Вычислительные технологии **Том 2, № 1, 1997**

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИХП ИНТЕРВАЛЬНЫХ МАТРИЦ *

Е. М. Смагина
Томский государственный университет, Россия
А. Н. Моисеев, С. П. Моисеева
Анжеро-Судженский филиал Томского государственного педагогического университета, Россия

Обсуждается проблема вычисления наиболее узких интервалов, содержащих коэффициенты интервального характеристического полинома интервальной матрицы. Предлагается несколько методов вычисления и анализируется ширина получаемых интервалов.

Введение

При решении задач теории автоматического управления (например, при синтезе модального регулятора) часто возникает необходимость в вычислении коэффициентов характеристических полиномов матриц (например, матрицы динамики системы). В случае решения указанных задач для систем с неопределенными (интервальными) параметрами речь идет о вычислении коэффициентов так называемых интервальных характеристических полиномов (ИХП) интервальных матриц. Однако, как будет показано ниже, точное решение этой задачи требует очень больших вычислительных затрат, особенно для интервальных матриц высокого порядка. Поэтому часто говорят о вычислении интервалов, содержащих коэффициенты ИХП интервальной матрицы.

В данной работе предлагается несколько методов расчета подобных интервалов. Представленные методы являются естественными интервальными расширениями таких известных методов вычисления коэффициентов характеристических полиномов числовых матриц, как метод главных миноров, методы Леверье и Фаддеева [1, 2]. Описанные алгоритмы анализируются с позиций трудоемкости и “узости"(“точности") получаемых интервальных значений. Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в [3].

1. Основные определения. Постановка задачи

Рассмотрим интервальную $(n \times n)$-матрицу $[A]$. Элементы такой матрицы являются не числами, а интервалами $[a_{ij}] = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ $(i, j = \overline{1, n})$ с известными нижними $\underline{a}_{ij}$ и верхними

$\overline{a}_{ij}$ границами :

$$[A] = \begin{pmatrix} [a_{11}] & \dots & [a_{1n}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [a_{n1}] & \dots & [a_{nn}] \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Определение [4]. Под *характеристическим полиномом интервальной матрицы* $[A]$ понимают семейство характеристических полиномов $\varphi_A(\lambda)$ вещественных матриц $A \in [A]$:

$$\{\varphi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_n,\ A \in [A]\}. \tag{1.2}$$

Коэффициенты $p_k = p_k(A)$, $k = \overline{1,n}$ являются полилинейными функциями элементов точечных матриц $A \in [A]$, поэтому для каждого из них можно построить объединенное интервальное расширение [4]:

$$\bigcup_{A\in[A]} p_k(A) = [\min_{A\in[A]} p_k(A), \max_{A\in[A]} p_k(A)] = [p_k], \qquad k = \overline{1,n}, \tag{1.3}$$

Тогда вместо семейства характеристических полиномов (1.2) можно рассматривать содержащий его *интервальный характеристический полином* (ИХП)

$$\varphi_{[A]}(\lambda) = \lambda^n + [p_1]\lambda^{n-1} + \dots + [p_n]. \tag{1.4}$$

Пусть для $k = \overline{1,n}$ $[p_k^*]$ обозначает естественное интервальное расширение (или просто интервальное расширение) [5] какой-нибудь функции, вычисляющей значение $p_k(A)$, на множество всех матриц из $[A]$. Тогда имеют место включения

$$[p_k] \subseteq [p_k^*], \qquad k = \overline{1,n}. \tag{1.5}$$

Известно [6, 7], что точное значение $[p_k]$ можно определить путем вычисления характеристических полиномов 2^{n^2} точечных матриц, составленных из различных комбинаций верхних и нижних границ элементов интервальной матрицы, и построения на их множестве минимальных интервалов, содержащих значения соответствующих коэффициентов. Такой метод является очень трудоемким и может быть пригодным только для интервальных матриц низкого порядка (так, например, для интервальной матрицы шестого порядка требуется вычислить коэффициенты нескольких миллиардов характеристических полиномов).

