), посчитанных по маршевой схеме с использованием 200 узлов в вертикальном направлении. Аналогично на рис. 3 сравниваются результаты, полученные с помощью схемы шестого порядка и маршевой схемы [9]. На рис. 4 показана эволюция невязки плотности,  $R = \max_{ik} |\rho_{ik}^{n+1}/\rho_{ik}^n - 1| / \tau$ , для схемы (7)–(10), на рис. 5 — для схемы (19)–(24). В обоих случаях расчет проведен при  $K=1.15$ ,  $K$  — число Куранта по переменной  $x$ .

Приведенные численные данные показывают, что обе схемы обеспечивают сходимость по времени численных решений. Схема третьего порядка сходится значительно быстрее, однако численные данные, полученные с ее помощью, являются немонотонными вблизи разрывов.

## Список литературы

- [1] Шокин Ю. И., Яненко Н. Н. *Метод дифференциального приближения*. Наука, Новосибирск, 1985.
- [2] Пинчуков В. И. *Численные методы аэрогидромеханики высоких порядков аппроксимации*. Новосибирский гос. ун-т, Новосибирск, 1997.
- [3] JAMESON A., SCHMIDT W., TURCEL E. *Numerical solution of the Euler equations by finite-volume method using Runge–Kutta time stepping schemes*. AIAA Paper 81–1259, 1981.

- [4] Пинчуков В. И. Нелинейные разностные фильтры и их использование при численном интегрировании разрывных решений. *Докл. РАН*, **337**, №3, 1994, 312–315.
- [5] Пинчуков В. И. О монотонизации одного семейства неявных схем. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **29**, №5, 1990, 672–679.
- [6] Пинчуков В. И. О построении монотонных схем типа предиктор-корректор произвольного порядка аппроксимации. *Матем. моделирование*. **3**, №9, 1991, 95–104.
- [7] Пинчуков В. И. Коррекция потоков в многомерных задачах гиперболического и параболического типов. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **36**, №4, 1996, 26–40.
- [8] КАРАМЫШЕВ В. Б., КОВЕНЯ В. М., МОСКВИЧЕВА И. А. Об одном маршевом алгоритме для решения стационарных уравнений газовой динамики. *Моделирование в механике*, **3(20)**, №2, 1989, 102–114.

*Поступила в редакцию 21 августа 1997 г.*