Вычислительные технологии **Том 2, № 1, 1997**

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ И МУЛЬТИИНТЕРВАЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ В НЕДООПРЕДЕЛЕННЫХ МОДЕЛЯХ*†

В. В. Телерман, В. А. Сидоров, Д. М. Ушаков
Институт систем информатики
Новосибирск, Россия

Недоопределенные модели представляют собой мощный аппарат для решения задач удовлетворения ограничений. Основными конструкциями недоопределенных моделей являются недоопределенные расширения различных универсальных множеств, которые позволяют работать с объектами, имеющими не одно, а множество значений (недоопределенное значение). В работе рассматриваются интервалы и мультиинтервалы как виды таких недоопределенных расширений, обсуждается их семантика на примере двух универсумов (вещественные числа и множества), а также приводятся примеры решения задач.

Предложенная А.С. Нариньяни в начале 80-х годов концепция недоопределенности и потоковых вычислений на моделях с недоопределенными значениями [1–3] получила свое воплощение в различных программных продуктах, разработанных в Российском научно-исследовательском институте искусственного интеллекта и в Институте систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН. Среди них следует отметить такие системы, как решатель уравнений и неравенств UniCalc [4], система планирования и ведения проектов Time-Ex [5] и решатель буквенно-арифметических головоломок АрБуЗ [6].

Основная идея недоопределенности состоит в том, что каждому объекту сопоставляется не одно точное значение, а некоторое подмножество из множества допустимых значений. Принцип недоопределенности трактует состояние частичной определенности как решение задачи, которое возможно на данном уровне знаний о задаче. Такое недоопределенное решение может практически удовлетворять требованиям пользователя, а также может стимулировать получение дополнительной информации. При переходе задачи от более широкого пространства допустимых значений к более узкому возможна ситуация, когда становятся применимы другие (например, специализированные) методы решения, которые нельзя было применять в исходной постановке. Спецификация задачи в условиях недоопределенности называется недоопределенной моделью (н-моделью).

Наиболее близким к н-моделям является подход, который получил название "программирование в ограничениях" (Constraint Programming, или CP) [7, 8]. В обоих подходах основными используемыми понятиями являются объекты, которым сопоставлены некоторые значения и ограничения, сужающие области допустимых значений этих объектов.

*Работа поддержана Республиканским научно-техническим советом по направлению "Информатизация России"(грант №285.78)

†© В. В. Телерман, В. А. Сидоров, Д. М. Ушаков, 1997

Необходимо найти такие значения для объектов, которые удовлетворяют одновременно всем накладываемым на них ограничениям.

У н-моделей есть свои особенности, которые, как нам кажется, делают их предпочтительнее традиционного CP-подхода. Во-первых, вычисления на всех н-моделях выполняются единым потоковым алгоритмом, который не зависит от класса исходной задачи. Это обстоятельство позволяет использовать в одной и той же н-модели такие объекты и ограничения, которые традиционно относятся к задачам разных типов, например целочисленные, вещественные и логические объекты, множества и массивы, линейные, нелинейные и теоретико-множественные отношения и т.д. Во-вторых, на основе аппарата н-моделей созданы высокотехнологичные программные продукты, позволяющие относительно просто настраиваться на самые разнообразные предметные области [9, 10].

Достаточно очевидно, что способ представления недоопределенного значения влияет как на качество полученных результатов (то есть насколько точно они отображают искомое решение), так и на вид ограничений, связывающих это значение. В зависимости от характера представляемой информации недоопределенные значения могут быть представлены в виде целочисленных и вещественных интервалов, множеств, перечислений и других, более специальных, конструкций. В данной работе мы рассмотрим различные виды недоопределенных представлений значений объектов, основное внимание уделяя представлениям в виде интервалов и мультиинтервалов.

Определение 1. *Задачей удовлетворения ограничений называется пара* (V, C)*, где* V *— совокупность переменных, принимающих значения из некоторых универсальных множеств (универсумов), а* C *— совокупность ограничений, связывающих значения переменных из* V*.*

Каждое ограничение из C имеет вид одной из следующих формул:

$y = x$,

$y = c$,

$y = f(x_1, \ldots, x_n)$,

здесь x, x_i, y — символы переменных из V, c — константный символ, f — функциональный символ арности n. Каждому константному символу приписывается некоторая константа из соответствующего универсума, каждому функциональному символу — некоторая функция, действующая на соответствующих универсумах (ввиду ограничений на объем данной статьи мы опускаем здесь формальное определение *многосортной модели*). Более сложные ограничения распадаются на множество более простых (вышеприведенных видов) после введения дополнительных переменных. Вопросы корректности таких преобразований в произвольных многосортных моделях были нами рассмотрены в работе [11].