Для вычисления интервалов $[p_k^*]$ есть менее трудоемкие алгоритмы, например естественные интервальные расширения обычных методов вычисления коэффициентов характеристического полинома. Но такие алгоритмы дают разные значения $[p_k^*]$ в зависимости от выбранного метода вычисления коэффициентов и от способа взятия его интервального расширения. Возникает

Задача. Выбрать метод вычисления коэффициентов характеристического полинома и способ его интервального расширения, дающие при возможно меньшей трудоемкости наименее широкие интервалы $[p_k^*]$, содержащие коэффициенты интервального характеристического полинома $\varphi_{[A]}(\lambda)$ интервальной матрицы $[A]$.

Далее будут построены интервальные расширения и произведен их анализ для трех методов вычисления коэффициентов характеристических полиномов матриц: метода главных миноров, метода Леверье и метода Фаддеева [1, 2].

Поскольку метод главных миноров и метод Леверье используют понятие следа матрицы, необходимо ввести это понятие и для интервальных матриц.

Определение. Под *следом интервальной матрицы* $\mathrm{tr}[A]$ будем понимать интервал, равный сумме всех диагональных элементов этой матрицы:

$$\mathrm{tr}[A] = \sum_{i=1}^{n} [a_{ii}]. \tag{1.6}$$

2. Метод главных миноров

Метод главных миноров, по сути, вытекает непосредственно из определения характеристического полинома матрицы. Действительно, непосредственное раскрытие детерминанта матрицы $\lambda I_n - A$, представляющего собой характеристический полином матрицы A, и приведение подобных членов по степеням λ дают следующие аналитические формулы для вычисления коэффициентов характеристического полинома $\overline{p}_k$, $k = \overline{1, n}$:

$$\overline{p}_1 = -\mathrm{tr} A, \tag{2.1}$$

$$\overline{p}_k = (-1)^k S_k, \qquad k = \overline{2, n-1}, \tag{2.2}$$

$$\overline{p}_n = (-1)^n \det A, \tag{2.3}$$

где S_k представляет собой сумму всех главных миноров [2] порядка k матрицы A. Если в формулах (2.1)–(2.3) заменить все числовые параметры (то есть элементы матрицы A) и операции над ними на интервальные, то получим интервалы $[\overline{p}_k]$, $k = \overline{1, n}$, представляющие собой интервальное расширение коэффициентов характеристического полинома, определяемых по методу главных миноров

$$[\overline{p}_1] = -\mathrm{tr}[A], \tag{2.4}$$

$$[\overline{p}_k] = (-1)^k [S_k], \qquad k = \overline{2, n-1}, \tag{2.5}$$

$$[\overline{p}_n] = (-1)^n \mathrm{Det}[A], \tag{2.6}$$

где каждый интервал $[S_k]$ равен сумме всех главных миноров порядка k матрицы $[A]$.

Очевидно, что в описанном методе, в зависимости от способа вычисления миноров и определителя, границы интервалов $[\overline{p}_k]$, $k = \overline{2, n}$, будут различными. Наименее широкие интервалы получаются, если считать миноры и определитель “точным"методом, используя вычисление 2^{k^2} миноров. Но, несмотря на то, что в формулах (2.4)–(2.6) используются только суммы миноров, даже при точном вычислении этих миноров и определителя интервальной матрицы, мы не всегда сможем получить точные значения коэффициентов ИХП матрицы $[A]$.

3. Метод Леверье

Метод Леверье дает следующую рекуррентную формулу для определения коэффициентов характеристического полинома $\widetilde{p}_k$ числовой матрицы A:

$$\widetilde{p}_k = -\frac{1}{k}\{\mathrm{tr}(A^k) + \widetilde{p}_1 \mathrm{tr}(A^{k-1}) + \cdots + \widetilde{p}_{k-1} \mathrm{tr} A\}, \qquad k = \overline{1, n}. \tag{3.1}$$

Запишем интервальное расширение для коэффициентов характеристического полинома, вычисленных по формулам (3.1):

$$[\widetilde{p}_k] = -\frac{1}{k}(\mathrm{tr}[A]^k + [\widetilde{p}_1]\mathrm{tr}[A]^{k-1} + \cdots + [\widetilde{p}_{k-1}]\mathrm{tr}[A]), \qquad k = \overline{1, n}. \tag{3.2}$$

