Вычислительные технологии, 2020, том 25, № 3, с. 88–98. © ИВТ СО РАН, 2020 ISSN 1560-7534
Computational Technologies, 2020, vol. 25, no. 3, pp. 88–98. © ICT SB RAS, 2020 eISSN 2313-691X

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

DOI:10.25743/ICT.2020.25.3.010

Квадратно-корневые алгоритмы робастных модификаций непрерывно-дискретного кубатурного фильтра Калмана

В. М. Чубич[†], С. О. Кулабухова
Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия
Контактный автор: Чубич Владимир М., e-mail: chubich@ami.nstu.ru

Поступила 10 марта 2020 г., доработана 17 марта 2020 г., принята в печать 10 апреля 2020 г.

Предложены две устойчивые к ошибкам машинного округления и к аномальным данным квадратно-корневые модификации непрерывно-дискретного кубатурного фильтра Калмана, основанные на вариационном байесовском и коррентропийном подходах. Апробация разработанных алгоритмов на модельной задаче со случайным характером расположения аномальных наблюдений показала их работоспособность при сопоставимом качестве фильтрации. Подтверждена алгебраическая эквивалентность представленных квадратно-корневых и стандартных версий.

Ключевые слова: стохастическая непрерывно-дискретная система, кубатурный фильтр Калмана, квадратно-корневая фильтрация, робастность.

Цитирование: Чубич В.М., Кулабухова С.О. Квадратно-корневые алгоритмы робастных модификаций непрерывно-дискретного кубатурного фильтра Калмана. Вычислительные технологии. 2020; 25(3):88–98.

Введение

В настоящее время все большую популярность у исследователей и практиков при решении различных задач, требующих применения аппарата нелинейной фильтрации, приобретают сигма-точечные (UKF, от англ. Unscented Kalman filter) и кубатурные (CKF, от англ. Cubature Kalman filter) фильтры Калмана, которые, в отличие от традиционно используемого расширенного фильтра Калмана [1], не предполагают линеаризацию и обладают высоким порядком аппроксимации статистических характеристик исследуемых процессов.

В UKF [2, 3] на каждом шаге для аппроксимации первого и второго моментов вектора состояния строится детерминированный набор сигма-точек. При этом уравнения фильтра содержат неизвестные параметры, значения которых нужно дополнительно подбирать для каждой задачи. От указанного недостатка свободен CKF [4, 5], основанный на применении кубатурного правила третьего порядка при вычислении вероятностных интегралов [6].

С прикладной точки зрения для всех методов фильтрации важным является наличие их робастной модификации. В данной работе под термином “робастность” мы будем понимать статистическую устойчивость к выбросам и вычислительную устойчивость к ошибкам машинного округления. Массовое появление устойчивых к аномальным данным алгоритмов, базирующихся на разнообразных подходах [7–10], связано с часто встречающимися практическими ситуациями. Значительное влияние на качество фильтрации могут оказать также и ошибки округления, обусловленные конечной длиной машинного слова. В связи с этим целесообразно применение эквивалентных квадратно-корневых модификаций [11–13] используемых алгоритмов. Подчеркнем, что CKF, в отличие от UKF, обладают алгебраически эквивалентными квадратно-корневыми версиями.

Сравнительный анализ современных перспективных модификаций непрерывно-дискретного CKF (CD-CKF, от англ. Continuous-discrete cubature Kalman filter), устойчивых к появлению аномальных данных, позволил в [14] выявить два наиболее эффективных фильтра. В настоящей работе предложены численно устойчивые модификации этих фильтров, CD-VBSCKF (от англ. Continuous-discrete variational Bayesian-based square-root cubature Kalman filter) и CD-MCSCKF (от англ. Continuous-discrete maximum correntropy square-root cubature Kalman filter), апробированные на примере одной модельной структуры.

1. Структурно-вероятностное описание модели

Рассмотрим следующую модель управляемой и наблюдаемой стохастической нелинейной непрерывно-дискретной системы в пространстве состояний

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}\left[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right] + \Gamma(t)\,\mathbf{w}(t), \quad t \in [t_0, t_N],$$

$$\mathbf{y}(t_{k+1}) = \mathbf{h}\left[\mathbf{x}(t_{k+1}), \mathbf{u}(t_{k+1}), t_{k+1}\right] + \mathbf{v}(t_{k+1}), \quad k = \overline{0, N-1},$$

где $\mathbf{x}(\cdot)$ — n-вектор состояния, $\mathbf{u}(\cdot)$ — детерминированный r-вектор управления, $\mathbf{w}(\cdot)$ — p-вектор шума системы, $\mathbf{y}(\cdot)$ — m-вектор измерения, $\mathbf{v}(\cdot)$ — m-вектор шума измерения.

