

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА, ФОРМИРУЮЩИХ РАЗМЫВ ДНА И БЕРЕГОВ РЕК В ПАВОДОК*

Д. И. ЛЕОНТЬЕВ, О. Н. МЕЛЬНИКОВА
Р. В. СУЛАКОВ, В. А. ТРОФИМОВ

Московский государственный университет, Россия

Работа посвящена численному моделированию волн на поверхности потока переменной глубины, скорость которого меняется вдоль по течению. Моделирование проводилось методом фиктивных областей в сочетании с методом суммарной аппроксимации. Методика расчета проверялась путем сопоставления результатов численного решения линеаризованной задачи с линейными граничными условиями с известным аналитическим решением и данными лабораторного эксперимента.

1 Введение

В недавних экспериментальных работах [1, 2] было показано, что стационарные волны на речных потоках в основном определяют размыв дна и формирование гряд и излучин рек в паводок. Источником генерации таких волн является либо препятствие на дне потока, либо изменение его скорости вдоль по течению. Возникающая поверхностная волна движется вверх по течению с фазовой скоростью, равной скорости потока. В результате на поверхности воды возникает стационарная волна с неподвижными гребнями. Воздействие такой волны на поток заключается в торможении и ускорении течения перед гребнем стационарной волны и за ним соответственно. В области торможения происходит отрыв от дна цилиндрических вихрей с горизонтальной осью, перпендикулярной направлению потока. Вихри уносят с собой донные наносы. В результате в местах отрыва вихрей происходит размыв дна и формируется гряда, пространственная структура которой определяется длиной и крутизной волны.

Очень крутые волны, образующиеся на реках в паводок, имеют трехмерную структуру и длину, превышающую глубину потока на порядок и более [2]. Формируемые этими волнами крупные гряды, расположенные в шахматном порядке, представляют собой основной вид деформаций дна и берегов рек, возникающих в паводок. Одним из видов таких деформаций являются синусоидальные излучины, шаг которых равен длине трехмерной стационарной волны. Прогноз этих процессов требует численного моделирования

* © Д. И. Леонтьев, О. Н. Мельникова, Р. В. Сулаков, В. А. Трофимов, 1997.

возбуждения стационарных волн на поверхности неравномерного потока воды. Численное моделирование генерации стационарных волн препятствиями различной формы для малых значений отношения высоты препятствия к глубине потока в последнее десятилетие предложено в ряде работ, например в [3, 4]. Моделей же возбуждения поверхностных волн в потоках переменной глубины с плоским дном пока не создавалось.

В настоящей работе впервые представлены результаты численного моделирования нестационарных волновых процессов, развивающихся на поверхности потока с плоским дном, скорость которого меняется вдоль по течению.

2. Постановка задачи

Рассматриваемый процесс описывается уравнением Пуассона для потенциала скорости с нелинейными граничными условиями, зависящими от времени. Для того, чтобы иметь возможность сравнения результатов численного решения задачи с известным аналитическим решением и экспериментальными данными, была решена на ЭВМ линеаризованная задача. Считая возмущения поверхности малыми и линеаризуя граничные условия, получим следующую систему уравнений, в которой переменные обезразмерены с помощью глубины потока h и скорости потока U , втекающего в область на границе $z = 0$:

$$\Delta\varphi = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < z < z_0,$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}(z, 1, t) = 0,$$

$$\text{Fr}^2 \frac{\partial\varphi}{\partial t}(z, 1, t) + \xi = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(z, 0, t) = 0,$$

где φ — потенциал скорости, ξ — отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня, $\text{Fr} = U/\sqrt{gh}$ — число Фруда, z — горизонтальная, y — вертикальная координата. Начало координат располагается на дне потока. В начальный момент времени у свободной поверхности потока скорость течения задавалась линейной функцией продольной координаты.

Задача решалась в двух постановках. В одном случае дно потока было горизонтальным, а поверхность воды имела постоянный наклон, в другом — поверхность воды была горизонтальной, а дно потока имело наклон. Второй случай соответствует постановке аналитической работы [5]. В обоих постановках во все моменты времени на сетке контролировался объем жидкости, протекающей через поперечное сечение потока, при этом объем жидкости, исключая возмущения, отличался от такового на входе в область не более чем на 2%.

