

## Численное моделирование неизотермического течения степенной жидкости в канале со скачком сечения\*

К. Е. РЫЛЬЦЕВА\*, Г. Р. ШРАГЕР

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия

\*Контактный e-mail: kiraworkst@gmail.com

Проводится исследование ламинарного стационарного неизотермического течения степенной жидкости в цилиндрическом канале с внезапным сужением. Формулируется математическая модель течения, которая включает уравнения гидродинамики, записанные в переменных функция тока — вихрь, и уравнение энергии. Реологические свойства жидкости описываются степенным законом Оствальда — де Ваале, в модифицированной форме которого учитывается зависимость эффективной вязкости от температуры. Для решения задачи используется метод установления с последующей реализацией конечно-разностного метода на основе схемы переменных направлений.

Выполняется оценка влияния вязкой диссипации на структуру потока псевдопластичной, ньютоновской и дилатантной жидкостей. Демонстрируются поля температуры и эффективной вязкости. Приводятся результаты параметрического исследования коэффициента местного гидравлического сопротивления.

*Ключевые слова:* неизотермическое течение, вязкая диссипация, внезапное сужение, неньютоновская жидкость, модель Оствальда — де Ваале, структура потока, местное сопротивление.

*Библиографическая ссылка:* Рыльцева К.Е., Шрагер Г.Р. Численное моделирование неизотермического течения степенной жидкости в канале со скачком сечения // Вычислительные технологии. 2019. Т. 24, № 5. С. 75–89.

DOI: 10.25743/ICT.2019.24.5.007.

### Введение

Ламинарные течения жидкости реализуются во многих технических устройствах, которые в зависимости от условий эксплуатации и назначения могут содержать геометрические неоднородности в виде внезапного сужения области течения. Транспорт жидких сред по массопроводам с внезапным сужением характеризуется рядом особенностей, которые необходимо учитывать для организации эффективного производства. Например, в процессе переработки полимерных жидкостей за счет сужения каналов происходит перестройка потока, имеют место энергетические потери и тепловые эффекты, оказывающие влияние на качество конечного продукта.

---

\*Title translation and abstract in English can be found on page 89.

© ИВТ СО РАН, 2019.

В связи с многочисленными техническими приложениями течения жидкости в каналах с сужением постоянно привлекают внимание исследователей. В большинстве ранних публикаций [1–3] представлены результаты экспериментальных и численных исследований ламинарных изотермических течений жидкости в каналах с сужением. В этих работах подробно обсуждаются кинематика и структура потоков, потери давления в зависимости от числа Рейнольдса, степени сужения канала для ньютоновской и неньютоновской жидкостей. Современные исследования представлены в [4–6], где особое внимание уделяется характеристикам области циркуляционного движения и потерям энергии в широком диапазоне изменения параметров.

В общем случае течение полимерной жидкости характеризуется неньютоновским реологическим поведением и является неизотермическим, что обуславливается диссипацией механической энергии, возможными химическими источниками тепла, различными условиями теплообмена на границах области. При этом физические свойства среды становятся функциями температуры. Решение задач о неизотермических течениях неньютоновских жидкостей с учетом диссипации механической энергии и зависимости реологических характеристик от температуры связано со значительными трудностями. Поэтому в большинстве случаев теоретические исследования течения и теплообмена при переменных физических характеристиках жидкости выполнены приближенными или численными методами с использованием ряда упрощающих допущений.

Математическая постановка задачи о стационарном неизотермическом течении вязкой среды в одномерном приближении допускает получение решения в аналитической форме. Первые работы, в которых представлены аналитические решения таких задач, появились в середине прошлого столетия [7–10]. Устойчивость получаемых стационарных решений и связанное с этим явление гидродинамического теплового “взрыва” обсуждаются в [11, 12]. Результаты исследований подобных течений описываются также в соответствующих монографиях [13, 14].

Неизотермические течения ньютоновской и неньютоновской жидкостей в плоских каналах с сужением рассматриваются в работах [15–17]. В [15] приводятся результаты численного исследования течения степенной жидкости в канале с сужением 10:1, полученные методом конечных элементов. При этом учитывается тепловыделение за счет вязкой диссипации и предполагается, что вязкость не зависит от температуры. Демонстрируется влияние параметров Пекле и Бринкмана на распределение температуры в рассматриваемой области. Предлагаются способы подавления осцилляций температуры, возникающих при больших значениях числа Пекле. В отличие от данной работы, в [16] учитывается зависимость вязких свойств жидкости от температуры. Приводятся распределения линий тока и поля температуры для псевдопластичной и ньютоновской жидкостей при варьировании числа Пекле, Бринкмана и коэффициента в экспоненциальной зависимости вязкости от температуры. Проводится анализ влияния температурной зависимости вязкости на распределение температуры вдоль канала. В работе [17] на основе восстановленных профилей скорости и температуры, а также рассчитанной длины циркуляционной зоны реализуется сравнение осесимметричного течения вязкоупругой жидкости в изотермических и неизотермических условиях.