Будем считать, что:

- случайные процессы $\{\mathbf{w}(t),\ t \in [t_0, t_N]\}$ и $\left\{\mathbf{v}(t_{k+1}),\ k = \overline{0, N-1}\right\}$ являются белыми гауссовыми шумами, причем

$$E\left[\mathbf{w}(t)\right] = 0, E\left[\mathbf{w}(t)\,\mathbf{w}^T(\tau)\right] = Q(t)\,\delta(t-\tau),$$

$$E\left[\mathbf{v}(t_{k+1})\right] = 0, E\left[\mathbf{v}(t_{k+1})\,\mathbf{v}^T(t_{i+1})\right] = R(t_{k+1})\,\delta_{ki},$$

$$E\left[\mathbf{v}(t_{k+1})\,\mathbf{w}^T(\tau)\right] = 0, \quad k, i = \overline{0, N-1}, \quad \tau \in [t_0, t_N]$$

(здесь и далее $E[\cdot]$ — оператор математического ожидания, $\delta(t-\tau)$ — дельта-функция Дирака, δ_{ki} — символ Кронекера);

- начальное состояние $\mathbf{x}(t_0)$ имеет нормальное распределение с параметрами

$$E\left[\mathbf{x}(t_0)\right] = \bar{\mathbf{x}}(t_0), \quad E\left\{\left[\mathbf{x}(t_0) - \bar{\mathbf{x}}(t_0)\right]\left[\mathbf{x}(t_0) - \bar{\mathbf{x}}(t_0)\right]^T\right\} = P(t_0)$$

  и не коррелирует с $\mathbf{w}(t)$ и $\mathbf{v}(t_{k+1})$;
- ковариационные матрицы шума системы, шума наблюдения и начального состояния известны, причем $R(t_{k+1})$ и $P(t_0)$ положительно определены;
- измерительные данные $\left\{\mathbf{y}(t_{k+1}),\ k = \overline{0, N-1}\right\}$ содержат аномальные наблюдения.

2. Численно устойчивые алгоритмы робастных модификаций CD-CKF

Квадратно-корневые модификации различных вариантов фильтра Калмана предполагают замену ковариационных матриц оценок вектора состояния на этапах экстраполяции и фильтрации на соответствующие множители Холецкого. Это позволяет, несмотря на ошибки машинного округления, обеспечить положительную определенность и симметричность указанных ковариационных матриц.

Для удобства дальнейшего изложения введем следующие обозначения:

$$\boldsymbol{\xi}_i = \begin{cases} \sqrt{n}\mathbf{e}_i, & i = \overline{1, n}, \\ -\sqrt{n}\mathbf{e}_{i-n}, & i = \overline{n+1, 2n}, \end{cases}$$

где $\mathbf{e}_i = \Big(0, ..., \underset{i-1}{0}, \underset{i}{1}, \underset{i+1}{0}, ..., 0\Big)^T$ — узлы кубатурной формулы; $S = Chol\,[P]$ — нижний треугольный множитель Холецкого для матрицы P $\left(SS^T = P\right)$; $S = Tria\,[A]$ — нижняя треугольная матрица, полученная путем триангуляризации (QR-разложения) прямоугольной матрицы A $\left(SS^T = AA^T\right)$ (см., например, [15]); $[A\,|\,B]$ — горизонтальная конкатенация матриц A и B;

$$\Phi_{ij}\{A\} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & i > j, \\ 0.5\alpha_{ij}, & i = j, \\ 0, & i < j, \end{cases}$$

где α_{ij} — ij-й элемент симметричной матрицы A; $G_\sigma(\alpha) = \exp\left(-\dfrac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right)$ — значение гауссова ядра с параметром $\sigma > 0$ в точке α.

2.1. CD-VBSCKF

Квадратно-корневая версия непрерывно-дискретного вариационного байесовского кубатурного фильтра Калмана получена путем замены уравнений для этапа экстраполяции из [9] соответствующими формулами из [5]. Данный фильтр предполагает использование параметров: v_0 — скаляр; V_0 — квадратная матрица порядка m; L — количество итераций на шаге фильтрации; ρ — коэффициент масштабирования, выбирается из интервала $(0, 1]$. Оптимальные значения этих параметров будем находить подбором путем минимизации накопленной средней квадратичной ошибки как для каждой конкретной задачи, так и для каждой выборки отдельно.

Алгоритм CD-VBSCKF

1. Инициализация начальных значений:

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0|t_0) = \bar{\mathbf{x}}(t_0), \quad S(t_0|t_0) = Chol\,[P(t_0)], \quad v(t_0|t_0) = v_0, \quad V(t_0|t_0) = V_0.$$

Выполнять в цикле по $k = \overline{0, N-1}$:

2. Этап экстраполяции. Получить $\hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_k)$ и $S(t_{k+1}|t_k)$, решая систему дифференциальных уравнений для $t \in [t_k, t_{k+1}]$:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t|t_k)}{dt} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} \mathbf{f}\left[\hat{\mathbf{x}}(t|t_k) + S(t|t_k)\,\boldsymbol{\xi}_i, \mathbf{u}(t), t\right]; \qquad (1)$$

$$\frac{dS\left(t|t_k\right)}{dt}=S\left(t|t_k\right)\Phi\left\{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}S^{-1}\left(t|t_k\right)\mathbf{f}\left[\hat{\mathbf{x}}\left(t|t_k\right)+S\left(t|t_k\right)\boldsymbol{\xi}_i,\mathbf{u}\left(t\right),t\right]\boldsymbol{\xi}_i^T+\right.$$

$$+\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\boldsymbol{\xi}_i\mathbf{f}^T\left[\hat{\mathbf{x}}\left(t|t_k\right)+S\left(t|t_k\right)\boldsymbol{\xi}_i,\mathbf{u}\left(t\right),t\right]S^{-T}\left(t|t_k\right)+$$

$$\left.+\,S^{-1}\left(t|t_k\right)\Gamma\left(t\right)Q\left(t\right)\Gamma^T\left(t\right)S^{-T}\left(t|t_k\right)\right\}. \tag{2}$$