3. Метод решения

В отличие от известных работ (например, [6]), в которых используется разложение потенциала скорости в ряд по пространственным гармоникам и исследуется инкремент их затухания, мы решали уравнение на ЭВМ с помощью метода фиктивных областей в сочетании с методом установления и схемой переменных направлений (метод суммарной

аппроксимации). Таким образом, на каждом временном слое использовался итерационный процесс для обращения оператора Лапласа. Итерации прекращаются при достижении невязки требуемой точности ε .

Существенно, что применяемая методика может быть обобщена на случай моделирования трехмерных волн с заменой схемы переменных направлений на иную схему. В отличие от известных работ [7] для использованного нами метода не имеется сильных ограничений на соотношение шагов по пространственным координатам и итерационному параметру.

Сетка содержала 100 точек по вертикальной координате и 20 точек по горизонтальной. Точность итерационного процесса 8, составляющая 1 %, достигалась при переходе на первый временной слой за 10–15 итераций, а при счете по времени за 5 итераций.

4. Численные результаты

Моделирование проводилось для числа Фруда 0.4 и следующих значений безразмерного градиента скорости потока $G = (\partial U / \partial z)(h/U)$: 0.001, 0.002, 0.003. Длина среды составляла две глубины потока.

В численных экспериментах обнаружено развитие волновых процессов. Амплитуда волны постепенно возрастает и достигает стационарного значения, хотя остается малой величиной. Обнаружен линейный рост крутизны волны (отношение амплитуды волны к ее длине) от градиента скорости потока G . При этом длина волны примерно равна глубине потока и остается неизменной для всех значений G . Этот результат полностью соответствует аналитическому решению линейной задачи [5].

Результаты решения задачи в двух рассмотренных постановках — с горизонтальным и наклонным дном — полностью совпали. Это позволяет заключить, что источником генерации волн является изменение скорости течения по продольной координате.

Проведенное сравнение результатов численного моделирования с аналитическими результатами других авторов [5] и нашими данными лабораторных экспериментов [8] показало, что полученная длина волны соответствует дисперсионному соотношению линейной задачи. Величина крутизны волны, найденная в численном эксперименте, отличается от данных лабораторного эксперимента не более чем на 10 % для фиксированного значения G .

Таким образом, хорошее соответствие полученных результатов численного моделирования линейной задачи аналитическому решению и экспериментальным данным позволяет после необходимой модификации использовать предложенный метод для решения нелинейных как двумерных, так и трехмерных задач.

Список литературы

- [1] MELNIKOVA O. N., PETROV V. P. Bottom ridges formed by subcritical free-surface flow. *J. Hydraulic Research*, **30**, No. 6, 1993, 745–753.
- [2] МЕЛЬНИКОВА О. Н., ПЛЕТНЕВА Е. В., РЫКУНОВ Л. Н. Физический механизм образования речных излучин. *Докл. РАН*, **324**, №6, 1992, 1179–1182.
- [3] FORBES L. K., SCHWARTZ L. W. Free surface flow over a semicircular obstruction. *J. Fluid Mech.*, **114**, 1982, 299.

- [4] KING A. S, BLOOR M. I. G. Free surface flow of a stream obstructed by an arbitrary bed topography. *Quart J. Mech. and Appl. Math.*, **43**, No. 1, 1990, 87–106.
- [5] ЛАЙТХИЛЛ ДЖ. *Волны в жидкости*. Мир, М., 1981.
- [6] MCLEAN J. V. Instability of finite-amplitude waves on the water of finite depth. *J. Fluid Mech.*, **114**, 1982, 315–330.
- [7] KATSIS C., AKYLAS T. R. On the excitation of long nonlinear water waves by moving pressure distribution. *J. Fluid Mech.*, **177**, 1987, 49–65.
- [8] ИВАНОВА И. Н., МЕЛЬНИКОВА О. Н. Нелинейные стационарные волны в открытых потоках воды, скорость которых меняется вдоль по течению. В *“Вычислительные технологии”*, ИВТ СО РАН, Новосибирск, **4**, №11, 1995, 119–126.

Поступила в редакцию 15 сентября 1995 г.