Определение энергетических потерь при транспорте жидких сред по каналам с внезапным сужением необходимо для прогнозирования напорно-расходных характеристик с целью обеспечения заданного режима технологического процесса. Особое внимание уделяется местным потерям энергии, которые обусловлены внезапным сжатием потока за счет изменения конфигурации канала. Среди первых работ, в которых представлены

результаты исследования местных потерь давления в канале с сужением в зависимости от числа Рейнольдса, можно выделить [1, 18]. В обзорной части работы [19] приведен ряд источников, в которых демонстрируются результаты расчетов местных потерь давления для рассматриваемой геометрии. Позднее данные о местных потерях давления и их изменении в зависимости от безразмерных критериев, геометрических и реологических параметров задач опубликованы в [20–23]. Таким образом, в литературе достаточно полно представлена информация о местных гидравлических сопротивлениях для ламинарного изотермического течения в каналах с внезапным сужением. Для течения в неизоэтермических условиях подобная информация весьма ограничена [24, 25].

Целью настоящей работы является проведение численного исследования неизоэтермического течения степенной жидкости в цилиндрическом канале с внезапным сужением для выполнения количественного анализа структуры потока, оценки влияния вязкой диссипации и расчета местных потерь давления в зависимости от параметров задачи.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается ламинарное стационарное течение степенной жидкости в канале с внезапным сужением в неизоэтермических условиях. Течение является симметричным относительно оси канала и описывается в цилиндрической системе координат. Область решения задачи схематично изображена на рис. 1.

Математическая постановка задачи включает уравнение переноса вихря, уравнение Пуассона для функции тока и уравнение энергии, которые в безразмерной форме имеют вид [14, 26]

$$\frac{\partial(v\omega)}{\partial r} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial z} = \frac{2^n B}{\text{Re}} \left( \Delta\omega - \frac{\omega}{r^2} \right) + \frac{2^n S}{\text{Re}}, \quad (1)$$

$$\Delta\psi - \frac{2}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} = -r\omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(v\theta)}{\partial r} + \frac{\partial(u\theta)}{\partial z} + \frac{v\theta}{r} = \frac{2}{\text{Pe}} (\Delta\theta + 2^{n-1} A^2 B \text{Br}), \quad (3)$$

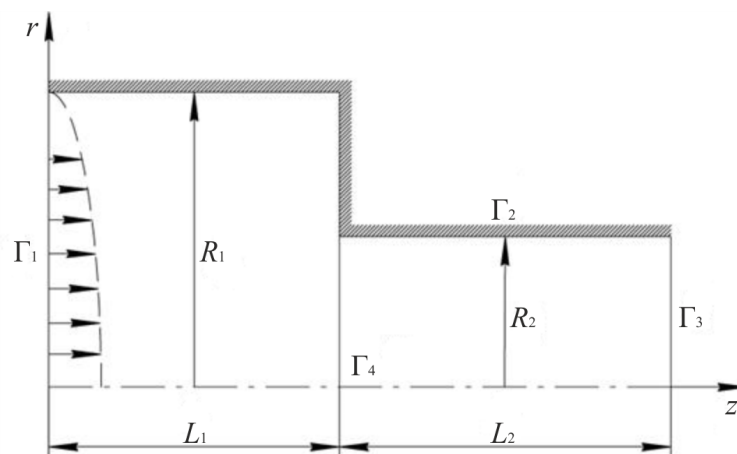


Рис. 1. Область решения задачи

где переменные функция тока  $\psi$  и вихрь  $\omega$  определяются формулами

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Здесь  $v$ ,  $u$  — радиальная и аксиальная компоненты скорости соответственно;  $\theta = \beta(T - T_1)$  — безразмерная температура,  $\beta$  — температурный коэффициент вязкости,  $T$  и  $T_1$  — размерные температуры жидкости в потоке и на твердой стенке соответственно;  $B$  — безразмерная эффективная вязкость;  $n$  — показатель нелинейности жидкости;  $A$  — интенсивность тензора скоростей деформаций,  $S$  — источниковый член, где

$$A = \sqrt{2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{v}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2}, \quad S = 2 \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ + \left( \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial z} + 2 \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\omega}{r}.$$

Основные уравнения содержат следующие безразмерные параметры: число Рейнольдса  $Re = \rho U^{2-n} D^n / k_1$ ; число Бринкмана  $Br = k_1 U^{n+1} \beta D^{1-n} / \lambda$ ; число Пекле  $Pe = c \rho U D / \lambda$ , где  $k_1 = k_0 \exp[-\beta(T_1 - T_0)]$  — показатель консистенции при  $T_1$ ,  $k_0$  — показатель консистенции при  $T_0$ ,  $D = 2R_2$  — диаметр узкой части канала,  $\rho$  — плотность,  $c$  — теплоемкость,  $\lambda$  — теплопроводность. Предполагается постоянство свойств жидкой среды ( $\rho$ ,  $c$ ,  $\lambda$ ). Величины  $U$ ,  $R_2$ ,  $k_1(U/R_2)^{n-1}$  приняты в качестве масштабов обезразмеривания скорости, длины и вязкости соответственно.