Вычислить

$$v\left(t_{k+1}|t_k\right)=\rho\left(v\left(t_k|t_k\right)-n-1\right)+n+1;$$

$$V\left(t_{k+1}|t_k\right)=\rho V\left(t_k|t_k\right).$$

3. Этап фильтрации. Определить

$$\boldsymbol{\chi}_i\left(t_{k+1}|t_k\right)=\hat{\mathbf{x}}\left(t_{k+1}|t_k\right)+S\left(t_{k+1}|t_k\right)\boldsymbol{\xi}_i,\quad i=\overline{1,2n}; \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_i\left(t_{k+1}|t_k\right)=\mathbf{h}\left[\boldsymbol{\chi}_i\left(t_{k+1}|t_k\right),\mathbf{u}\left(t_{k+1}\right),t_{k+1}\right],\quad i=\overline{1,2n}; \tag{4}$$

$$\hat{\mathbf{y}}\left(t_{k+1}|t_k\right)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\boldsymbol{\gamma}_i\left(t_{k+1}|t_k\right); \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}\left(t_{k+1}\right)=\mathbf{y}\left(t_{k+1}\right)-\hat{\mathbf{y}}\left(t_{k+1}|t_k\right); \tag{6}$$

$$X\left(t_{k+1}|t_k\right)=\frac{1}{\sqrt{2n}}\left[\ \boldsymbol{\chi}_1\left(t_{k+1}|t_k\right)-\hat{\mathbf{x}}\left(t_{k+1}|t_k\right)\ \mid\ldots\mid\ \boldsymbol{\chi}_{2n}\left(t_{k+1}|t_k\right)-\hat{\mathbf{x}}\left(t_{k+1}|t_k\right)\ \right]; \tag{7}$$

$$Y\left(t_{k+1}|t_k\right)=\frac{1}{\sqrt{2n}}\left[\ \boldsymbol{\gamma}_1\left(t_{k+1}|t_k\right)-\hat{\mathbf{y}}\left(t_{k+1}|t_k\right)\ \mid\ldots\mid\ \boldsymbol{\gamma}_{2n}\left(t_{k+1}|t_k\right)-\hat{\mathbf{y}}\left(t_{k+1}|t_k\right)\ \right]; \tag{8}$$

$$P_{xy}\left(t_{k+1}|t_k\right)=X\left(t_{k+1}|t_k\right)Y^T\left(t_{k+1}|t_k\right); \tag{9}$$

$$V^0\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)=V\left(t_{k+1}|t_k\right);\quad v\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)=1+v\left(t_{k+1}|t_k\right).$$

Выполнять в цикле по $j=\overline{1,L}$:

$$R^j\left(t_{k+1}\right)=\left(v\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)-n-1\right)^{-1}V^{j-1}\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right);$$

$$S_R^j\left(t_{k+1}\right)=Chol\left[R^j\left(t_{k+1}\right)\right];$$

$$S_{yy}^j\left(t_{k+1}|t_k\right)=Tria\left[\,Y\left(t_{k+1}|t_k\right)\ \mid S_R^j\,\right];$$

$$K^j\left(t_{k+1}\right)=P_{xy}\left(t_{k+1}|t_k\right)\left[S_{yy}^j\left(t_{k+1}|t_k\right)\right]^{-T}\left[S_{yy}^j\left(t_{k+1}|t_k\right)\right]^{-1};$$

$$\hat{\mathbf{x}}^j\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)=\hat{\mathbf{x}}\left(t_{k+1}|t_k\right)+K^j\left(t_{k+1}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(t_{k+1}\right);$$

$$S^j\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)=Tria\left[\ X\left(t_{k+1}|t_k\right)-K^j\left(t_{k+1}\right)Y\left(t_{k+1}|t_k\right)\ \mid K^j\left(t_{k+1}\right)S_R^j\left(t_{k+1}\right)\ \right];$$

$$\boldsymbol{\chi}_i^j\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)=\hat{\mathbf{x}}^j\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)+S^j\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)\boldsymbol{\xi}_i,\quad i=\overline{1,2n};$$

$$\boldsymbol{\gamma}_i^j\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)=\mathbf{h}\left[\boldsymbol{\chi}_i^j\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right),\mathbf{u}\left(t_{k+1}\right),t_{k+1}\right],\quad i=\overline{1,2n};$$

$$V^j\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)=V\left(t_{k+1}|t_k\right)+\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\left[\mathbf{y}\left(t_{k+1}\right)-\boldsymbol{\gamma}_i^j\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)\right]\left[\mathbf{y}\left(t_{k+1}\right)-\boldsymbol{\gamma}_i^j\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)\right]^T.$$

Конец цикла по j

$$V\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)=V^L\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right);$$
$$\hat{\mathbf{x}}\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)=\hat{\mathbf{x}}^L\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right);$$
$$S\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)=S^L\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right).$$

Конец цикла по k.