Определение 2. *Решением задачи удовлетворения ограничений* (V, C) *называется такое приписывание каждой переменной из* V *некоторого определенного значения из ее универсума, при котором выполняются все ограничения из* C*.*

Аппарат недоопределенных моделей предназначен в первую очередь для решения подобных задач удовлетворения ограничений. В общем случае мы не ставим задачу найти одно или все решения задачи или доказать, что таковых не существует, но пытаемся оценить значение каждой переменной с помощью некоторого подмножества ее универсума (недоопределенного значения). Все точные решения задачи, если таковые существуют, должны лежать в декартовом произведении таких н-значений. Ниже мы приводим определения основных конструкций н-моделей.

Определение 3. *Недоопределенным расширением (н-расширением) универсума* X *на-*

зывается любой конечный набор его подмножеств $^*X$*, содержащий* $\emptyset$*,* X *и являющийся замкнутым относительно пересечения.*

Эти свойства гарантируют *однозначное представление* $^*[\xi]$ любого подмножества $\xi \subseteq X$ в н-расширении $^*X$, а именно:

$$^*[\xi] = \bigcap_{\xi \subseteq \zeta \in {}^*X} \zeta.$$

Таким образом, представлением множества ξ в системе $^*X$ является минимальное подмножество из н-расширения $^*X$, содержащее ξ. Ясно, что в общем случае для универсума X можно предложить различные н-расширения. Обозначим совокупность всех н-расширений универсума X через $SD(X)$.

Для задания зависимостей между н-объектами строятся н-расширения функций над ними. Любая функция

$$f : X_1 \times \ldots \times X_m \to X_{m+1}$$

индуцирует набор функций (прямую и обратные)

$$f_i : \mathcal{P}(X_1) \times \ldots \times \mathcal{P}(X_{i-1}) \times \mathcal{P}(X_{i+1}) \times \ldots \times \mathcal{P}(X_{m+1}) \to \mathcal{P}(X_i),$$
$$i = 1, \ldots, m+1,$$

где $\mathcal{P}(X_j)$ — множество всех подмножеств X_j, $j = 1, \ldots, m+1$,

$$f_i(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{m+1}) = \{x_i \mid f(x_1, \ldots, x_m) = x_{m+1},\ x_j \in \xi_j\ (j \neq i)\}.$$

Определение 4. *Н-расширение функции* f_i*,* $i = 1, \ldots, m+1$*, представляет собой функцию*

$$^*f_i : {}^*X_1 \times \ldots \times {}^*X_{i-1} \times {}^*X_{i+1} \times \ldots \times {}^*X_{m+1} \to {}^*X_i,$$

где $^*X_i \in SD(X_i)$*, такую, что*

$$^*f_i(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{m+1}) = {}^*[f_i(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{m+1})].$$

Отметим два важных свойства таких н-расширенных функций: все они корректны, то есть

$$f(x_1, \ldots, x_m) = x_{m+1} \Longrightarrow$$
$$\forall i \in \{1, \ldots, m+1\} \quad x_i \in {}^*f_i({}^*[\{x_1\}], \ldots, {}^*[\{x_{i-1}\}], {}^*[\{x_{i+1}\}], \ldots, {}^*[\{x_{m+1}\}]),$$

и монотонны по включению, то есть

$$\forall i \quad \forall \xi_j, \zeta_j \in {}^*X_j \quad (j \neq i) \qquad \xi_j \subseteq \zeta_j \Longrightarrow$$

$$^*f_i(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{m+1}) \subseteq {}^*f_i(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}, \zeta_{i+1}, \ldots, \zeta_{m+1}).$$

Пользуясь введенными выше понятиями, можно дать формальное определение недоопределенной модели.

Определение 5. *Недоопределенная модель (н-модель)* M состоит из четырех множеств:

$$M = (V, C, W, CORR),$$

где

V — множество н-объектов v из заданной предметной области,

C — множество ограничений на н-объектах из V,

W — множество функций присваивания,

$CORR$ — множество функций проверки корректности.

С каждым объектом из V связаны недоопределенный тип данных (недоопределенное расширение некоторого универсума), начальное значение, функция присваивания и функция проверки корректности.