Реологическое поведение среды описывается степенным законом Оствальда — де Вала [27], который в неизотермическом случае модифицируется зависимостью консистенции от температуры, в результате чего формула для безразмерной эффективной вязкости принимает вид

$$B = \exp[-\theta] A^{n-1}. \quad (4)$$

Для псевдопластичной жидкости характерные значения показателя нелинейности находятся в диапазоне  $0 < n < 1$ , для дилатантной жидкости  $n > 1$ . В частном случае при  $n = 1$  эффективная вязкость соответствует ньютоновской жидкости.

Задание граничных условий на входе в канал ( $\Gamma_1$ ) предполагает расчет профилей аксиальной скорости и температуры, формируемых в установившемся одномерном неизотермическом течении в бесконечном канале [28]. Полученное распределение скорости позволяет рассчитать значения вихря и функции тока, которые совместно с температурой определяют граничные условия на входе. На выходе из канала ( $\Gamma_3$ ) задаются мягкие граничные условия. Для исключения влияния геометрической особенности канала на характер течения в окрестности входа и выхода эти границы располагаются на достаточном удалении от области сужения ( $L_1/R_2 = 8$ ,  $L_2/R_2 = 70$ ). На неподвижной твердой стенке ( $\Gamma_2$ ) используются условия прилипания, безразмерная температура при этом равна нулю. На оси канала ( $\Gamma_4$ ) выполняются условия симметрии.

Математическое представление граничных условий имеет следующий вид:

$$\Gamma_1 : u = f_1(r), \quad \psi = \int_0^r ur \, dr, \quad \omega = -\frac{\partial u}{\partial r}, \quad \theta = f_2(r), \quad z = 0, \quad 0 \leq r \leq \frac{R_1}{R_2};$$

$$\Gamma_2 : \psi = \text{const}, \quad \omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \quad \theta = 0, \quad r = \frac{R_1}{R_2}, \quad 0 \leq z \leq \frac{L_1}{R_2},$$

$$\begin{aligned} \psi = \text{const}, \quad \omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad \theta = 0, \quad 1 \leq r \leq \frac{R_1}{R_2}, \quad z = \frac{L_1}{R_2}, \\ \psi = \text{const}, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \quad \theta = 0, \quad r = 1, \quad \frac{L_1}{R_2} \leq z \leq \frac{L_1}{R_2} + \frac{L_2}{R_2}; \\ \Gamma_3: \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad z = \frac{L_1}{R_2} + \frac{L_2}{R_2}; \\ \Gamma_4: \psi = 0, \quad \omega = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \quad r = 0. \end{aligned}$$

## 2. Метод решения

В ходе решения исходной стационарной задачи используется метод установления, согласно которому в уравнения (1)–(3) добавляются производные по “фиктивному” времени от искомых функций, которые обнуляются при полном установлении процесса [29]. Приведение основных уравнений к дискретной форме реализуется конечно-разностным методом на основе схемы переменных направлений [30]. Конвективные слагаемые в уравнениях (1), (3) аппроксимируются разностями против потока с первым порядком точности. Граничные значения вихря на твердых стенках также вычисляются с первым порядком по формуле Тома [31]. Решение разностных уравнений осуществляется методом прогонки [29]. В качестве критерия сходимости итерационного процесса используются условия вида  $\max_{i,j} |1 - \omega_{i,j}^m / \omega_{i,j}^{m+M}| < \epsilon$ ,  $\max_{i,j} |1 - \psi_{i,j}^m / \psi_{i,j}^{m+M}| < \epsilon$ ,  $\max_{i,j} |1 - \theta_{i,j}^m / \theta_{i,j}^{m+M}| < \epsilon$ , где  $\epsilon$  — заданный итерационный параметр,  $M$  — заданное количество шагов по “фиктивному” времени,  $m$  — номер шага по “фиктивному” времени. В результате вычислительного эксперимента для условия сходимости выбираются следующие значения параметров:  $\epsilon = 10^{-5}$ ,  $M = 10$ .

На основе результатов тестовых расчетов выполняется проверка сеточной сходимости. В табл. 1 представлены значения максимальной аксиальной скорости и температуры, вычисленные в скачке сечения и на выходной границе при варьировании шага

Т а б л и ц а 1. Максимальные значения аксиальной скорости и температуры в скачке сечения и на выходе из канала ( $Br = 1$ ,  $Re = 1$ ,  $Pe = 10$ ,  $n = 0.8$ ,  $R_1/R_2 = 2$ )

$h$	$u_{\max}$ (сужение)	$\theta_{\max}$ (сужение)	$u_{\max}$ (выход)	$\theta_{\max}$ (выход)
0.1	1.7039	0.3653	2.1321	0.5661
0.05	1.7279	0.3843	2.1274	0.5774
0.025	1.7382	0.3924	2.1249	0.5803
0.0125	1.7430	0.3960	2.1240	0.5810