2.2. CD-MCSCKF

Алгоритм квадратно-корневой версии непрерывно-дискретного кубатурного фильтра Калмана на основе критерия максимума коррентропии разработан с использованием материалов статей [4, 5, 10, 16]. Вывод соотношений для CD-MCSCKF осуществлен в Приложении.

Данный фильтр использует гауссово ядро со скалярным параметром σ. К сожалению, не существует каких-либо общих рекомендаций по оптимальному выбору значения этого параметра, которое зависит не только от конкретной задачи, но и от выборки. Как и в случае с CD-VBSCKF, будем находить оптимальное значение подбором.

Алгоритм CD-MCSCKF

1. Инициализация начальных значений:

$$\hat{\mathbf{x}}\left(t_0|t_0\right)=\bar{\mathbf{x}}\left(t_0\right),\quad S\left(t_0|t_0\right)=Chol\left[P\left(t_0\right)\right].$$

Выполнять в цикле по $k=\overline{0,N-1}$:

2. Этап экстраполяции. Решить систему (1), (2).

3. Этап фильтрации. Вычислить выражения (3)–(9), найти

$$H\left(t_{k+1}\right)=P_{xy}^T\left(t_{k+1}|t_k\right)\left[S^{-1}\left(t_{k+1}|t_k\right)\right]^TS^{-1}\left(t_{k+1}|t_k\right);\tag{10}$$
$$S_R\left(t_{k+1}\right)=Chol\left[R\left(t_{k+1}\right)\right];$$

$$\hat{S}_R\left(t_{k+1}\right)=Tria\left[\,Y\left(t_{k+1}|t_k\right)-H\left(t_{k+1}\right)X\left(t_{k+1}|t_k\right)\ |\ S_R\left(t_{k+1}\right)\right];\tag{11}$$

$$L\left(t_{k+1}\right)=G_\sigma\left(\left[\boldsymbol{\varepsilon}^T\left(t_{k+1}\right)\left[\hat{S}_R\left(t_{k+1}\right)\hat{S}_R^T\left(t_{k+1}\right)\right]^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\left(t_{k+1}\right)\right]^{1/2}\right);\tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} S_B\left(t_{k+1}\right) & 0_{m\times n}\\ \tilde{K}\left(t_{k+1}\right) & S\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)\end{bmatrix}=Tria\begin{bmatrix}\hat{S}_R\left(t_{k+1}\right) & \sqrt{L\left(t_{k+1}\right)}H\left(t_{k+1}\right)S\left(t_{k+1}|t_k\right)\\ 0_{n\times m} & S\left(t_{k+1}|t_k\right)\end{bmatrix};\tag{13}$$

$$\hat{\mathbf{x}}\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)=\hat{\mathbf{x}}\left(t_{k+1}|t_k\right)+\sqrt{L\left(t_{k+1}\right)}\tilde{K}\left(t_{k+1}\right)S_B^{-1}\left(t_{k+1}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(t_{k+1}\right).\tag{14}$$

Конец цикла.

3. Вычислительный эксперимент

Апробируем предложенные квадратно-корневые алгоритмы на модели стохастической нелинейной системы из [17], выбрав $\theta_1 = 4$ и $\theta_2 = 0.5$. Тогда

$$f\left[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right] = -0.125\mathbf{x}(t) + 0.0025\left[\mathbf{u}(t) - \mathbf{x}(t)\right] e^{0.25[\mathbf{u}(t)-\mathbf{x}(t)]}, \quad t \in [t_0, t_N];$$

$$h\left[\mathbf{x}(t_{k+1}), \mathbf{u}(t_{k+1}), t_{k+1}\right] = \mathbf{x}(t_{k+1}), \quad k = \overline{0, N-1};$$

$$\Gamma(t) = \Gamma = 0.025, \quad Q(t) = Q = 0.8, \quad R(t_{k+1}) = R = 0.4, \quad \bar{\mathbf{x}}(t_0) = 0, \quad P(t_0) = 0.01.$$

Будем считать, что

$$t_0 = 0, \quad N = 31, \quad t_{k+1} = k + 1, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{cases} 15, & \text{где } t \in [0, 21), \\ 10, & \text{где } t \in [21, 31], \end{cases}$$

и выполнены все априорные предположения, высказанные при структурно-вероятностном описании модели.

Для уменьшения влияния результатов от конкретной реализации осуществим $M = 100$ независимых запусков системы со случайно расположенными аномальными наблюдениями, смоделированных с коэффициентом загрязнения 20 % и дисперсией шума выбросов $R_A(t_{k+1}) = 1000R(t_{k+1})$. Вычислим для CD-VBSCKF, CD-MCSCKF и их бескорневых аналогов, CD-VBCKF (от англ. Continuous-discrete variational Bayesian-based cubature Kalman filter) и CD-MCCKF (от англ. Continuous-discrete maximum correntropy cubature Kalman filter) соответственно, значения накопленных средних квадратичных ошибок по формуле

$$ARMSE = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\mathbf{x}^j(t_{k+1}) - \hat{\mathbf{x}}^j(t_{k+1}|t_{k+1})\right)^2}.$$

Здесь $\mathbf{x}^j(t_{k+1})$ и $\hat{\mathbf{x}}^j(t_{k+1}|t_{k+1})$ — вектор состояния и его оценка фильтрации для j-го запуска системы. Полученные значения ошибок представлены в таблице.