Функция присваивания — это двухместная функция, работающая при каждой попытке присваивания очередного значения н-объекту и определяющая его новое значение как пересечение текущего и присваиваемого значений.

Функция проверки корректности — это унарный предикат, который проверяет непустоту значения н-объекта.

Интерпретацией ограничения называется вычисление результатов н-расширенных функций (прямой и обратных) на текущих значениях переменных с последующим вызовом функций присваивания и проверки корректности для каждой переменной, входящей в данное ограничение.

Алгоритм вычислений, реализованный в н-моделях, является высокопараллельным процессом, который управляется потоком данных. Изменение значений переменных, располагающихся в общей памяти, автоматически влечет интерпретацию тех ограничений, для которых эти переменные являются аргументами. Процесс останавливается, когда сеть стабилизируется (то есть исполнение ограничений не приводит к изменению объектов н-модели) или хотя бы один из н-объектов становится некорректным. В последнем случае устанавливается *противоречивость* исходной н-модели.

В работе [12] показана справедливость следующих утверждений.

Теорема 1.*Алгоритм удовлетворения ограничений в н-моделях заканчивает работу за конечное число шагов.*

Установление противоречивости н-модели не зависит от порядка интерпретации ограничений.

В случае непротиворечивой н-модели при одних и тех же исходных значениях н-объектов их результирующие значения также не зависят от порядка интерпретации ограничений.

Если установлена противоречивость н-модели $(V, C, W, CORR)$*, то задача удовлетворения ограничений* (V, C) *не имеет решений.*

Любое решение задачи удовлетворения ограничений (V, C) *лежит в области выходных значений соответствующих объектов н-модели* $(V, C, W, CORR)$.

Рассмотрим теперь различные виды недоопределенных расширений произвольного универсума X. *Тривиальное н-расширение* ${}^*X = \{\emptyset, X\}$ содержит минимум информации о потенциальном значении объекта: противоречиво оно ($\emptyset$) или нет (X). Ниже при рассмотрении других н-расширений ${}^*X$ будем предполагать, что X_0 — конечное подмножество X.

Точное н-расширение $X^{\text{Single}} \in SD(X)$ имеет вид

$$X^{\text{Single}} = \{\emptyset, X\} \cup \{\{x\} \mid x \in X_0\}.$$

Оно добавляет к исходному универсуму X_0 два новых значения: “неопределено"(X) и “противоречие"($\emptyset$).

Очевидно, что для универсума X максимальным н-расширением является множество всех подмножеств $\mathcal{P}(X)$. Его можно построить только в случае конечного X. В общем случае можно ввести *перечислимое н-расширение*

$$X^{\mathrm{Enum}} = X \cup \mathcal{P}(X_0).$$

В случае, когда X является *решеткой* (множеством с определенными на нем ассоциативными и коммутативными операциями $\wedge$ и $\vee$, подчиняющимися законам поглощения и идемпотентности), можно задать н-расширения, основанные на *интервалах* [6, 13, 14] и *мультиинтервалах* [15, 16].

Предположим, что X_0 — конечная подрешетка X, $-\infty$ — минимальный, а $+\infty$ — максимальный элементы X (в случае отсутствия таких элементов в исходной решетке добавим их, положив $\forall x \in X \cup \{-\infty, +\infty\} \quad x \wedge -\infty = -\infty, \quad x \vee +\infty = +\infty$).

Если ввести обозначение $[\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in X \mid \underline{x} \wedge x = \underline{x}$ и $x \vee \overline{x} = \overline{x}\}$, то *интервальное и мультиинтервальное н-расширения* можно определить следующим образом:

$$X^{\mathrm{Interval}} = \{[\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x}, \overline{x} \in X_0 \cup \{-\infty, +\infty\}\},$$

$$X^{\mathrm{Multiinterval}} = \{\xi \mid \xi = \cup\xi_i,\ \xi_i \in X^{\mathrm{Interval}},\ i = 1, 2, \ldots\}.$$

Очевидно, что $[\underline{x}, \overline{x}] \cap [\underline{y}, \overline{y}] = [\underline{x} \vee \underline{y}, \overline{x} \wedge \overline{y}]$.

