

Математическое моделирование процесса просачивания в пористой среде на базе неконформных смешанных конечно-элементных постановок

Э. П. ШУРИНА^{1,2}, Н. Б. ИТКИНА¹, С. А. ТРОФИМОВА^{1,2,*}

¹Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

²Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия

*Контактный автор: Трофимова Светлана Алексеевна, e-mail: TrofimovaSA@ipgg.sbras.ru

Поступила 2 июня 2020 г., доработана 17 сентября 2020 г., принята в печать 24 сентября 2020 г.

Статья посвящена математическому моделированию процесса фильтрации жидкости в пористой геологической среде под действием давления. Разрабатывается вычислительная схема решения задачи Дарси на основе смешанной конечно-элементной постановки с использованием разрывного метода Галёркина. Выполнено построение специализированных базисных систем для скорости в пространстве H^{div} и давления в пространстве L_2 . Проведены вычислительные эксперименты на классе модельных задач.

Ключевые слова: фильтрация флюида, задача Дарси, смешанная постановка, конечно-элементный метод, разрывный метод Галёркина.

Цитирование: Шурина Э.П., Иткина Н.Б., Трофимова С.А. Математическое моделирование процесса просачивания в пористой среде на базе неконформных смешанных конечно-элементных постановок. Вычислительные технологии. 2020; 25(5):42–54. DOI:10.25743/ICT.2020.25.5.004.

Введение

Теория фильтрации — раздел гидродинамики, который посвящен исследованию движения жидкостей и газов через пористые или трещиновато-пористые среды. Спектр приложений данной теории весьма обширен: проблемы транспортировки жидкостей через пористые биоматериалы в живых организмах, правильной организации ирригации земель в сельском хозяйстве, охраны грунтовых вод от загрязнений отходами производства, удобрениями и прочими продуктами жизнедеятельности человека, задачи гидроэнергетического и гидромелиоративного строительства и нефтегазовой промышленности.

Нефть и природный газ являются одними из основных видов энергетических ресурсов, нефтегазовый комплекс играет ключевую роль в экономике России. Применение методов математического моделирования позволяет классифицировать технологические процедуры, ориентированные на процессы протекания жидкости (газа) в гетерогенных геологических средах, что приводит к необходимости использования самого современного аппарата вычислительных методов.

Для решения задач фильтрации в пористых и трещиновато-пористых средах существуют специальные модели, полученные в результате применения методов осреднения. В этом случае процесс фильтрации рассматривается в однородной среде, физические свойства которой эквивалентны физическим свойствам неоднородной среды. Задача определения физических свойств новой однородной среды рассматривается в рамках теории гомогенизации [1]. Таким образом, соответствующие публикации можно разделить на две категории: работы, посвященные методам решения задач геофизики в гомогенизированной среде, и работы, рассматривающие сложную многомасштабную структуру расчетной области. В данной публикации используются методы, учитывающие гетерогенность геологической среды.

Основным соотношением для теории фильтрации является закон Дарси [2, 3]. Закону Дарси не подчиняются течения неньютоновских жидкостей, течения с достаточно большой скоростью флюида и течения через сыпучие среды крупной фракции. Связано это с высоким влиянием инерционных членов в системе уравнений Навье — Стокса, поскольку в этом случае приближение Стокса дает существенную ошибку [4, 5]. В работах K. Vafai [6], L. Badaea [7] отмечается, что закон Дарси применим для течений с числом Рейнольдса $3 < Re < 10$. Критерий Рейнольдса является характеристикой отношения сил инерции и диссипативного члена в системе уравнений Навье — Стокса.

При моделировании процессов, связанных с разработкой углеводородных месторождений, возникает класс задач, которые не предусматривают определения явного поведения давления на границе области моделирования, однако задают поведение нормальной компоненты скорости. Необходимость решения такого рода прикладных проблем обуславливает использование специализированных смешанных вариационных постановок. В отличие от прямых постановок, применение смешанного метода для решения задачи Дарси позволяет сразу определить как давление, так и скорость течения флюида, при этом осуществляется поиск критической точки соответствующего функционала в конечно-элементном пространстве допустимых пробных функций, которое представимо в виде прямой суммы двух подпространств. Сложность метода состоит в том, что критическая точка функционала — седловая точка [8–10], т.е. решение задачи об определении минимума функционала в общем случае не единственно и для выполнения условий корректности требуется дополнительная информация. Наиболее распространенный подход — введение множителей Лагранжа или определение конечно-элементного базиса из пространства H^{div} , для которого выполнены условия Ладыженской — Бабушки — Бреци (ЛББ) [11, 12]. Такой подход позволяет найти решение, соответствующее физике моделируемых процессов [13–15].

В работе [16] разрабатывается H^{div} -вариация многомасштабного гибридного смешанного метода (multiscale hybrid mixed method) для решения задачи Дарси, смысл которой заключается в использовании на микроуровне смешанных конечных элементов вместо непрерывных элементов. Авторы [17] используют многоточечный потоковый смешанный метод конечных элементов (multipoint flux mixed finite element method) для решения задачи Дарси — Форхгеймера, моделирующей движение сжимаемой жидкости в пористой среде при относительно высоких скоростях. Данный метод основывается на смешанном конечно-элементном методе Brezzi — Douglas — Marini низкого порядка. В работе представлены оценки погрешности метода, а также проведены численные эксперименты для задач, имеющих аналитическое решение. В работе [18] рассматриваются вариационные формулировки конечно-элементного метода для решения задачи Стокса, задачи Стокса — Дарси и задачи Бринкмана, при этом используются

разрывная, H^1 -конформная и H^{div} -конформная аппроксимации для скорости. Особое внимание авторы уделяют вариационной формулировке задачи Стокса на базе разрывного метода Галёркина. Авторы [19] фокусируются на разработке единого подхода для дискретизации задачи Стокса — Дарси, в котором поиск решения и задачи Стокса и задачи Дарси будет осуществляться при помощи конформных конечных элементов (мини-элементов) в смешанной постановке. Проводятся численные эксперименты для задач, имеющих аналитическое решение.