Значения накопленных среднеквадратичных ошибок
The values of the accumulated root mean square errors

Фильтр	CD-VBSCKF	CD-VBCKF	CD-MCSCKF	CD-MCCKF
$ARMSE$	0.037964	0.037964	0.038193	0.038193

Сравнивая полученные значения ARMSE, заметим, что рассмотренные фильтры успешно справились с обработкой аномальных наблюдений для данной модельной задачи, причем качество фильтрации вполне сопоставимо. Проведенный численный эксперимент подтвердил алгебраическую эквивалентность предложенных квадратно-корневых модификаций и их стандартных версий.

Заключение

Предложены квадратно-корневые модификации двух робастных непрерывно-дискретных кубатурных фильтров Калмана, базирующиеся на вариационном байесовском и коррентропийном подходах.

Предложенные алгоритмы апробированы на модельной задаче. Алгебраическая эквивалентность квадратно-корневых фильтров с обыкновенными реализациями подтверждена численным экспериментом.

Разработанные CD-VBSCKF и CD-MCSCKF планируется использовать при решении задач параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем.

Приложение

Для построения CD-MCSCKF воспользуемся алгоритмом CD-MCCKF, который приведен ниже.

1. Инициализация начальных значений:

$$\hat{\mathbf{x}}\left(t_0|t_0\right)=\bar{\mathbf{x}}\left(t_0\right), \quad P\left(t_0|t_0\right)=P\left(t_0\right).$$

Выполнять в цикле по $k=\overline{0,N-1}$:

2. Этап экстраполяции. Получить $\hat{\mathbf{x}}\left(t_{k+1}|t_k\right)$ и $P\left(t_{k+1}|t_k\right)$, решая систему для $t\in\left[t_k,t_{k+1}\right]$:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}\left(t|t_k\right)}{dt}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\mathbf{f}\left[\hat{\mathbf{x}}\left(t|t_k\right)+S\left(t|t_k\right)\boldsymbol{\xi}_i,\mathbf{u}\left(t\right),t\right];$$

$$\frac{dP\left(t|t_k\right)}{dt}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\mathbf{f}\left[\hat{\mathbf{x}}\left(t|t_k\right)+S\left(t|t_k\right)\boldsymbol{\xi}_i,\mathbf{u}\left(t\right),t\right]\boldsymbol{\xi}_i^TS^T\left(t|t_k\right)+$$

$$+\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}S\left(t|t_k\right)\boldsymbol{\xi}_i\mathbf{f}^T\left[\hat{\mathbf{x}}\left(t|t_k\right)+S\left(t|t_k\right)\boldsymbol{\xi}_i,\mathbf{u}\left(t\right),t\right]+\Gamma\left(t\right)Q\left(t\right)\Gamma^T\left(t\right), \tag{15}$$

где $S\left(t|t_k\right)=Chol\left[P\left(t|t_k\right)\right]$.

3. Этап фильтрации. Вычислить $S\left(t_{k+1}|t_k\right)=Chol\left[P\left(t_{k+1}|t_k\right)\right]$, осуществить расчет по выражениям (3)–(6). Найти оценку фильтрации и соответствующую ей ковариационную матрицу, используя соотношения

$$P_{yy}\left(t_{k+1}|t_k\right)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\left[\boldsymbol{\gamma}_i\left(t_{k+1}|t_k\right)-\hat{\mathbf{y}}\left(t_{k+1}|t_k\right)\right]\left[\boldsymbol{\gamma}_i\left(t_{k+1}|t_k\right)-\hat{\mathbf{y}}\left(t_{k+1}|t_k\right)\right]^T+R\left(t_{k+1}\right); \tag{16}$$

$$P_{xy}\left(t_{k+1}|t_k\right)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\left[\boldsymbol{\chi}_i\left(t_{k+1}|t_k\right)-\hat{\mathbf{x}}\left(t_{k+1}|t_k\right)\right]\left[\boldsymbol{\gamma}_i\left(t_{k+1}|t_k\right)-\hat{\mathbf{y}}\left(t_{k+1}|t_k\right)\right]^T;$$

$$H\left(t_{k+1}\right)=P_{xy}^T\left(t_{k+1}|t_k\right)P^{-1}\left(t_{k+1}|t_k\right); \tag{17}$$

$$\hat{R}\left(t_{k+1}\right)=P_{yy}\left(t_{k+1}|t_k\right)-H\left(t_{k+1}\right)P\left(t_{k+1}|t_k\right)H^T\left(t_{k+1}\right); \tag{18}$$

$$L\left(t_{k+1}\right)=G_\sigma\left(\left[\boldsymbol{\varepsilon}^T\left(t_{k+1}\right)\hat{R}^{-1}\left(t_{k+1}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(t_{k+1}\right)\right]^{1/2}\right); \tag{19}$$

$$B\left(t_{k+1}\right)=L\left(t_{k+1}\right)H\left(t_{k+1}\right)P\left(t_{k+1}|t_k\right)H^T\left(t_{k+1}\right)+\hat{R}\left(t_{k+1}\right); \tag{20}$$

$$K(t_{k+1}) = L(t_{k+1})\, P(t_{k+1}|t_k)\, H^T(t_{k+1})\, B^{-1}(t_{k+1})\,; \tag{21}$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_k) + K(t_{k+1})\, \boldsymbol{\varepsilon}(t_{k+1})\,; \tag{22}$$

$$P(t_{k+1}|t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1})\, H(t_{k+1})]\, P(t_{k+1}|t_k)\,. \tag{23}$$

Конец цикла.