Т а б л и ц а 2. Значения максимального отклонения аксиальной скорости и температуры на последовательности сеток во всей области решения ( $Br = 1$ ,  $Re = 1$ ,  $Pe = 10$ ,  $n = 0.8$ ,  $R_1/R_2 = 2$ )

$h$	$\delta_u$	$\delta_\theta$
0.1	0.0352	0.0201
0.05	0.0142	0.0091
0.025	0.0076	0.0043

квадратной сетки ( $h$ ). В табл. 2 показаны значения невязок для скорости и температуры на вложенных сетках, рассчитанные по формулам

$$\delta_u = \max_{i,j} |u_{i,j}^h - u_{i,j}^{h/2}|, \quad \delta_\theta = \max_{i,j} |\theta_{i,j}^h - \theta_{i,j}^{h/2}|,$$

где  $u_{i,j}^h$ ,  $u_{i,j}^{h/2}$ ,  $\theta_{i,j}^h$ ,  $\theta_{i,j}^{h/2}$  — значения сеточных функций, вычисленные на соседних сетках. Видно, что величина невязок уменьшается с измельчением сетки, что свидетельствует о наличии аппроксимационной сходимости численного алгоритма и позволяет зафиксировать значение шага сетки  $h = 0.025$ .

### 3. Результаты расчетов

В рамках сформулированной задачи предполагается, что отношение радиусов составляющих канала не меняется и принимается равным  $R_1/R_2 = 2$ . Значение числа Бринкмана, которое характеризует соотношение тепла, выделяемого в результате вязкой диссипации и кондуктивного теплопереноса, зафиксировано —  $Br = 1$ . Если течение изотермическое, то  $Br = 0$ .

В общем случае структура потока, наблюдаемая в ходе течения степенной жидкости в канале с внезапным сужением как в изотермических, так и в неизотермических условиях, состоит из нескольких характерных областей. В окрестности входной и выходной границ канала формируются зоны одномерного течения, которые соответствуют установившемуся режиму течения. Слева и справа от скачка сечения располагаются зоны двумерного течения. В области внутреннего угла имеет место зона циркуляционного движения жидкости.

Наибольший исследовательский интерес вызывает изменение областей двумерного течения в зависимости от параметров задачи, таких как число Пекле, число Рейнольдса, показатель нелинейности жидкости. Для выполнения количественного анализа течения на основе восстановленной картины течения (рис. 2) вводятся следующие безразмерные геометрические характеристики потока: длина циркуляционной зоны —  $L$ , длины зон двумерного течения вверх и вниз по потоку от скачка сечения —  $l_1$  и  $l_2$  соответственно. Значения  $l_1$  и  $l_2$  определяются как расстояния от плоскости сужения до поперечных сечений, в которых аксиальная скорость на оси симметрии отличается от подобной характеристики в области установившегося течения на 1% вверх и вниз по потоку.

Для демонстрации влияния вязкой диссипации и реологических свойств жидкости на структуру течения в табл. 3 приводятся результаты расчетов  $L$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  для изотермического и неизотермического течений псевдопластичной ( $n = 0.8$ ), ньютоновской ( $n = 1.0$ ) и дилатантной ( $n = 1.2$ ) жидкостей.

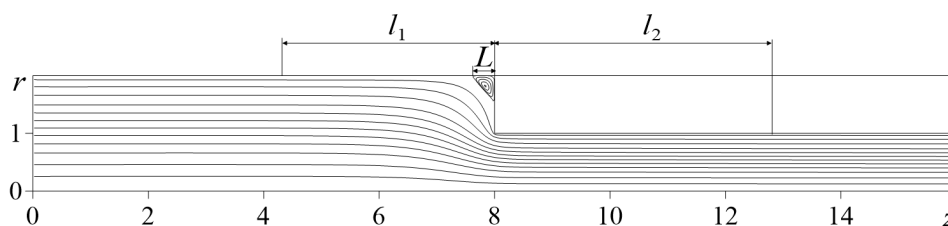


Рис. 2. Распределение линий тока при  $Re = 1$ ,  $Pe = 100$ ,  $n = 0.8$

Т а б л и ц а 3. Длины зон двумерного течения в зависимости от показателя нелинейности ( $Re = 1$ )

Длина зоны	Изотермическое течение			Неизотермическое течение ( $Re = 10$ )			Неизотермическое течение ( $Re = 100$ )		
	$n = 0.8$	$n = 1.0$	$n = 1.2$	$n = 0.8$	$n = 1.0$	$n = 1.2$	$n = 0.8$	$n = 1.0$	$n = 1.2$
$l_1$	3.494	2.782	2.287	3.592	2.919	2.408	3.493	2.797	2.301
$l_2$	0.623	0.597	0.572	3.335	3.779	4.078	33.632	36.523	38.483
$L$	0.381	0.485	0.596	0.347	0.416	0.486	0.397	0.500	0.558

Сравнение изотермического и неизотермических течений показало, что увеличение показателя нелинейности во всех трех случаях приводит к уменьшению зоны двумерного течения перед скачком сечения и росту циркуляционной зоны в окрестности угла. Однако в рассмотренных случаях поведение зоны двумерного течения за скачком сечения не совпадает. С увеличением  $n$  в изотермическом случае  $l_2$  падает, а в неизотермическом — возрастает, при этом чем больше  $Re$ , тем выше значение  $l_2$ . На рис. 3 представлен график зависимости  $l_2(n)$ .