Пустое множество представляется интервалом $[\underline{x}, \overline{x}]$, где $\underline{x} \vee \overline{x} \neq \overline{x}$; весь универсум X — интервалом $[-\infty, +\infty]$. Точному значению x соответствует интервал $[x, x]$. Пересечение двух мультиинтервалов определяется как

$$\xi \cap \zeta = \{\xi_i \cap \zeta_j \mid i = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots\}.$$

Рассмотрим, например, целочисленный объект v с множеством допустимых значений $\{1, 2, 7, 3\}$. В зависимости от выбранного вида н-расширения этого объекта ему может быть сопоставлено одно из следующих недоопределенных значений:

$v^{\mathrm{Single}} = \mathbb{Z}$ (полная неопределенность),

$v^{\mathrm{Enum}} = \{1, 2, 7, 3\}$,

$v^{\mathrm{Interval}} = [1, 7]$,

$v^{\mathrm{Multiinterval}} = \{[1, 3], [7, 7]\}$.

Рассмотрим два примера интервальных расширений.

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{R}$ (множество вещественных чисел). Очевидно, $\mathbb{R}$ является решеткой с $x \wedge y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$. Положим X_0 равным множеству всех чисел с плавающей точкой, представимых на некоторой ЭВМ. Тогда $\mathbb{R}^{\mathrm{Interval}}$ — множество интервалов с границами из X_0, удовлетворяющее всем свойствам из определения 3.

Рассмотрим функцию сложения вещественных чисел $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то есть $f(x, y) = x + y$. Тогда ее недоопределенные расширения $f_i : \mathbb{R}^{\mathrm{Interval}} \times \mathbb{R}^{\mathrm{Interval}} \to \mathbb{R}^{\mathrm{Interval}}$, $i = 1, 2, 3$, определяются следующими широко известными в интервальной арифметике формулами (для простоты обозначим ${}^*f_3(\xi, \zeta) = \xi + \zeta$, а ${}^*f_1(\xi, \zeta) = {}^*f_2(\xi, \zeta) = \zeta - \xi$):

$$[\underline{x}, \overline{x}] + [\underline{y}, \overline{y}] = [(\underline{x} + \underline{y})^-, (\overline{x} + \overline{y})^+],$$

$$[\underline{x}, \overline{x}] - [\underline{y}, \overline{y}] = [(\underline{x} - \overline{y})^-, (\overline{x} - \underline{y})^+].$$

Здесь $x^- = \max\{y \in X_0 \cup \{-\infty, +\infty\} \mid y \leq x\}$, $x^+ = \min\{y \in X_0 \cup \{-\infty, +\infty\} \mid y \geq x\}$.

В смысле данного примера недоопределенное расширение функции совпадает с классическим понятием интервального расширения, поэтому за более детальными примерами мы отсылаем читателя к работе [13].

Пример 2. Пусть $X = \mathcal{P}(U)$ для некоторого множества U, то есть элементы X суть подмножества U. Данный универсум очевидно является решеткой с $x \wedge y = x \cap y$, $x \vee y = x \cup y$. Пусть $X_0 = \mathcal{P}(U_0)$, где U_0 — конечное подмножество U, $-\infty = \emptyset$, $+\infty = U$. Тогда X^{Interval} является н-расширением универсума $\mathcal{P}(U)$.

Подобные множества были впервые предложены в работе [1] под названием недоопределенные множества как альтернатива нечетким множествам Заде. Рассмотрим семантику интервала $[\underline{x}, \overline{x}]$, где $\underline{x}, \overline{x} \subseteq U_0$. Очевидно, что в $\underline{x}$ входят те элементы U_0, которые заведомо принадлежат моделируемому данным интервалом точному множеству (так называемому денотату). Элементы из $\overline{x}$, и только они, потенциально могут принадлежать денотату.

Рассмотрим функцию

$$f : X \to \mathbb{Z}, \qquad f(x) = \#x,$$

вычисляющую мощность множества. Интервальное н-расширение ${}^*\!f_2 : X^{\text{Interval}} \to \mathbb{Z}^{\text{Interval}}$, ${}^*\!f_2(\xi) = \#\xi$ описывается формулой

$$\#[\underline{x}, \overline{x}] = [\#\underline{x}, \#\overline{x}].$$

Недоопределенное расширение ${}^*\!f_1 : \mathbb{Z}^{\text{Interval}} \to X^{\text{Interval}}$ в общем случае не может дать никакой полезной информации о недоопределенном множестве. Представление недоопределенного множества в виде пары (ξ, ζ), где $\xi \in X^{\text{Interval}}$, $\zeta \in \mathbb{Z}^{\text{Interval}}$, дает возможность работать одновременно как с самим множеством, так и с его мощностью, что позволяет получать более “сильные"заключения о денотате. Заметим, что в работе [1] недоопределенное множество представлялось в виде пятерки (U, X^+, X^-, m, M), где U является универсумом, X^+ состоит из элементов, заведомо принадлежащих денотату (нижняя граница интервала), X^- состоит из элементов, заведомо не принадлежащих денотату (данное множество представляет собой дополнение верхней границы интервала, то есть $X^- = U \setminus \overline{x}$), а m и M задают границы интервала мощности денотата.