Воспользуемся данным алгоритмом для построения CD-MCSCKF. Начнем с замены дифференциального уравнения (15) на соответствующее равенство (2). Формула (10) получается из соотношения (17), если положить в нем

$$P(t_{k+1}|t_k) = S(t_{k+1}|t_k)\, S^T(t_{k+1}|t_k)\,. \tag{24}$$

Для вывода выражения (11) воспользуемся равенством (18). В силу справедливости формул (8) и (16) с учетом разложения $R(t_{k+1}) = S_R(t_{k+1})\, S_R^T(t_{k+1})$ запишем

$$P_{yy}(t_{k+1}|t_k) = Y(t_{k+1}|t_k)\, Y^T(t_{k+1}|t_k) + S_R(t_{k+1})\, S_R^T(t_{k+1})\,.$$

Из соотношений (9) и (17) и представления $P(t_{k+1}|t_k) = X(t_{k+1}|t_k)\, X^T(t_{k+1}|t_k)$ из [4] следует, что

$$H(t_{k+1})\, P(t_{k+1}|t_k)\, H^T(t_{k+1}) = P_{xy}^T(t_{k+1}|t_k)\, H^T(t_{k+1}) =$$

$$= Y(t_{k+1}|t_k)\, X^T(t_{k+1}|t_k)\, H^T(t_{k+1}) = H(t_{k+1})\, X(t_{k+1}|t_k)\, X^T(t_{k+1}|t_k)\, H^T(t_{k+1})\,.$$

Тогда

$$\hat{R}(t_{k+1}) = Y(t_{k+1}|t_k)\, Y^T(t_{k+1}|t_k) - Y(t_{k+1}|t_k)\, X^T(t_{k+1}|t_k)\, H^T(t_{k+1}) + S_R(t_{k+1})\, S_R^T(t_{k+1}) =$$

$$= [Y(t_{k+1}|t_k) - H(t_{k+1})\, X(t_{k+1}|t_k)\, |S_R(t_{k+1})]\, [Y(t_{k+1}|t_k) - H(t_{k+1})\, X(t_{k+1}|t_k)\, |S_R(t_{k+1})]^T,$$

откуда непосредственно вытекает (11).

Выражение (12) получается из равенства (19) с учетом разложения

$$\hat{R}(t_{k+1}) = \hat{S}_R(t_{k+1})\, \hat{S}_R^T(t_{k+1})\,. \tag{25}$$

Для вывода формулы (13) воспользуемся соотношениями (20), (21) и (23). Принимая во внимание представления (24), (25) для формулы (20) будем иметь

$$B(t_{k+1}) = L(t_{k+1})\, H(t_{k+1})\, S(t_{k+1}|t_k)\, S^T(t_{k+1}|t_k)\, H^T(t_{k+1}) + \hat{S}_R(t_{k+1})\, \hat{S}_R^T(t_{k+1}) =$$

$$= \left[\hat{S}_R(t_{k+1}) \;\middle|\; \sqrt{L(t_{k+1})} H(t_{k+1})\, S(t_{k+1}|t_k)\right] \left[\hat{S}_R(t_{k+1}) \;\middle|\; \sqrt{L(t_{k+1})} H(t_{k+1})\, S(t_{k+1}|t_k)\right]^T =$$

$$= S_B(t_{k+1})\, S_B^T(t_{k+1})\,. \tag{26}$$

Применяя соотношения (21) и (23), запишем

$$P(t_{k+1}|t_{k+1}) = P(t_{k+1}|t_k) - L(t_{k+1})\, P(t_{k+1}|t_k)\, H^T(t_{k+1})\, B^{-1}(t_{k+1})\, H(t_{k+1})\, P(t_{k+1}|t_k)\,.$$

С учетом разложений (24), (26) из последнего равенства получим

$$P\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)=S\left(t_{k+1}|t_k\right)S^T\left(t_{k+1}|t_k\right)-$$
$$-L\left(t_{k+1}\right)S\left(t_{k+1}|t_k\right)S^T\left(t_{k+1}|t_k\right)H^T\left(t_{k+1}\right)\left[S_B^{-1}\left(t_{k+1}\right)\right]^T\times$$
$$\times S_B^{-1}\left(t_{k+1}\right)H\left(t_{k+1}\right)S\left(t_{k+1}|t_k\right)S^T\left(t_{k+1}|t_k\right). \tag{27}$$

Обозначив

$$\tilde{K}\left(t_{k+1}\right)=\sqrt{L\left(t_{k+1}\right)}S\left(t_{k+1}|t_k\right)S^T\left(t_{k+1}|t_k\right)H^T\left(t_{k+1}\right)\left[S_B^{-1}\left(t_{k+1}\right)\right]^T, \tag{28}$$

и применив представление $P\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)=S\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)S^T\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)$, запишем формулу (27) в виде

$$S\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)S^T\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)+\tilde{K}\left(t_{k+1}\right)\tilde{K}^T\left(t_{k+1}\right)=S\left(t_{k+1}|t_k\right)S^T\left(t_{k+1}|t_k\right). \tag{29}$$

Из соотношений (26), (28), (29) вытекает выражение (13).