На рис. 4, *a* приведены кривые для  $l_2$ , которые демонстрируют увеличение этой характеристики с ростом преобладания инерционных сил в потоке над вязкими силами. На рис. 4, *b* показано изменение размеров областей двумерного течения в зависимости от числа Пекле. Несложно заметить, что существенное влияние этот параметр оказывает на длину зоны за скачком сечения, а именно способствует ее увеличению.

На рис. 5 представлены поля температуры, характерные для течения псевдопластичной жидкости при различных значениях  $Re$  в выделенной части потока. Видно, что доминирование переноса тепла за счет конвекции над переносом за счет кондукции приводит к смещению прогретой области в направлении от скачка к выходному сечению. Таким образом, при высоких значениях числа Пекле для достижения установившегося поля температуры необходимо увеличивать расстояние между скачком сечения и выходной границей.

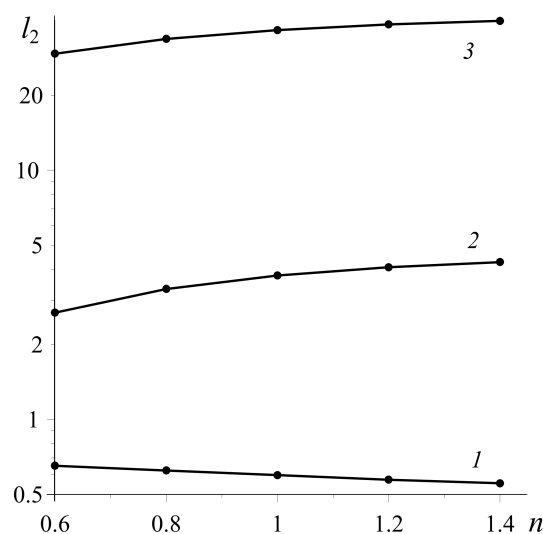


Рис. 3. Зависимость длины зоны двумерного течения за скачком сечения от показателя нелинейности для  $Re = 1$ : 1 — изотермическое течение, 2 — неизотермическое течение ( $Re = 10$ ), 3 — неизотермическое течение ( $Re = 100$ )

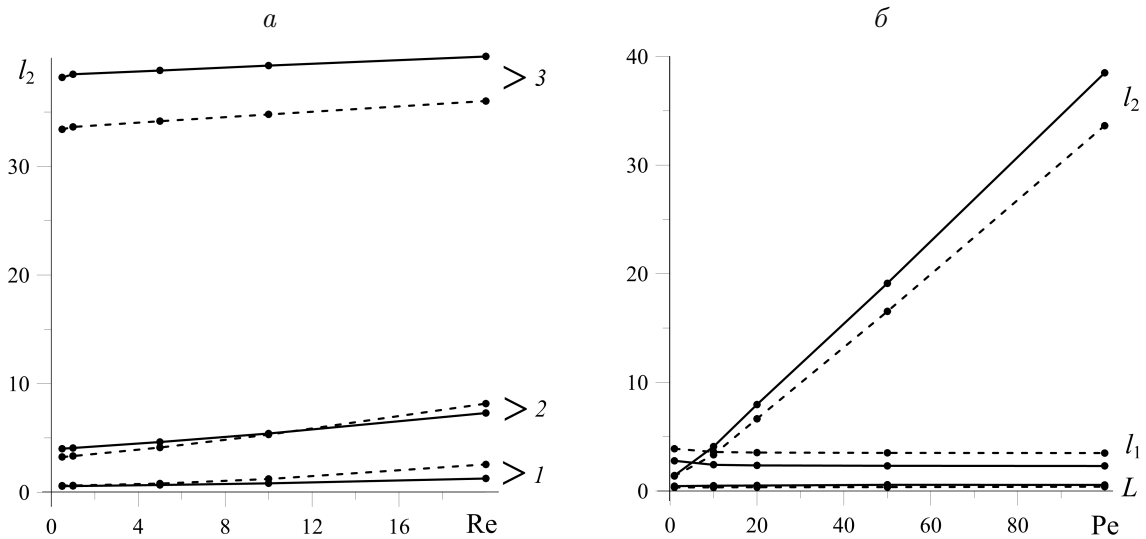


Рис. 4. Зависимость длины зоны двумерного течения за скачком сечения от числа Рейнольдса: 1 — изотермическое течение, 2 — неізотермическое течение ( $Pe = 10$ ), 3 — неізотермическое течение ( $Pe = 100$ ) (а); зависимость длин зон двумерного течения от числа Пекле ( $Re = 1$ ). Сплошная линия соответствует  $n = 1.2$ , штриховая линия —  $n = 0.8$  (б)