Общие свойства алгебры интервалов в произвольной булевой алгебре рассматривались в работе [17], в которой также можно найти примеры недоопределенных расширений других теоретико-множественных операций.

Структурное н-расширение. Рассмотрим теперь универсум, заданный в виде декартова произведения множеств: $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. Как и к любому множеству, к нему применимы н-расширения X^{Single} и X^{Enum}. Более того, если каждый из X_i является решеткой, то X тоже является решеткой (как декартово произведение решеток), поэтому к X применимы также н-расширения X^{Interval} и $X^{\text{Multiinterval}}$. Однако можно предложить еще одно н-расширение X.

Пусть ${}^*X_i \in SD(X_i), i = 1, \ldots, n$. Тогда система ${}^*X_1 \times \cdots \times {}^*X_n$ также будет удовлетворять свойствам н-расширения, то есть ${}^*X_1 \times \cdots \times {}^*X_n \in SD(X_1 \times \cdots \times X_n)$. Представляет интерес следующий вопрос: если зафиксировать вид н-расширения, применимого как к X_i, так и к X, то как будут между собой соотноситься системы множеств ${}^*(X_1 \times \cdots \times X_n)$ и ${}^*X_1 \times \cdots \times {}^*X_n$? Рассмотрим эти соотношения для каждого приведенного выше вида н-расширения.

1. $(X_1 \times \cdots \times X_n)^{\text{Single}} \subseteq X_1^{\text{Single}} \times \cdots \times X_n^{\text{Single}}$.
2. $(X_1 \times \cdots \times X_n)^{\text{Enum}} \supseteq X_1^{\text{Enum}} \times \cdots \times X_n^{\text{Enum}}$.
3. $(X_1 \times \cdots \times X_n)^{\text{Interval}} = X_1^{\text{Interval}} \times \cdots \times X_n^{\text{Interval}}$.
4. $(X_1 \times \cdots \times X_n)^{\text{Multiinterval}} \supseteq X_1^{\text{Multiinterval}} \times \cdots \times X_n^{\text{Multiinterval}}$.

Таким образом, в случае интервалов выбор н-расширения универсума в виде $^*(X_1 \times \cdots \times X_n)$ или $^*X_1 \times \cdots \times {}^*X_n$ не играет роли. В остальных случаях такой выбор существен.

Рассмотрим некоторые виды н-расширений операции $\sqrt[2]{\ }$: Integer $\to$ Integer в случае аргумента, заданного целочисленным интервалом $[5, 35]$.

Н-расширение	Значение корня
Single	$\mathbb{Z}$ (полная неопределенность)
Enum	$\{-5, -4, -3, 3, 4, 5\}$
Interval	$[-5, 5]$
Multiinterval	$\{\ [-5, -3],\ [3, 5]\ \}$

Как видим, при переходе к точному значению информация практически теряется; интервальное расширение, являясь лучше точного, тем не менее грубее двух остальных (так как содержит не принадлежащий значению подинтервал $[-2, 2]$).

В больших задачах из-за реализационных ограничений невозможно специфицировать задачу, сопоставляя каждому объекту перечислимое или мультиинтервальное н-расширение. Однако в некоторых задачах удается получить приемлемый результат при использовании интервальных и точных н-расширений. Например, следующую систему из двух уравнений

$$x + y = 12,$$

$$2x = y,$$

можно решить, используя интервальное н-расширение, и получить точный ответ $x = 4$, $y = 8$. Данный пример подробно был рассмотрен в [6].

Очевидно, что, пользуясь интервальным н-расширением, невозможно получить приемлемые значения, если задача имеет несколько решений. Пусть, например, требуется найти все решения уравнения

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) + \sin(5x) + \sin(6x) = 0,$$

в интервале $-\pi/3 < x < \pi/3$.