В данном исследовании разрабатывается, реализуется и верифицируется вычислительная схема на базе неконформных смешанных вариационных постановок для решения задачи Дарси в гетерогенной геологической среде. Предлагается использовать специальный иерархический базис, повышающий устойчивость дискретного аналога вариационной постановки без использования дополнительных стабилизаторов. Проводятся исследования построенной вычислительной схемы на классе модельных задач, приближенных к реальным, при этом расчетная область содержит прямоугольные глинистые включения различных размера и направленности.

В настоящей работе применяется разрывный метод Галёркина (DG-метод) для получения конечно-элементного приближения. Он имеет ряд преимуществ перед стандартным методом конечных элементов при решении задач в сложно построенных геологических областях. Основная идея DG-метода заключается в локальной аппроксимации решения на каждом конечном элементе и определении решения на межэлементных границах при помощи специальных операторов следа функций — “численных потоков”. Потоки вводятся для обеспечения сходимости численного решения к физически релевантному решению без осцилляций вблизи разрывов. В зависимости от вида потоков можно получить вычислительную схему с различными свойствами [20].

1. Смешанная вариационная формулировка на базе разрывного метода Галёркина и дискретный аналог

Пусть $\Omega \subset R^2$ — ограниченная двумерная область с границей $\partial\Omega = \Gamma_D$, модель Дарси описывается системой уравнений для скорости \mathbf{u} и давления p :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = -K\nabla p & \text{в } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = f & \text{в } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

где K — симметричный положительно определенный тензор.

Введем бесконечномерное пространство Лебега $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением $(v, w)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} vwd\Omega$ и нормой $\|v\|_{L_2(\Omega)} = (v, v)_{L_2(\Omega)}^{1/2}$ и гильбертово пространство векторных функций:

$$H^{div}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in (L_2(\Omega))^2, \nabla \cdot \mathbf{v} \in L_2(\Omega)\}.$$

Смешанная формулировка для задачи Дарси имеет вид [21]: найти $(\mathbf{u}, p) \in H^{div}(\Omega) \times L_2(\Omega)$ такие, что

$$\begin{cases} (K^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L_2(\Omega)} - (p, \nabla \cdot \mathbf{v})_{L_2(\Omega)} = 0 & \forall \mathbf{v} \in H^{div}(\Omega), \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}, q)_{L_2(\Omega)} = (f, q)_{L_2(\Omega)} & \forall q \in L_2(\Omega). \end{cases}$$

Пусть $\Xi_h = \{T\}$ — разбиение расчетной области Ω на прямоугольные конечные элементы T . Тогда $\Gamma = \bigcup_T \partial T$ — множество границ элементов T , $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \partial\Omega$. Введем конечно-элементные подпространства следующим образом:

$$V_h = \{ \mathbf{v} \in (L_2(\Omega))^2 : \mathbf{v}|_T \in (P_l(T))^2 \forall T \in \Xi_h \}, \quad (2)$$

$$Q_h = \{ q \in L_2(\Omega) : q|_T \in P_l(T) \forall T \in \Xi_h \}, \quad (3)$$

где $P_l(T)$ — пространство полиномов степени $l \geq 1$, определенное на элементе T .

В соответствии с [15] смешанная вариационная постановка разрывного метода Галёркина имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} K^{-1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_0} [p] \{ \mathbf{v} \} dS + \int_{\Gamma_D} (pn) \cdot \mathbf{v} dS - \\ - \theta \int_{\Omega} (K^{-1} \mathbf{u} + \nabla p) \cdot \mathbf{v} d\Omega = 0, \\ - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} q d\Omega + \int_{\Gamma_0} \{ \mathbf{u} \} [q] dS + \int_{\Gamma_D} \mathbf{u} \cdot (qn) dS + \delta \theta \int_{\Omega} (\mathbf{u} + K \nabla p) \cdot \nabla q d\Omega = \\ = \int_{\Omega} f q d\Omega - \int_{\Gamma_D} g q dS, \end{array} \right. \quad (4)$$

где θ — параметр стабилизации; $\delta = \pm 1$, $[\cdot]$ — оператор скачка; $\{\cdot\}$ — оператор среднего.

Построение конечно-элементных подпространств (2), (3) необходимо выполнять с учетом теорем вложения С. Л. Соболева [22]. Диаграмма DeRham'a для области $\Omega \subset R^2$:

$$\begin{array}{ccccc} H^1 & \xrightarrow{\nabla \times} & H^{div} & \xrightarrow{\nabla \cdot} & L_2, \\ \cup & & \cup & & \cup \\ S_h & \xrightarrow{\nabla \times} & V_h & \xrightarrow{\nabla \cdot} & Q_h. \end{array}$$

В данной работе рассматривается двумерная расчетная область с разбиением на прямоугольные согласованные конечные элементы.

Построение иерархического базиса в пространстве H^{div} для скорости осуществляется с учетом конформности, которая подразумевает выполнение требования непрерывности нормальных компонент базисных функций на межэлементных границах. Базисные функции строятся как результат тензорного произведения ортогональных полиномов, заданных на прямоугольном носителе, само пространство при этом представляется в виде прямой суммы двух подпространств: подпространства дивергентно свободных функций и подпространства недивергентно свободных функций [23].