Как видно из (2.4), (3.2), коэффициенты $[\overline{p}_1]$ и $[\widetilde{p}_1]$ совпадают:

$$[\overline{p}_1] = [\widetilde{p}_1] = -\mathrm{tr}[A] = -\sum_{i=1}^{n}[a_{ii}]. \tag{3.3}$$

4. Метод Фаддеева

Метод Фаддеева [1] предлагает следующую рекуррентную схему для вычисления коэффициентов характеристического полинома:

$$\begin{gathered} A_1 = A, \quad \widehat{p}_1 = -\mathrm{tr}A_1, \quad B_1 = A_1 - \widehat{p}_1 I_n, \\ A_2 = AB_1, \quad \widehat{p}_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}A_2, \quad B_2 = A_2 - \widehat{p}_2 I_n, \\ \dots \\ A_n = AB_{n-1}, \quad \widehat{p}_n = -\frac{1}{n}\mathrm{tr}A_n. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Построим интервальное расширение этого метода. В общем виде формулы для вычисления коэффициентов ИХП методом Фаддеева запишутся следующим образом:

$$[\widehat{p}_k] = -\frac{1}{k}\mathrm{tr}[A_k], \tag{4.2}$$

здесь $[A_k] = [A][B_{k-1}]$, $[B_{k-1}] = [A_{k-1}] - [\widehat{p}_{k-1}]I_n$, $[B_0] = I_n$, $k = \overline{1, n}$. Как видно из представленных формул, равенство (3.3) можно продолжить:

$$[\overline{p}_1] = [\widetilde{p}_1] = [\widehat{p}_1] = -\mathrm{tr}[A]. \tag{4.3}$$

К сожалению, нельзя сказать ничего определенного о взаимном расположении интервальных коэффициентов $[\overline{p}_k]$, $[\widetilde{p}_k]$ и $[\widehat{p}_k]$ для $k > 1$. Их узость зависит от многих факторов: порядка системы, номера коэффициента, порядка умножения интервалов и т.д.

Очевидно, что если при вычислении использовать точное значение произведения матриц (вычисленное как объединенное интервальное расширение указанной бинарной операции на множество всех пар матриц определенных размерностей), то коэффициенты, полученные с помощью методов Леверье и Фаддеева, будут более узкими вследствие многократного вынесения общих множителей и субдистрибутивности операции интервального умножения. Однако нельзя утверждать, что все найденные коэффициенты будут совпадать с истинными значениями коэффициентов ИХП. Кроме того, такой способ расчета потребует больших вычислительных затрат, даже более высоких, чем “точный"способ вычисления коэффициентов.

Далее делается попытка оценить узость интервалов $[\overline{p}_k]$, $[\widetilde{p}_k]$ и $[\widehat{p}_k]$ для $k > 1$ путем подсчета количества умножений, необходимых для вычисления каждого из них.

5. Анализ методов с точки зрения увеличения ширины интервалов

Основная проблема использования интервальных расширений методов, работающих с точечными параметрами, заключается в “размывании"интервалов, что приводит, в конечном счете, к тому, что результирующие интервальные параметры получаются гораздо шире их истинных значений. Основная причина этого явления заключается в том, что операция умножения субдистрибутивна на множестве правильных (“классических") интервалов (то есть интервалов вида $[\underline{x}, \overline{x}]$, где $\underline{x} \leq \overline{x}$):

$$[a]([b] + [c]) \subseteq [a][b] + [a][c]. \tag{5.1}$$

Поскольку обычно поставленная задача решается именно для интервальных матриц, составленных из правильных интервалов, то операцию умножения интервалов часто называют “расширяющей". В связи с этим имеет смысл оценить количество умножений интервалов, необходимое для получения результата, в различных методах. Сравнение полученных значений может дать приблизительную оценку того или иного метода с точки зрения увеличения ширины интервалов. Кроме того, указанные значения могут служить и для оценки трудоемкости описанных алгоритмов.