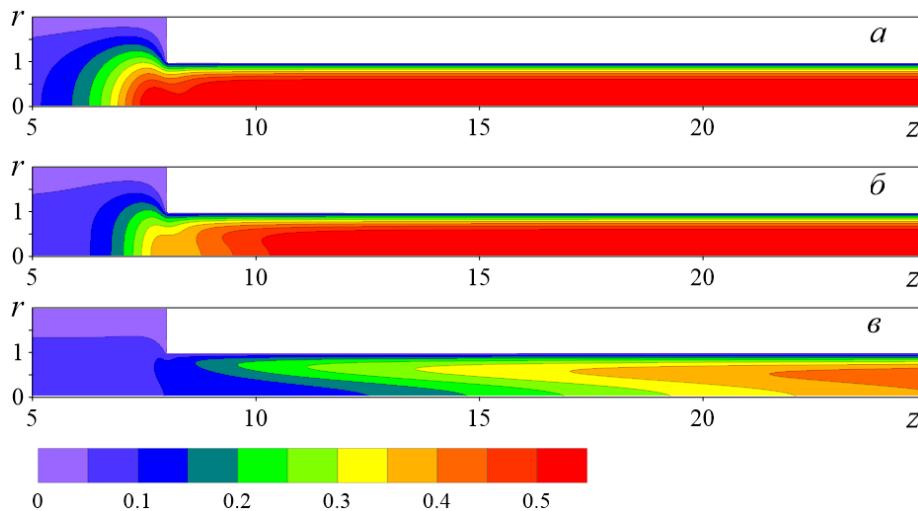


Рис. 5. Поля температуры в окрестности сужения при  $n = 0.8$ ,  $Re = 1$ :  $Pe = 1$  (а),  $Pe = 10$  (б),  $Pe = 100$  (в)

Распределения эффективной вязкости и температуры в окрестности сужения в случае течения псевдопластичной, ньютоновской и дилатантной жидкостей при  $Re = 100$  изображены на рис. 6.

Для восстановления распределения размерной температуры по ее безразмерным значениям необходимо знать температуру жидкости на стенке  $T_1$  и температурный коэффициент вязкости  $\beta$ . Коэффициент  $\beta$  в явном виде не используется в безразмерном аналоге зависимости вязкости от температуры (4). В размерной зависимости показателя консистенции  $k_1$  от температуры коэффициент  $\beta$  для конкретной жидкости определяется из результатов физического эксперимента. Примеры численных значений  $\beta$  для неньютоновских жидкостей представлены в [32].



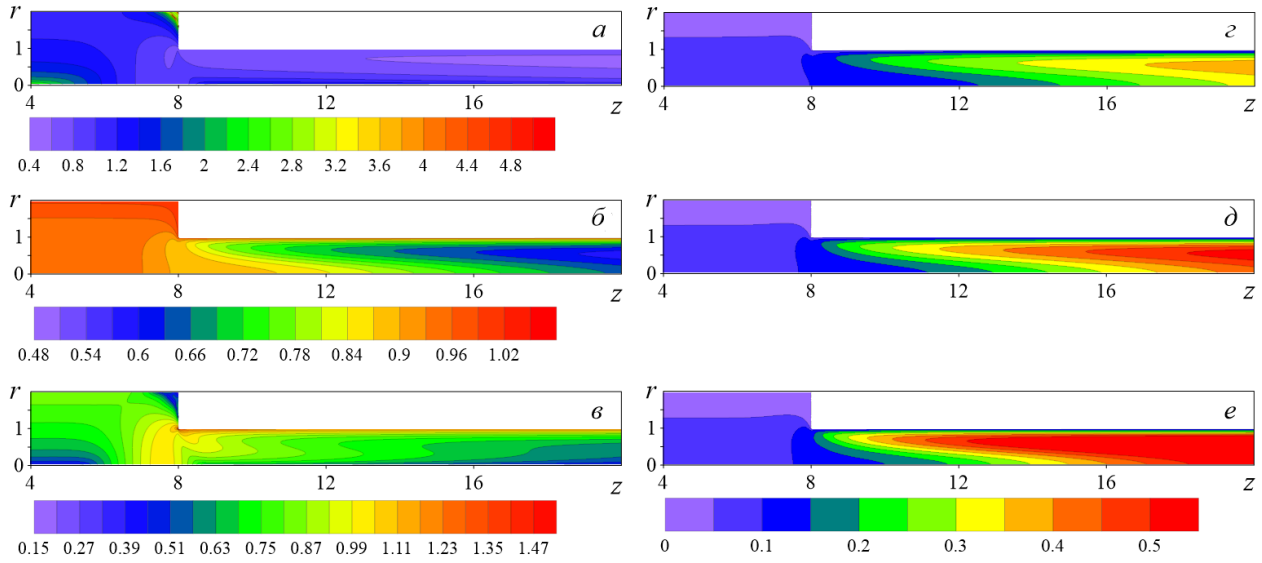


Рис. 6. Распределения эффективной вязкости (а)–(в) и температуры (з)–(е) при  $Re = 100$ ,  $Re = 1$ :  $n = 0.8$  – а, з;  $n = 1.0$  – б, д;  $n = 1.2$  – в, е