Построение базиса для давления в пространстве L_2 осуществляется путем введения двух одномерных разрывных функций и одной непрерывной одномерной функции [24]. Двумерные биквадратичные базисные функции получаем в виде тензорного произведения одномерных квадратичных базисных функций.

Для устойчивости смешанных методов конечномерные подпространства должны удовлетворять условию совместимости, полученному Ладыженской (1969), Бабушкой (1970) и Бреucci (1974). Для существования и единственности конечно-элементного решения задачи (5) должно выполняться условие ЛББ [11, 12]:

$$\inf_{p \in Q_h} \sup_{\mathbf{v} \in V_h} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}, p)_{L_2(\Omega)}}{\|p\|_{L_2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^3}} \geq \alpha > 0, \quad (5)$$

где α не зависит от размерности конечно-элементной сетки.

Определим искомые скорость и давление в виде разложения по базисным функциям из подпространств (2), (3) соответственно:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N^u} q_i^u \psi_i^u, \quad \psi_i^u \in V_h, \quad (6)$$

$$p = \sum_{i=1}^{N^p} q_i^p \psi_i^p, \quad \psi_i^p \in Q_h. \quad (7)$$

Подставив (6), (7) в (4), получим дискретный аналог вариационной постановки:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} K^{-1} \left(\sum_{j=1}^{N^u} q_j^u \psi_j^u \right) \psi_i^u d\Omega - \int_{\Omega} \left(\sum_{j=N^u+1}^{N^u+N^p} q_j^p \psi_{j-N^u}^p \right) \nabla \psi_i^u d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_0} \left[\left(\sum_{j=N^u+1}^{N^u+N^p} q_j^p \psi_{j-N^u}^p \right) \right] \{ \psi_i^u \} dS + \int_{\Gamma_D} \left(\sum_{j=N^u+1}^{N^u+N^p} q_j^p \psi_{j-N^u}^p \right) n \psi_i^u dS - \\ - \theta \int_{\Omega} K^{-1} \left(\sum_{j=1}^{N^u} q_j^u \psi_j^u \right) \psi_i^u d\Omega - \theta \int_{\Omega} \left(\sum_{j=N^u+1}^{N^u+N^p} q_j^p \nabla \psi_{j-N^u}^p \right) \psi_i^u d\Omega = 0, \quad i = \overline{1, N^u}, \\ - \int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{j=1}^{N^u} q_j^u \psi_j^u \right) \psi_i^p d\Omega + \int_{\Gamma_0} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{N^u} q_j^u \psi_j^u \right) \right\} [\psi_i^p] dS + \\ + \int_{\Gamma_D} \left(\sum_{j=1}^{N^u} q_j^u \psi_j^u \right) (\psi_i^p n) dS + \delta\theta \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{N^u} q_j^u \psi_j^u \right) \nabla \psi_i^p d\Omega + \\ + \delta\theta \int_{\Omega} K \left(\sum_{j=N^u+1}^{N^u+N^p} q_j^p \nabla \psi_{j-N^u}^p \right) \nabla \psi_i^p d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{N^u} f_j^u \psi_j^u + \sum_{j=1}^{N^p} f_j^p \psi_j^p \right) \psi_i^p d\Omega - \\ - \int_{\Gamma_D} \left(\sum_{j=1}^{N^u} g_j^u \psi_j^u + \sum_{j=1}^{N^p} g_j^p \psi_j^p \right) \psi_i^p dS, \\ i = \overline{N^u + 1, N^u + N^p}. \end{array} \right.$$

В итоге получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\tilde{A} \tilde{q} = \tilde{f}$$

с матрицей, имеющей блочную структуру:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^u \\ q^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix},$$

где элементы блоков матрицы и вектора правой части вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\Omega} K^{-1} \psi_j^u \psi_i^u d\Omega - \theta \int_{\Omega} K^{-1} \psi_j^u \psi_i^u d\Omega, \\ b_{ij} &= - \int_{\Omega} \psi_j^p \nabla \psi_i^u d\Omega + \int_{\Gamma_0} [\psi_j^p] \{ \psi_i^u \} dS + \int_{\Gamma_D} (\psi_j^p n) \psi_i^u dS - \\ &- \theta \int_{\Omega} \nabla \psi_j^p \psi_i^u d\Omega, \quad i = \overline{1, N^u}, \quad j = \overline{1, N^p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{ij} &= - \int_{\Omega} \nabla \psi_j^u \psi_i^p d\Omega + \int_{\Gamma_0} \{ \psi_j^u \} [\psi_i^p] dS + \int_{\Gamma_D} \psi_j^u (\psi_i^p n) dS + \\
 &\quad + \delta\theta \int_{\Omega} \psi_j^u \nabla \psi_i^p d\Omega, \quad i = \overline{1, N^p}, \quad j = \overline{1, N^u}, \\
 d_{ij} &= \delta\theta \int_{\Omega} K \nabla \psi_j^p \nabla \psi_i^p d\Omega, \quad i = \overline{1, N^p}, \quad j = \overline{1, N^p}, \\
 f_i &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{N^u} f_i^u \psi_i^u + \sum_{i=1}^{N^p} f_i^p \psi_i^p \right) \psi_j^p d\Omega - \int_{\Gamma_D} \left(\sum_{i=1}^{N^u} g_i^u \psi_i^u + \sum_{i=1}^{N^p} g_i^p \psi_i^p \right) \psi_j^p dS, \quad j = \overline{1, N^p}.
 \end{aligned}$$

Реализация различных стратегий нумерации конечных элементов и степеней свободы позволяет построить матрицу СЛАУ определенной структуры. Учитывая специфику формирования матрицы дискретного аналога разрывного метода Галёркина, используем нумерацию, которая позволит оптимизировать структуру матрицы.