Итак, оценим количество умножений интервалов, необходимых для вычисления каждого из коэффициентов $[\overline{p}_k]$ и $[\widetilde{p}_k]$ $(k = \overline{2, n})$. Обозначим через ω операцию, результатом которой является интервал, а через $\Psi(\omega)$ — количество умножений интервалов, необходимое для вычисления результата операции ω. Например, для вычисления одного элемента произведения $[C] = [A][B]$ интервальных матриц $[A]$ и $[B]$ порядка n необходимо выполнить

$$\Psi([c_{ij}]) = n \tag{5.2}$$

умножений. А для вычисления определителя интервальной матрицы $[A]$ порядка n методом разложения по строке —

$$\Psi(\mathrm{Det}[A]) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{k!} \tag{5.3}$$

умножений.

Таким образом,

$$\Psi([\overline{p}_n]) = \Psi(\mathrm{Det}[A]) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{k!}. \tag{5.4}$$

Для получения каждого $[\overline{p}_k]$, $k = \overline{2, n-1}$, необходимо вычислить сумму C_n^k главных миноров матрицы, следовательно,

$$\Psi([\overline{p}_k]) = C_n^k \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \frac{k!}{i!} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{n!}{(n-k)!i!}. \tag{5.5}$$

Для метода Леверье получаем

$$\Psi([\widetilde{p}_k]) = \Psi(\mathrm{tr}[A]^k) + \sum_{i=1}^{k-1} \Psi([\widetilde{p}_i]\mathrm{tr}[A]^{k-i}) =$$

$$= (k-1)n \times n + \sum_{i=1}^{k-1} \{\Psi([\widetilde{p}_i]) + (k-i-1)n \times n + 1\} =$$

$$= n^2 \sum_{i=1}^{k-1} i + (k-1) + \sum_{i=1}^{k-1} \Psi([\widetilde{p}_i]) =$$

$$= n^2 \sum_{i=1}^{k-1} i + (k-1) + n^2 \sum_{i=1}^{k-2} i + \cdots + n^2 + 1 =$$

$$= n^2 \frac{k(k-1)}{2} + n^2 \frac{(k-1)(k-2)}{2} + \cdots + n^2 + \sum_{i=1}^{k-1} i =$$

$$= n^2 \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(k-i+1)(k-i)}{2} + \frac{k(k-1)}{2}. \qquad (5.6)$$

Коэффициент	Метод главных миноров	Метод Леверье	Метод Фаддеева
n=2			
2	2	5	4
n=3			
2	6	10	9
3	9	39	45
n=4			
2	12	17	16
3	36	67	120
4	40	166	616
n=5			
2	20	26	25
3	90	103	175
4	200	256	1075
5	205	510	6475
n=6			
2	30	37	36
3	180	147	288
4	600	366	2052
5	1230	730	14400
6	1236	1275	100836

И, наконец, количество умножений для вычисления некоторого коэффициента ИХП методом Фаддеева можно определить следующими рекуррентными формулами:

$$\Psi([\widehat{p}_1]) = 0,$$

$$\Psi([\widehat{p}_k]) = \Psi(\mathrm{tr}\{[A]\cdot([A_{k-1}] - [\widehat{p}_{k-1}]I_n)\}) = n\cdot(n + \Psi([A_{k-1}]) + \Psi([\widehat{p}_{k-1}])). \qquad (5.7)$$

Здесь под $\Psi([A_{k-1}])$ подразумевается количество умножений, необходимых для вычисления одного элемента матрицы $[A_{k-1}]$. Учитывая что $\Psi([\widehat{p}_{k-1}]) = n\cdot\Psi([A_{k-1}])$, получаем

$$\Psi([\widehat{p}_k]) = n\cdot(n + \Psi([\widehat{p}_{k-1}]\cdot\frac{n+1}{n}), \qquad k = \overline{2,n}. \qquad (5.8)$$

В таблице (см. выше) приводятся данные по количеству умножений интервалов для указанных методов применительно к матрицам до шестого порядка. Очевидно, что наименьшее количество умножений интервалов требует метод главных миноров, а наибольшее (среди представленных методов) — метод Фаддеева.

6. Анализ числовых примеров

Представленные в работе методы были протестированы для большого количества примеров интервальных матриц различных порядков. Предлагаем результаты работы описанных методов для интервальных матриц 3-го и 5-го порядков [3].