Если переменной x сопоставить н-расширение Interval, то в результате получим интервал $x = [-1.04719, 1.0472]$, в котором содержатся все решения уравнения. Если перейти к н-расширению Multiinterval, то получим следующие решения:

$$\begin{aligned}
x_1 &= [-1.0471974, -1.0471976],\\
x_2 &= [-0.8975978, -0.8975980],\\
x_3 &= [0.0, 0.0],\\
x_4 &= [0.8975978, 0.8975980],\\
x_5 &= [1.0471974, 1.0471976].
\end{aligned}$$

Наиболее полно возможности н-моделей реализованы в рамках технологического программного комплекса НеМо+ [9], который предназначен для конструирования проблемно-ориентированных модулей обработки знаний на основе недоопределенности.

Пользователь имеет возможность на основе встроенных типов данных создавать собственные типы, используя объектно-ориентированную технологию. При определении нового типа можно указывать вид недоопределенности (Single, Enum, Interval, Multiinterval) и его активную часть. Активная часть типа представляет собой совокупность ограничений, связывающих его компоненты. Язык спецификации н-моделей комплекса НеМо+ является декларативным и используется для описания пользовательских объектов и ограничений.

ТХК НеМо+ реализован на языке C++ в операционной среде MS-Windows и может работать на PC-386–совместимых компьютерах. Основными областями его применения являются научные и инженерные расчеты, экспертные системы, задачи проектирования и планирования, СУБД.

Список литературы

[1] Нариньяни А. С. *Недоопределенные множества — новый тип данных для представления знаний.* Препринт ВЦ СОАН, №232, Новосибирск, 1980.

[2] Нариньяни А. С. *Недоопределенные модели и операции с недоопределенными значениями.* Препринт ВЦ СОАН, №400, Новосибирск, 1982.

[3] Нариньяни А. С. Недоопределенность в системах представления и обработки знаний. *Изв. АН СССР, Сер. Техн. кибернетика* **5**, 1986, 3–28.

[4] Babichev A. B., et al. UniCalc - an intelligent solver for mathematical problems. From theory to practice, Proc. of East-West AI Conf. Moscow, 1993, 257–260.

[5] Борде С. Б. Time-Ex — интеллектуальные системы планирования времени. В *“Интел. системы в машиностроении”*, ч. 1, Самара, 1991, 79–81.

[6] Телерман В. В., Дмитриев В. Е. *Технология программирования на основе недоопределенных моделей.* Препринт ИСИ СО РАН, №25, Новосибирск, 1995.

[7] Mackworth A. K. Consistency in networks of relations. *Artificial Intelligence* **8**, 1977, 99–118.

[8] Montanari U. Networks of constraints: Fundamental properties and application to picture processing. *Information Science* **7**, 1992.

[9] Telerman V. V., et al. Problem solving in the object-oriented technological environment NeMo+. *Lecture Notes in Computer Science* **1181**, 1996, 91–100.

[10] Telerman V. V., Ushakov D. M. Using the subdefiniteness in real world models. *Proc. of the East-West Int. Conf. Human-Computer Interaction: “Human Aspects of Business Computing”*, Moscow, 1996, 194–206.

[11] Telerman V., Ushakov D. Data types in subdefinite models. *Lecture Notes in Computer Science* **1138**, 1996, 305–319.

[12] Телерман В. В., Ушаков Д. М. Недоопределенные модели: формализация подхода и перспективы развития. В *“Пробл. преставления и обработки не полностью определенных знаний”*, М.—Новосибирск, 1996, 7–32.

[13] Шокин Ю. И. *Интервальный анализ.* Наука, Новосибирск, 1981.

[14] Hyvonen E. Constraint reasoning based on interval arithmetic: the tolerance propagation approach. *Artificial Intelligence* **58**, 1992, 71–112.

[15] Яковлев А. Г. Компьютерная арифметика мультиинтервалов. В *"Пробл. кибернетики. Проблемно-ориентированные вычисл. системы"*, 1987, 66–81.

[16] Телерман В. В. Использование мультиинтервалов в недоопределенных моделях. В *"Параллельное программирование и высокопроизводительные системы: Методы представления знаний в информационных технологиях"* (Уфа, 19–26 июня); Тез. докл. Всесоюз. семинара, Киев, 1990, 128–130.

[17] Нечепуренко М. И. Элементы булева интервального анализа. В *"Системное моделирование в информатике СМ-11"* Изд. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1985, 37–61.