2. Вычислительные эксперименты

При разработке нефтяных месторождений наиболее распространенной на практике системой площадного расположения скважин является пятиточечная. Элемент такой системы — квадрат, в углах которого находятся добывающие скважины, а в центре — нагнетательная (рис. 1).

Моделируя физические процессы в такой системе, расчетную область зачастую представляют в виде четверти всей системы, т. е. прямоугольной области с нагнетательной скважиной в левом нижнем углу и добывающей скважиной в верхнем правом углу. Такой вид расчетной области представляет интерес для ряда авторов (см., например, работы [14, 25]).

2.1. Задача 1. Область с прямоугольными разнонаправленными глинистыми включениями

Рассмотрим вариационную постановку (4). Пусть расчетная область $\Omega = [0, 300] \times [0, 300]$ (в метрах) представлена на рис. 2, в левом нижнем углу показан вектор скорости нагнетания, а в правом верхнем — вектор скорости стока, коэффициент проницаемости среды (соответствует песчанику) $K = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$, коэффициент проницаемости

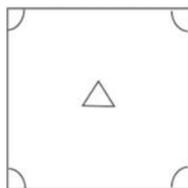


Рис. 1. Пятиточечная система расположения добывающих и нагнетательной скважин
 Fig. 1. The five spot pattern of injector and producer wells

Т а б л и ц а 1. Относительные погрешности в норме L_2 (задача 1)
 Table. 1. Relative errors in the L_2 norm (problem 1)

Шаг сетки h	Количество итераций решателя	Норма вектора невязки	Погрешность давления, $\frac{\ p^{h/2}-p^h\ _{L_2}}{\ p^{h/2}\ _{L_2}}$	Погрешность скорости		
				$\frac{\ u_x^{h/2}-u_x^h\ _{L_2}}{\ u_x^{h/2}\ _{L_2}}$	$\frac{\ u_y^{h/2}-u_y^h\ _{L_2}}{\ u_y^{h/2}\ _{L_2}}$	$\frac{\ \mathbf{u}^{h/2}-\mathbf{u}^h\ _{L_2}}{\ \mathbf{u}^{h/2}\ _{L_2}}$
10.0	818	6.019031e-9	8.92641e-2	2.94295e-2	3.00745e-2	2.97455e-2
5.0	1421	8.200960e-9		1.93658e-2	1.97597e-2	1.95586e-2
2.5	2348	6.518210e-9				

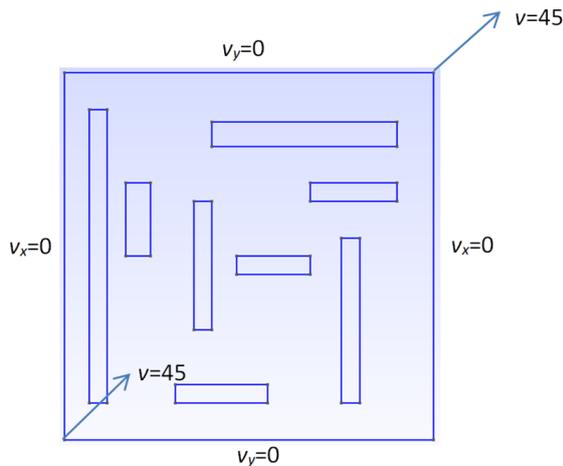


Рис. 2. Расчетная область (задачи 1, 2)
 Fig. 2. Computational domain (problems 1, 2)

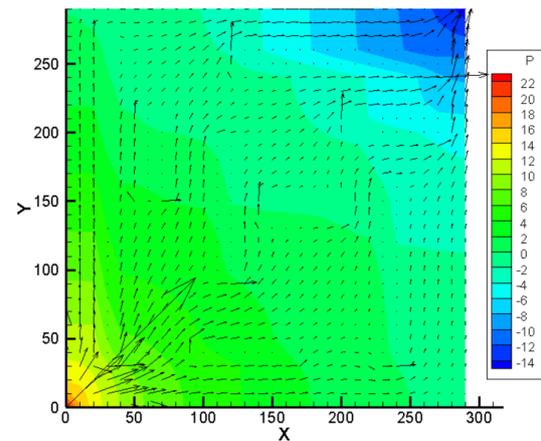


Рис. 3. Численные поля давления и векторы скорости (задача 1)
 Fig. 3. Computed pressure fields and velocity vectors (problem 1)

включений (соответствует глине) $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, правая часть второго уравнения системы (1) $f = 0$. В табл. 1 приведены относительные погрешности вычислений в норме L_2 . На рис. 3 представлены численные поля давления и векторы скорости.

2.2. Задача 2. Контрастная проницаемость среды по отношению к включениям для области с прямоугольными разнонаправленными глинистыми включениями

Рассмотрим вариационную постановку (4). Пусть расчетная область $\Omega = [0, 300] \times [0, 300]$ (в метрах) представлена на рис. 2, коэффициент проницаемости включений (соответствует глине) $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, правая часть второго уравнения системы (1) $f = 0$, шаг сетки $h = 10.0$ и $h/2 = 5.0$. В табл. 2 представлены относительные погрешности вычислений в норме L_2 , на рис. 4 — численные поля давления и векторы скорости.