При вычислении определителей использовалось естественное интервальное расширение разложения определителя по элементам первой строки [7]

$$\mathrm{Det}[A] = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}[a_{1k}]\cdot[\overline{\mathbf{M}}_1 k], \qquad (6.1)$$

где $[\overline{\mathbf{M}}_1 k]$ — интервальный дополнительный минор, полученный вычеркиванием из матрицы $[A]$ первой строки и k-го столбца.

Итак, рассмотрим интервальную матрицу третьего порядка

$$[A] = \begin{pmatrix} [1,2] & [0,1] & [-9,-4] \\ [-4,-2] & 1 & 2 \\ [-1,2] & [3,4] & [0,1] \end{pmatrix}. \qquad (6.2)$$

Ниже приводятся значения коэффициентов ИХП, полученных с использованием различных методов, описанных в работе:

методом Леверье

$$[p_1] = [-4,-2],\ [p_2] = [-18,23],\ [p_3] = [-262.3, 99.7]; \qquad (6.3)$$

методом Леверье с использованием “точного"вычисления произведения матриц

$$[p_1] = [-4,-2],\ [p_2] = [-16,23],\ [p_3] = [-235.7, 91.7]; \qquad (6.4)$$

методом Фаддеева

$$[p_1] = [-4,-2],\ [p_2] = [-16.5,22.5],\ [p_3] = [-242.3, 58.3]; \qquad (6.5)$$

методом Фаддеева с использованием “точного"вычисления произведения матриц

$$[p_1] = [-4,-2],\ [p_2] = [-14,22.5],\ [p_3] = [-182.3, 52.3]; \qquad (6.6)$$

методом главных миноров

$$[p_1] = [-4, -2],\ [p_2] = [-16, 21],\ [p_3] = [-165, -2]; \tag{6.7}$$

методом главных миноров с использованием “точного"вычисления всех миноров и определителя матрицы

$$[p_1] = [-4, -2],\ [p_2] = [-14, 21],\ [p_3] = [-129, -6]; \tag{6.8}$$

истинные значения коэффициентов ИХП матрицы (6.2)

$$[p_1] = [-4, -2],\ [p_2] = [-14, 21],\ [p_3] = [-129, -6]. \tag{6.9}$$

Можно заметить, что наилучшим, в смысле наименьшей ширины результирующих интервалов, является метод главных миноров, который дает не только самые узкие значения для всех коэффициентов, но и интервалы, достаточно близкие к истинным коэффициентам ИХП. При точном вычислении миноров и определителя интервальной матрицы метод главных миноров в данном примере дает точные значения коэффициентов. Для получения интервалов (6.3)–(6.9) при использованиии компьютера с процессором *Intel 80386DX-40* потребовалось следующее время:

(6.3) (метод Леверье) — 0.06 с;

(6.4) (метод Леверье с “точным"умножением матриц) — 25 мин. 40 с;

(6.5) (метод Фаддеева) — 0.05 с;

(6.6) (метод Фаддеева с “точным"умножением матриц) — 8 мин. 32 с;

(6.7) (метод главных миноров) — меньше 0.01 с;

(6.8) (метод главных миноров с “точным"вычислением определителя и миноров) — 0.5 с;

(6.9) (точные значения — перебором матриц) — 1.36 с.

В качестве другого примера рассмотрим матрицу пятого порядка

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -5 & 0 & [1,2] \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

Значения получаемых интервалов:

методом Леверье

$$[p_1] = [0, 1],\ [p_2] = [-1, 1],\ [p_3] = [37.3, 51.7],$$
$$[p_4] = [-162.5, -40.6],\ [p_5] = [-331.8, 285.3] \text{ — за } 0.11 \text{ с;}$$

методом Фаддеева

$$[p_1] = [0, 1],\ [p_2] = [-2.5, 2],\ [p_3] = [25.2, 64.8],$$
$$[p_4] = [-244.3, 34.2],\ [p_5] = [-995.9, 975.6] \text{ — за } 0.11 \text{ с;}$$