Для вывода равенства (14), воспользовавшись формулами (21), (22), получим

$$\hat{\mathbf{x}}\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)=\hat{\mathbf{x}}\left(t_{k+1}|t_k\right)+L\left(t_{k+1}\right)P\left(t_{k+1}|t_k\right)H^T\left(t_{k+1}\right)B^{-1}\left(t_{k+1}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(t_{k+1}\right).$$

Применяя разложения (24), (26) к последнему соотношению, запишем

$$\hat{\mathbf{x}}\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)=\hat{\mathbf{x}}\left(t_{k+1}|t_k\right)+$$
$$+L\left(t_{k+1}\right)S\left(t_{k+1}|t_k\right)S^T\left(t_{k+1}|t_k\right)H^T\left(t_{k+1}\right)\left[S_B^{-1}\left(t_{k+1}\right)\right]^T S_B^{-1}\left(t_{k+1}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(t_{k+1}\right),$$

что с учетом выражения (28) эквивалентно равенству (14).

Список литературы

[1] **Jazwinski A.H.** Stochastic processes and filtering theory. N.Y.: Academic Press; 1970: 376.

[2] **Julier S.J., Uhlmann J.K., Durrant-Whyte H.** A new approach for filtering nonlinear systems. Proc. of the “American Control Conference”. Seattle, WA: 1995:1628–1632.

[3] **Särkkä S.** On unscented Kalman filter for state estimation of continuous-time nonlinear systems. IEEE Trans. Automat. Control. 2007; 52(9):1631–1641.

[4] **Arasaratnam I., Haykin S.** Cubature Kalman filters. IEEE Trans. Automat. Control. 2009; 54(6):1254–1269.

[5] **Särkkä S., Solin A.** On continuous-discrete cubature Kalman filtering. Proc. 16th IFAC Symp. Syst. Identification. Brussels; 2012:1221–1226.

[6] **Särkkä S.** Bayesian filtering and smoothing. N.Y.: Cambridge Unive. Press; 2013: 232.

[7] **Chang L., Hu B., Chang G., Li A.** Huber-based novel robust unscented Kalman filter. IET Science, Measurement & Technology. 2012; 6(6):502–509.

[8] **Leong P.H., Arulampalam S., Lamahewa T.A., Abhayapala T.D.** A Gaussian-sum based cubature Kalman filter for bearings-only tracking. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 2013; 49(2):1161–1176.

[9] **Hou J., He H., Yang Y., Gao T., Zhang Y.** A variational bayesian and Huber-Based robust square root cubature Kalman filter for lith-ium-ion battery state of charge estimation. Energies. 2019; 12(9):1717–1739.

[10] **Wang G., Li N., Zhang Y.** Maximum correntropy unscented Kalman and information filters for non-Gaussian measure-ment noise. J. of the Franklin Institute. 2017; 354(18):8659–8677.

[11] **Bierman G.J.** Factorization methods for discrete sequential estimation. N.Y.: Academic Press; 1977: 241.

[12] **Семушин И.В.** Вычислительные методы алгебры и оценивания. Ульяновск: УлГТУ; 2011: 366.

[13] **Grewal M.S., Andrews A.P.** Kalman filtering: theory and practice using MATLAB. Fourth edition. N.J.: John Wileys and Sons; 2015: 617.

[14] **Кулабухова С.О., Чубич В.М.** Анализ качества робастных модификаций непрерывно-дискретного кубатурного фильтра Калмана. Наука. Технологии. Инновации: Сб. науч. тр. Ч. 2. Новосибирск: НГТУ; 2019:38–42.

[15] **Kailath T., Sayed A.H., Hassibi B.** Linear estimation. New Jersey: Prentice Hall; 2000: 854.

[16] **Kulikova M.V.** Square-root algorithms for maximum correntropy estimation of linear discrete-time systems in presence of non-Gaussian noise. Syst. Control Lett. 2017; (108):8–15.

[17] **Чубич В.М.** Активная параметрическая идентификация стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем на основе линеаризации во временной области. Информационно-управляющие системы. 2010; 49(6):54–61.

Вычислительные технологии, 2020, том 25, № 3, с. 88–98. © ИВТ СО РАН, 2020 ISSN 1560-7534
Computational Technologies, 2020, vol. 25, no. 3, pp. 88–98. © ICT SB RAS, 2020 eISSN 2313-691X

COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

DOI:10.25743/ICT.2020.25.3.010

Square-root algorithms for robust modifications of the continuous-discrete cubature Kalman filter

Chubich Vladimir M.*, Kulabukhova Svetlana O.