Т а б л и ц а 2. Относительные погрешности в норме L_2 (задача 2)
 Table 2. Relative errors in the L_2 norm (problem 2)

Проницаемость среды K	Количество итераций решателя		Погрешность давления $\frac{\ p^{h/2}-p^h\ _{L_2}}{\ p^{h/2}\ _{L_2}}$	Погрешность скорости		
	h	$h/2$		$\frac{\ u_x^{h/2}-u_x^h\ _{L_2}}{\ u_x^{h/2}\ _{L_2}}$	$\frac{\ u_y^{h/2}-u_y^h\ _{L_2}}{\ u_y^{h/2}\ _{L_2}}$	$\frac{\ \mathbf{u}^{h/2}-\mathbf{u}^h\ _{L_2}}{\ \mathbf{u}^{h/2}\ _{L_2}}$
$\begin{bmatrix} 10^2 & 0 \\ 0 & 10^2 \end{bmatrix}$	820	1499	8.79875e-2	3.08487e-2	3.17311e-2	3.12793e-2
$\begin{bmatrix} 10^3 & 0 \\ 0 & 10^3 \end{bmatrix}$	817	1532	8.54743e-2	3.24394e-2	3.36742e-2	3.30385e-2
$\begin{bmatrix} 10^4 & 0 \\ 0 & 10^4 \end{bmatrix}$	717	1097	8.50906e-2	3.26238e-2	3.39049e-2	3.32449e-2
$\begin{bmatrix} 10^5 & 0 \\ 0 & 10^5 \end{bmatrix}$	580	919	8.50509e-2	3.26425e-2	3.39285e-2	3.32659e-2
$\begin{bmatrix} 10^6 & 0 \\ 0 & 10^6 \end{bmatrix}$	505	837	8.5048e-2	3.26458e-2	3.39311e-2	3.32689e-2
$\begin{bmatrix} 10^7 & 0 \\ 0 & 10^7 \end{bmatrix}$	413	643	8.50915e-2	3.26543e-2	3.39386e-2	3.32773e-2
$\begin{bmatrix} 10^8 & 0 \\ 0 & 10^8 \end{bmatrix}$	181	501	8.88594e-2	3.45524e-2	3.87065e-2	3.66110e-2

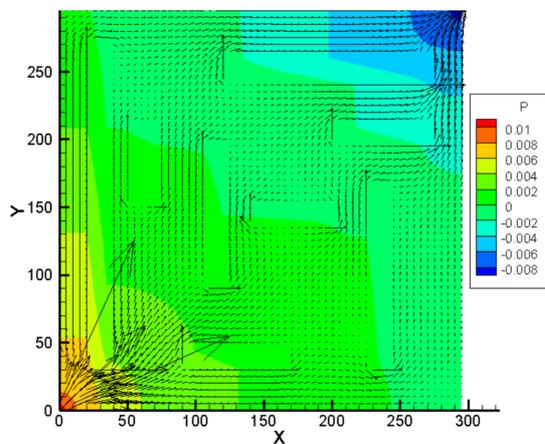


Рис. 4. Численные поля давления при коэффициенте проницаемости среды $K = \begin{bmatrix} 10^5 & 0 \\ 0 & 10^5 \end{bmatrix}$ (задача 2)
 Fig. 4. Calculated pressure fields for the medium permeability coefficient $K = \begin{bmatrix} 10^5 & 0 \\ 0 & 10^5 \end{bmatrix}$ (problem 2)

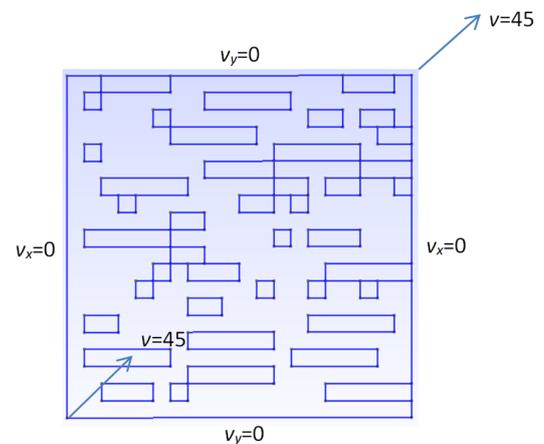


Рис. 5. Расчетная область (задачи 3, 4)
 Fig. 5. Computational domain (problems 3, 4)

2.3. Задача 3. Область с большой концентрацией прямоугольных глинистых включений

Рассмотрим вариационную постановку (4). Пусть расчетная область $\Omega = [0, 300] \times [0, 300]$ (в метрах) представлена на рис. 5, в левом нижнем углу показан вектор скорости

нагнетания, а в правом верхнем — вектор скорости стока, коэффициент проницаемости среды (соответствует песчанику) $K = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$, коэффициент проницаемости включений (соответствует глине) $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, правая часть второго уравнения системы (1) $f = 0$. В табл. 3 представлены относительные погрешности вычислений в норме L_2 , на рис. 6 — численные поля давления и векторы скорости, полученные на сетке $h = 2.5$.

Т а б л и ц а 3. Относительные погрешности в норме L_2 (задача 3)
Table 3. Relative errors in the L_2 norm (problem 3)

Шаг сетки h	Количество итераций решателя	Норма вектора невязки	Погрешность давления $\frac{\ p^{h/2}-p^h\ _{L_2}}{\ p^{h/2}\ _{L_2}}$	Погрешность скорости		
				$\frac{\ u_x^{h/2}-u_x^h\ _{L_2}}{\ u_x^{h/2}\ _{L_2}}$	$\frac{\ u_y^{h/2}-u_y^h\ _{L_2}}{\ u_y^{h/2}\ _{L_2}}$	$\frac{\ \mathbf{u}^{h/2}-\mathbf{u}^h\ _{L_2}}{\ \mathbf{u}^{h/2}\ _{L_2}}$
10.0	1635	4.822759e-09	1.37459e-2	6.08559e-2	7.13012e-2	6.56705e-2
5.0	2654	9.806742e-09				
2.5	3975	9.565203e-09	5.45132e-3	4.28522e-2	4.83216e-2	4.53515e-2