Течение жидкости в канале со скачком сечения характеризуется потерями давления на трение, которые являются следствием действия вязких сил в потоке ( $\Delta P_{\text{тр}}$ ), и местными потерями давления в окрестности скачка сечения ( $\Delta P_{\text{м}}$ ) [33]. Сумма всех потерь представляет собой перепад полного давления между входом и выходом:

$$P_1 - P_2 = \Delta P = \Delta P_{\text{тр}} + \Delta P_{\text{м}}.$$

Отношение потеряннного на участке полного давления к динамическому напору определяет коэффициент гидравлического сопротивления [33]

$$C = \frac{\Delta P}{0.5\rho U^2} = \frac{\Delta P_{\text{тр}} + \Delta P_{\text{м}}}{0.5\rho U^2} = C_{\text{тр}} + C_{\text{м}},$$

где  $C_{\text{тр}}$  – коэффициент сопротивления трения,  $C_{\text{м}}$  – коэффициент местного сопротивления.

Формула для расчета коэффициента местного сопротивления получается в результате применения уравнения Бернулли к сечениям, расположенным в широкой и узкой частях канала

$$C_{\text{м}} = \frac{\Delta p_{\text{м}}}{0.5\rho U^2} - \alpha \left[ 1 - \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^4 \right], \quad (5)$$

где  $\Delta p_{\text{м}}$  – потери гидродинамического давления на преодоление сужения;  $\alpha$  – коэффициент коррекции кинетической энергии, учитывающий неоднородность профиля скорости во всем канале [34]:

$$\alpha = \frac{3(3n + 1)^2}{(2n + 1)(5n + 3)}.$$

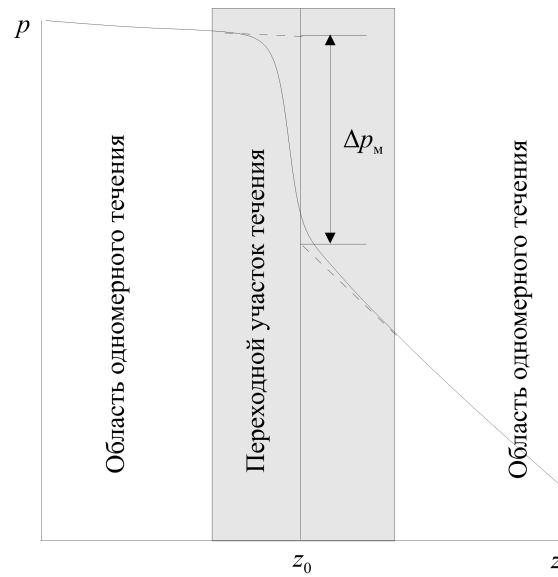
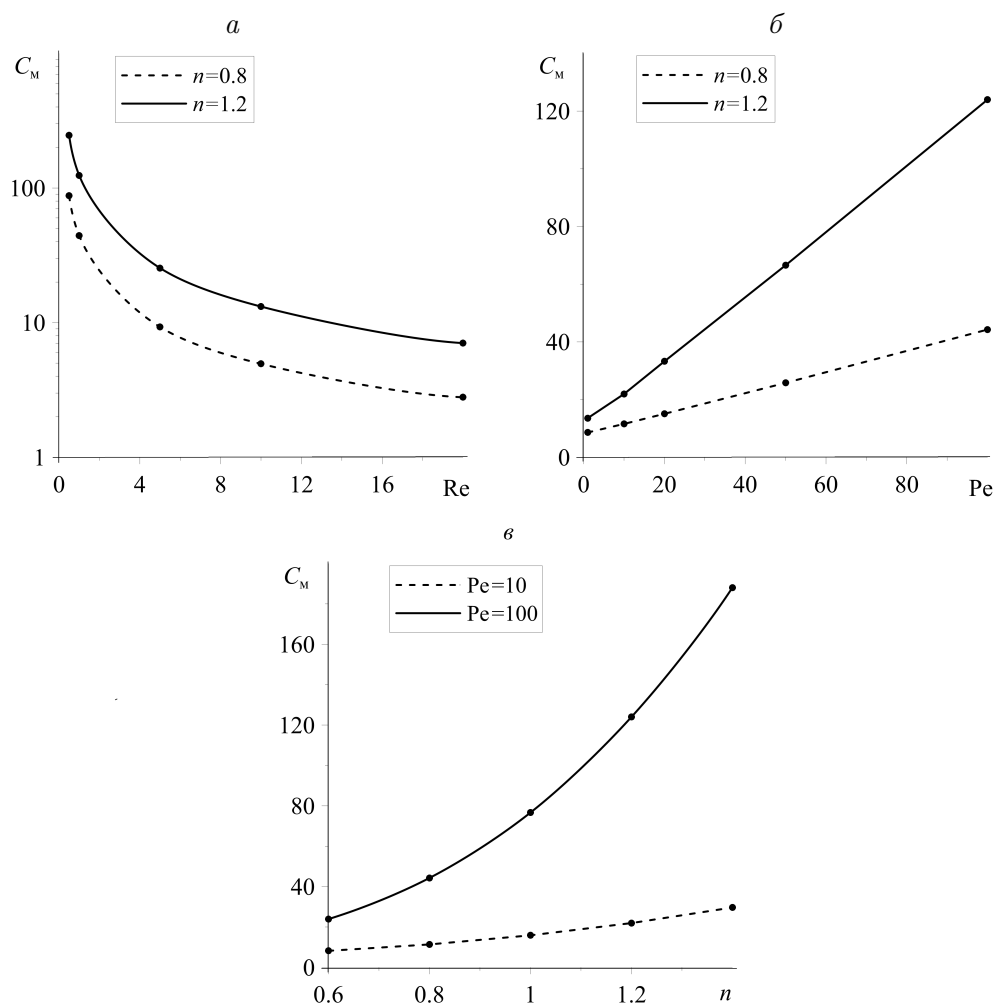