Novosibirsk State Technical University, 630073, Novosibirsk, Russia

*Corresponding author: Chubich Vladimir M., e-mail: chubich@ami.nstu.ru

Received March 10, 2020, revised March 17, 2020, accepted April 10, 2020

Abstract

Rounding errors due to the finite length of machine word can significantly affect the quality of estimation and filtering when solving the corresponding problems in various subject areas. In this regard, to improve the reliability of the obtained results, it is advisable to develop and then apply square-root modifications of the used algorithms.

Purpose: developing the square-root modifications of the continuous-discrete cubature Kalman filter on the basis of variational Bayesian and correntropy approaches.

Methodology: matrix orthogonal QR decomposition.

Findings: two robust (resistant to the possible presence of anomalous data and to machine rounding errors) modifications of the continuous-discrete cubature Kalman filter have been developed. The first (variational Bayesian) algorithm is obtained by extending the known discrete equations of the extrapolation stage to the continuous-discrete case. The second algorithm, based on the maximum correntropy criterion, is proposed in this paper for the first time. The developed square-root algorithms for nonlinear filtering are validated on the example of one stochastic dynamical system model with the random location of anomalous observations. In doing so, the filtering quality, estimated by the value of the accumulated mean square error, was quite comparable for both modifications during equivalent results obtained for the corresponding root-free analogues.

Value: the proposed square-root versions of robust modifications of the continuous-discrete cubature Kalman filter are algebraically equivalent to their standard analogues. Meanwhile, positive definiteness and symmetry of covariance matrices of the state vector estimates at the extrapolation and the filtration stages are provided. The developed algorithms will be used to develop software and mathematical support for parametric identification of stochastic nonlinear continuous-discrete systems in the presence of anomalous observations in the measurement data.

Keywords: stochastic continuous-discrete system, cubature Kalman filter, square-root filtration, robustness.

Citation: Chubich V.M., Kulabukhova S.O. Square-root algorithms for robust modifications of the continuous-discrete cubature Kalman filter. Computational Technologies. 2020; 25(3):88–98. (In Russ.)

References

1. Jazwinski A.H. Stochastic processes and filtering theory. N.Y.: Academic Press; 1970: 376.
2. Julier S.J., Uhlmann J.K., Durrant-Whyte H. A new approach for filtering nonlinear systems. Proc. of the "American Control Conference". Seattle, WA: 1995:1628–1632.
3. Särkkä S. On unscented Kalman filter for state estimation of continuous-time nonlinear systems. IEEE Trans. Automat. Control. 2007; 52(9):1631–1641.
4. Arasaratnam I., Haykin S. Cubature Kalman filters. IEEE Trans. Automat. Control. 2009; 54(6):1254–1269.
5. Särkkä S., Solin A. On continuous-discrete cubature Kalman filtering. Proc. 16th IFAC Symp. Syst. Identification. Brussels; 2012:1221–1226.
6. Särkkä S. Bayesian filtering and smoothing. N.Y.: Cambridge Unive. Press; 2013: 232.
7. Chang L., Hu B., Chang G., Li A. Huber-based novel robust unscented Kalman filter. IET Science, Measurement & Technology. 2012; 6(6):502–509.
8. Leong P.H., Arulampalam S., Lamahewa T.A., Abhayapala T.D. A Gaussian-sum based cubature Kalman filter for bearings-only tracking. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 2013; 49(2):1161–1176.
9. Hou J., He H., Yang Y. Gao T., Zhang Y. A variational bayesian and Huber-Based robust square root cubature Kalman filter for lith-ium-ion battery state of charge estimation. Energies. 2019; 12(9):1717–1739.
10. Wang G., Li N., Zhang Y. Maximum correntropy unscented Kalman and information filters for non-Gaussian measure-ment noise. Journal of the Franklin Institute. 2017; 354(18):8659–8677.
11. Bierman G.J. Factorization methods for discrete sequential estimation. N.Y.: Academic Press; 1977: 241.
12. Semushin I.V. Computational methods in algebra and estimation. Ul'yanovsk: UlGTU; 2011: 366. (In Russ.)
13. Grewal M.S., Andrews A.P. Kalman filtering: theory and practice using MATLAB. Fourth edition. N.J.: John Wileys and Sons; 2015: 617.
14. Kulabukhova S.O., Chubich V.M. Quality analysis of robust modifications of the continuous-discrete cubature Kalman filter. Proc. of the Conf. of Young Scientists "Science. Technology. Innovation". Pt 2. Novosibirsk: NGTU; 2019:38–42. (In Russ.)
15. Kailath T., Sayed A.H., Hassibi B. Linear estimation. New Jersey: Prentice Hall; 2000: 854.
16. Kulikova M.V. Square-root algorithms for maximum correntropy estimation of linear discrete-time systems in presence of non-Gaussian noise. Syst. Control Lett. 2017; (108):8–15.
17. Chubich V.M. Active parametric identification of stochastic nonlinear continuous-discrete systems based on linearization in the time domain. Information and Control Systems. 2010; 49(6):54–61 (In Russ.)