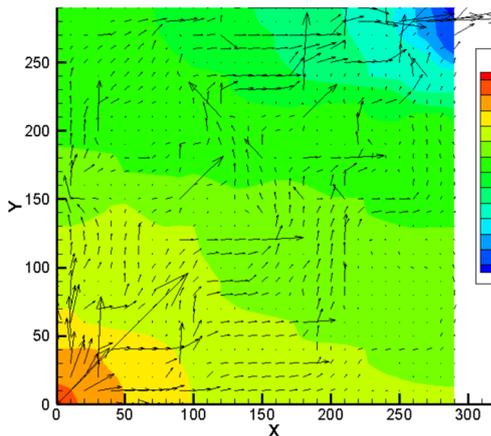


Рис. 6. Численные поля давления и векторы скорости (задача 3)
Fig. 6. Calculated pressure fields and velocity vectors (problem 3)

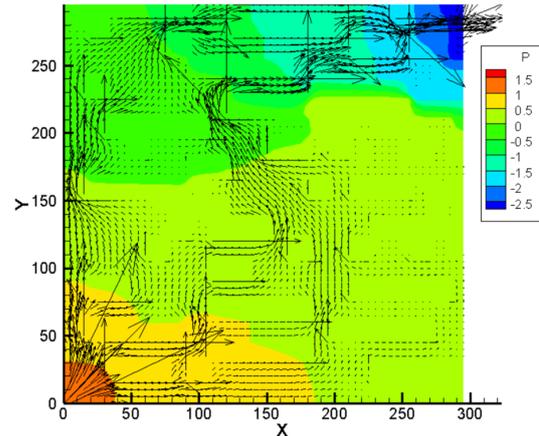


Рис. 7. Численные поля давления и векторы скорости (задача 4)
Fig. 7. Calculated pressure fields and velocity vectors (problem 4)

Т а б л и ц а 4. Относительные погрешности в норме L_2 (задача 4)
Table 4. Relative errors in the L_2 norm (problem 4)

Шаг сетки h	Количество итераций решателя	Норма вектора невязки	Погрешность давления $\frac{\ p^{h/2}-p^h\ _{L_2}}{\ p^{h/2}\ _{L_2}}$	Погрешность скорости		
				$\frac{\ u_x^{h/2}-u_x^h\ _{L_2}}{\ u_x^{h/2}\ _{L_2}}$	$\frac{\ u_y^{h/2}-u_y^h\ _{L_2}}{\ u_y^{h/2}\ _{L_2}}$	$\frac{\ \mathbf{u}^{h/2}-\mathbf{u}^h\ _{L_2}}{\ \mathbf{u}^{h/2}\ _{L_2}}$
10.0	2043	7.032802e-9	1.92745e-2	5.74383e-2	7.20196e-2	6.35809e-2
5.0	3369	7.684368e-9				
2.5	5820	9.919702e-9	6.10529e-3	3.79170e-2	4.7583e-2	4.19894e-2

2.4. Задача 4. Контрастная проницаемость среды по отношению к включениям для области с большой концентрацией прямоугольных включений

Рассмотрим вариационную постановку (4). Пусть расчетная область $\Omega = [0, 300] \times [0, 300]$ (в метрах) представлена на рис. 5, коэффициент проницаемости среды $K = \begin{bmatrix} 10^3 & 0 \\ 0 & 10^3 \end{bmatrix}$, коэффициент проницаемости включений $K = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} \end{bmatrix}$, правая часть второго уравнения системы (1) $f = 0$. В табл. 4 представлены относительные погрешности вычислений в норме L_2 , на рис. 7 — численные поля давления и векторы скорости, полученные на сетке $h = 2.5$.

Заключение

В рамках данного исследования разработана, реализована и верифицирована вычислительная схема, основанная на смешанной неконформной вариационной формулировке, для решения задачи Дарси с тензорным коэффициентом проницаемости среды. При этом для получения конечно-элементного приближения использовался разрывный метод Галёркина.

Исследования на классе приближенных к реальным задач показали, что для расчетной области с разнонаправленными прямоугольными включениями произвольного размера с коэффициентом проницаемости, соответствующим глине, определение численных полей давления и скорости производится с относительной погрешностью $1e-2$ даже на грубой сетке. Увеличение контрастности коэффициента проницаемости среды по отношению к коэффициенту проницаемости включений не дает изменений в относительной погрешности определения численных полей, в связи с этим можно сделать вывод об устойчивости построенной вычислительной схемы к контрастным значениям коэффициента.

Увеличение количества глинистых включений в расчетной области не приводит к росту относительной погрешности вычислений давления и скорости, однако увеличивает число итераций решателя, что свидетельствует о некотором ухудшении свойств матрицы дискретного аналога. Это ведет в свою очередь к увеличению скорости сходимости. Исследование показало, что для области с большой концентрацией прямоугольных включений при контрастности коэффициентов проницаемости среды и включений 10^8 построенная вычислительная схема позволяет получить численные поля давления и скорости с относительной погрешностью $1e-2$.

Авторами разработан и верифицирован программный комплекс, принимающий на вход сеточное разбиение расчетной области в формате `.msh`, полученное при помощи конечно-элементного генератора сеток `Gmsh`. Реализованный программный комплекс предусматривает возможность экспорта готового решения задачи в файл формата `.dat` для дальнейшего графического отображения и анализа в программном пакете `Tecplot`.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке программы ФНИ (проект 0266-209-0007) и Президиума РАН (проект № 27 “Разработка и реализация параллельных вычислительных схем на базе неконформного метода конечных элементов для моделирования гидроразрыва”).