с помощью метода главных миноров

$$[p_1] = [0, 1],\ [p_2] = [-2, 2],\ [p_3] = [36, 53],$$

$$[p_4] = [-131, -84],\ [p_5] = [-32, 34] \text{ — за 0.33 с;}$$

методом главных миноров с использованием “точного"вычисления определителя и миноров

$$[p_1] = [0, 1],\ [p_2] = [-2, 2],\ [p_3] = [38, 51],$$
$$[p_4] = [-123, -92],\ [p_5] = [-32, 34] \text{ — за 11 мин 34 с;}$$

истинные значения коэффициентов ИХП матрицы

$$[p_1] = [0, 1],\ [p_2] = [-1, 1],\ [p_3] = [40, 49],$$
$$[p_4] = [-113, -102],\ [p_5] = [-8, 10] \text{ — за 4 часа 51 мин.}$$

Видно, что метод главных миноров позволяет получить достаточно узкие значения интервальных коэффициентов, близкие к истинным коэффициентам ИХП. Однако в последнем примере значения интервалов для $[p_2]$ и $[p_3]$, полученные методом Леверье, наиболее узкие. Это связано с тем, что значения $\Psi([\overline{p}_2])$ и $\Psi([\widetilde{p}_2])$, а также $\Psi([\overline{p}_3])$ и $\Psi([\widetilde{p}_3])$ оказались достаточно близкими; в этом случае увеличение ширины интервалов в значительной степени зависит от порядка умножения и типа интервалов, составляющих матрицу $[A]$.

Анализируя результаты, полученные для большого количества примеров, можно дать следующие рекомендации. Если требуется при минимальных вычислительных затратах получить достаточно “хорошие"(узкие) значения интервалов, содержащих коэффициенты ИХП интервальной матрицы, лучше всего воспользоваться методом главных миноров (раздел 2). Если же вычислительные затраты не так важны, то можно воспользоваться следующим комбинированным методом:

1) вычислить значения интервалов с помощью методов Леверье, Фаддеева и метода главных миноров;

2) выбрать для границ коэффициентов $[p_2]$, ..., $[p_n]$ те значения, которые обеспечивали бы минимальную ширину каждого интервала.

Выводы

Представленные в работе методы вычисления интервалов, содержащих коэффициенты интервального характеристического полинома интервальной матрицы, позволяют получить достаточно узкие, а во многих случаях и точные значения искомых интервалов. Все эти методы являются естественными интервальными расширениями известных [1, 2] методов вычисления коэффициентов характеристических многочленов точечных матриц: метода главных миноров, методов Леверье и Фаддеева.

Результаты вычислений для конкретных примеров (раздел 6), их анализ, а также анализ алгоритмов с точки зрения увеличения ширины интервалов и трудоемкости (раздел 5) показывают, что достаточно быстрым и качественным методом вычисления интервалов, содержащих коэффициенты ИХП, является метод главных миноров, описанный в разделе 2. Если вычислительные затраты не являются существенными, то можно воспользоваться комбинированным методом, предложенным в разделе 6.

Представленные в работе методы вычисления интервалов, содержащих коэффициенты ИХП интервальной матрицы, могут быть использованы при решении задач теории автоматического управления для систем с интервальными параметрами.

Список литературы

[1] Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* Наука, М., 1988.

[2] Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. *Матрицы и вычисления.* Наука, М., 1984.

[3] Смагина Е. М., Моисеев А. Н., Моисеева С. П. Анализ двух методов вычисления коэффициентов ИХП интервальных матриц. В *“Информатика и процессы управления”*. Межвуз. сб. научных работ, Изд-во КГТУ, Красноярск, 1996, вып.3 (в печати).

[4] Дугарова И. В. *Применение интервального анализа при проектировании систем управления с неопределенными параметрами: Дис. … канд. техн. наук.* Томск, 1989.

[5] Moore R. E. *Interval analysis.* Englewood Cliffs, Prentice Hall, N.Y., 1966.

[6] Хлебалин Н. А. *Аналитический синтез регуляторов в условиях неопределенности параметров объекта управления: Дис. … канд. техн. наук.* Саратов, 1984.

[7] Дугарова И. В. *Определение и анализ интервальных расширений детерминанта интервальной матрицы.* Деп. в ВИНИТИ Редкол. журн. “Изв. РАН, Техн. кибернетика", №1345-В96, 1996.

[8] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления.* Мир, М., 1987.