Список литературы

- [1] **Kouznetsova V.G.** Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven; 2002: 134.
- [2] **Леонтьев Н.Е.** Основы теории фильтрации: Учеб. пособие. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ; 2009: 88.
- [3] **Лейбензон Л.С.** Подземная гидрогазодинамика. М.: АН СССР; 1953: 544.
- [4] **Беляев А.Ю.** Усреднение в задачах теории фильтрации. М.: Наука; 2004: 198. ISBN:5-02-032909-6.
- [5] **Wang Y., Wang S., Xue Sh., Adhikary D.** Numerical modeling of porous flow in fractured rock and its applications in geothermal energy extraction. *J. Earth Sci.* 2015; 26(1):20–27.
- [6] **Vafai K.** Handbook of porous media. Second ed. LLC USA: Taylor Francis Group; 2005: 727.
- [7] **Badea L., Discacciati M., Quarteroni A.** Numerical analysis of the Navier — Stokes/Darcy coupling. *Numerische Mathematik.* 2010; 115(2):195–227.
- [8] **Arnold D.N.** Mixed finite element methods for elliptic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 1990; (82):281–300.
- [9] **Brezzi F.** On the existence, uniqueness, and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers. *RAIRO Analyse Numérique.* 1974; (2):129–151. Available at: <https://doi.org/10.1051/m2an/197408R201291>
- [10] **Arnold D.N., Brezzi F.** Mixed and nonconforming finite element methods: Implementation, postprocessing and error estimates. *Math. Modelling and Numer. Anal.* 1985; (19):7–32.
- [11] **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука; 1970: 288.
- [12] **Brezzi F., Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. New York: Springer-Verlag; 1991: 362.
- [13] **Ainsworth M., Coggins P.** The stability of mixed hp-finite element methods for Stokes flow on high aspect ratio elements. *Siam J. Numer. Anal.* 2000; 38(5):1721–1761.
- [14] **Masud A., Hughes T.J.R.** A stabilized mixed finite element method for Darcy flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2002; (191):4341–4370.
- [15] **Brezzi F., Hughes T.J.R., Marini L.D., Masud A.** Mixed discontinuous Galerkin methods for Darcy flow. *Journal of Scientific Computing.* 2005; 22(1):119–145.
- [16] **Duran O., Devloo P.R.B., Gomes S.M., Valentin F.** A multiscale hybrid method for Darcy’s problems using mixed finite element local solvers. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2019; (354):213–244.
- [17] **Xu W., Liang D., Rui H.** A multipoint flux mixed finite element method for the compressible Darcy — Forchheimer models. *Applied Mathematics and Computation.* 2017; (315):259–277.
- [18] **Carvalho P.G.S., Devloo P.R.B., Gomes S.M.** On the use of divergence balanced H(div)-L2 pair of approximation spaces for divergence-free and robust simulations of Stokes, coupled Stokes — Darcy and Brinkman problems. *Math. and Comp. in Simul.* 2020; (170):51–78.
- [19] **Armentano M.G., Stockdale M.L.** A unified mixed finite element approximations of the Stokes — Darcy coupled problem. *Computers and Math. with Appl.* 2019; (77):2568–2584.
- [20] **Arnold D.N., Brezzi F., Marini L.D.** Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.* 2002; 39(5):1749–1779.
- [21] **Brezzi F., Marini D.** A survey on mixed finite element approximations. *IEEE Transactions on Magnetics.* 1994; 30(5):3547–3551.
- [22] **Соболев С.Л.** Теоремы вложения. Тр. 4 Всесоюз. матем. съезда. Т. 1 Л.; 1963: 227–242.
- [23] **Šolin P., Segeth K., Doležel I.** High-order finite element methods. Chapman and Hall, CRC; 2004: 388.

- [24] Шокин Ю.И., Шурина Э.П., Иткина Н.Б. Современные многосеточные методы. Ч. I. Многомасштабные методы: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ; 2010: 68.
- [25] Bergamaschi L., Mantica S., Saleri F. Mixed finite element approximation of Darcy's law in porous media. Report CRS4 AppMath-94-20, CRS4. Cagliari, Italy; 1994: 21.

Вычислительные технологии, 2020, том 25, № 5, с. 42–54. © ФИЦ ИВТ, 2020
Computational Technologies, 2020, vol. 25, no. 5, pp. 42–54. © FRC ICT, 2020

ISSN 1560-7534
eISSN 2313-691X

MATHEMATICAL MODELLING

DOI:10.25743/ICT.2020.25.5.004

Mathematical modelling of the filtration process in a porous medium based on non-conformal mixed finite element formulation

SHURINA ELLA P.^{1,2}, ITKINA NATALIA B.¹, TROFIMOVA SVETLANA A.^{1,2,*}

¹Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

²Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

*Corresponding author: Trofimova Svetlana A., e-mail: TrofimovaSA@ipgg.sbras.ru

Received June 2, 2020, revised September 17, 2020, accepted September 24, 2020

Abstract

The paper addresses mathematical modelling for the process of fluid filtration in porous geological media under pressure. A computational scheme based on a mixed non-conformal variational formulation for solving the Darcy problem with a tensor coefficient of permeability of the medium was developed, implemented and verified. Moreover, the discontinuous Galerkin method for obtaining the finite element approximation was used.

A specialized hierarchical basis system for velocity in the H^{div} space and a basis system with discontinuous functions on boundaries of finite elements for pressure in the L_2 space were constructed.

Computational experiments on a class of problems close to real ones have shown that for a computational domain with multidirectional rectangular inclusions of arbitrary size and concentration, the numerical fields of pressure and velocity are determined with a relative error of $1e-2$ even on a coarse grid. An increase in the contrast of the permeability coefficient of the medium with respect to the permeability coefficient of inclusions does not change the relative error in determining the numerical fields. To this end, we can conclude that the constructed computational scheme is stable to significant variation of the coefficient.

The authors have developed and verified a software package that is able to export a ready-made solution to the problem in the “.dat” format file for further graphical display and analysis in the Tecplot software package.

Keywords: fluid filtration, Darcy problem, mixed formulation, finite element method, discontinuous Galerkin method.

Citation: Shurina E.P., Itkina N.B., Trofimova S.A. Mathematical modelling of the filtration process in a porous medium based on non-conformal mixed finite element formulation. Computational Technologies. 2020; 25(5):42–54. DOI:10.25743/ICT.2020.25.5.004. (In Russ.)

Acknowledgements. This research was financially supported by Project 0266-209-0007 and Project of the Presidium of the Russian Academy of Sciences No. 27 “Development and implementation of parallel computational schemes based on the non-conformal finite element method for fracturing modelling”.

References

1. **Kouznetsova V.G.** Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven; 2002: 134.
2. **Leont'ev N.E.** Osnovy teorii fil'tratsii. Uchebnoe posobie [Fundamentals of the filtration theory: Study guide]. Moscow: Izd-vo Tsentra prikladnykh issledovaniy pri mekhaniko-matematicheskom fakul'tete MGU; 2009: 88. (In Russ.)
3. **Leybenzon L.S.** Podzemnaya gidrogazodinamika [Underground hydrodynamics]. Moscow: AN SSSR; 1953: 544. (In Russ.)
4. **Belyaev A.Yu.** Usrednenie v zadachakh teorii fil'tratsii [Averaging in filtration theory problems]. Moscow: Nauka; 2004: 198. ISBN:5-02-032909-6. (In Russ.)
5. **Wang Y., Wang S., Xue Sh., Adhikary D.** Numerical modeling of porous flow in fractured rock and its applications in geothermal energy extraction. *Journal of Earth Science*. 2015; 26(1):20–27.
6. **Vafai K.** Handbook of porous media. Second edition. LLC USA: Taylor Francis Group; 2005: 727.
7. **Badea L., Discacciati M., Quarteroni A.** Numerical analysis of the Navier — Stokes/Darcy coupling. *Numerische Mathematik*. 2010; 115(2):195–227.
8. **Arnold D.N.** Mixed finite element methods for elliptic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1990; (82):281–300.
9. **Brezzi F.** On the existence, uniqueness, and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers. *RAIRO Analyse Numérique*. 1974; (2):129–151. Available at: <https://doi.org/10.1051/m2an/197408R201291>
10. **Arnold D.N., Brezzi F.** Mixed and nonconforming finite element methods: Implementation, postprocessing and error estimates. *Math. Modelling and Numer. Anal.* 1985; (19):7–32.
11. **Ladyzhenskaya O.A.** Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti [Mathematical problems of viscous incompressible fluid dynamics]. 2nd ed. Moscow: Nauka; 1970: 288. (In Russ.)
12. **Brezzi F., Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. N.Y.: Springer-Verlag; 1991: 362.
13. **Ainsworth M., Coggins P.** The stability of mixed hp-finite element methods for Stokes flow on high aspect ratio elements. *Siam J. Numer. Anal.* 2000; 38(5):1721–1761.
14. **Masud A., Hughes T.J.R.** A stabilized mixed finite element method for Darcy flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2002; (191):4341–4370.
15. **Brezzi F., Hughes T.J.R., Marini L.D., Masud A.** Mixed discontinuous Galerkin methods for Darcy flow. *Journal of Scientific Computing*. 2005; 22(1):119–145.
16. **Duran O., Devloo P.R.B., Gomes S.M., Valentin F.** A multiscale hybrid method for Darcy's problems using mixed finite element local solvers. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2019; (354):213–244.
17. **Xu W., Liang D., Rui H.** A multipoint flux mixed finite element method for the compressible Darcy — Forchheimer models. *Applied Mathematics and Computation*. 2017; (315):259–277.
18. **Carvalho P.G.S., Devloo P.R.B., Gomes S.M.** On the use of divergence balanced H(div)-L2 pair of approximation spaces for divergence-free and robust simulations of Stokes, coupled Stokes — Darcy and Brinkman problems. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2020; (170):51–78.
19. **Armentano M.G., Stockdale M.L.** A unified mixed finite element approximations of the Stokes — Darcy coupled problem. *Computers and Mathematics with Applications*. 2019; (77):2568–2584.
20. **Arnold D.N., Brezzi F., Marini L.D.** Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.* 2002; 39(5):1749;1779.
21. **Brezzi F., Marini D.** A survey on mixed finite element approximations. *IEEE Transactions on Magnetics*. 1994; 30(5):3547–3551.
22. **Sobolev S.L.** Embedding theorems. *Proc. 4th All-Union Math. Congr.* 1963; (1):227–242. (In Russ.)
23. **Šolin P., Segeth K., Doležal I.** High-order finite element methods. Chapman and Hall, CRC; 2004: 388.
24. **Shokin Yu.I., Shurina E.P., Itkina N.B.** Sovremennye mnogosetochnye metody. Chast' I. Mnogomasshtabnye metody: ucheb. posobie [Modern multigrid methods: Part I. Multiscale methods: Study Guide]. Novosibirsk: Izd-vo NGTU; 2010: 68. (In Russ.)
25. **Bergamaschi L., Mantica S., Saleri F.** Mixed finite element approximation of Darcy's law in porous media. Report CRS4 AppMath-94-20, CRS4. Cagliari, Italy; 1994: 21.