Рис. 7. Схематичный график распределения давления вдоль канала с сужением

Рис. 8. Зависимости коэффициента местного гидравлического сопротивления от: числа Рейнольдса ( $Pe = 100$ ) — а, числа Пекле ( $Re = 1$ ) — б, показателя нелинейности ( $Re = 1$ ) — в

Т а б л и ц а 4. Коэффициент местного сопротивления в зависимости от числа Рейнольдса для  $Br = 0$ ,  $R_1/R_2 = 4$ ,  $n = 1$

Re	$C_M$	
	Формула (5)	Работа [23]
1	17.505	18.330
5	3.609	3.906
10	1.929	2.103
20	1.124	1.202
50	0.659	0.661
100	0.475	0.480

Значение  $\Delta p_m$  вычисляется экстраполяцией прямолинейных профилей давления, формируемых на участках одномерного течения, в сечении  $z_0$ , где расположен скачок сечения (рис. 7).

На рис. 8 продемонстрировано влияние параметров задачи на коэффициент местного гидравлического сопротивления. Полученные графические зависимости показали, что с ростом Re значения коэффициента монотонно уменьшаются как для  $n = 0.8$ , так и для  $n = 1.2$ . При увеличении Re наблюдается расширение переходного участка течения за скачком сечения, что приводит к резкому увеличению коэффициента местного сопротивления. С уменьшением показателя нелинейности  $C_M$  убывает за счет падения среднего уровня вязкости в области двумерного течения по сравнению с установившимися участками движения и вследствие уменьшения длины циркуляционной зоны.

Для верификации полученных данных проводится сравнение результатов расчетов  $C_M$  с аналогичными данными из работы [23] (табл. 4). Наблюдается удовлетворительное согласование значений.

## Заключение

Выполнено математическое моделирование течения степенной жидкости в канале со скачком сечения типа сужение в неизотермических условиях. Разработан алгоритм численного решения поставленной задачи. Результаты расчетов позволили оценить влияние вязкой диссипации и зависимости вязкости от температуры на введенные безразмерные геометрические характеристики структуры потока. В ходе параметрических исследований выявлено, что при варьировании основных параметров задачи (показателя нелинейности жидкости, числа Пекле, числа Рейнольдса) существенно меняется длина зоны двумерного течения за скачком сечения. Особый интерес представляет тот факт, что рост показателя нелинейности для изотермического и неизотермического случаев по-разному сказывается на длине этой зоны: в первом случае она уменьшается, а во втором — увеличивается. Показаны характерные особенности полей эффективной вязкости и температуры для псевдопластичной, ньютоновской и дилатантной жидкостей. На основе полученных данных построены зависимости коэффициента местного гидравлического сопротивления от безразмерных критериев задачи и показателя нелинейности жидкости.

**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-19-00021).

## Список литературы / References

- [1] **Astarita, G., Greco, G.** Excess pressure drop in laminar flow through sudden contraction. Non-Newtonian liquids // *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*. 1968. Vol. 7, No. 4. P. 595–598.
- [2] **Rama Murthy, A.V., Boger, D.V.** Developing velocity profiles on the downstream side of a contraction for inelastic polymer solutions // *Transactions of the Society of Rheology*. 1971. Vol. 15, No. 4. P. 709–730.
- [3] **Christiansen, E.B., Kelsey, S.J., Carter, T.R.** Laminar tube flow through an abrupt contraction // *Amer. Institute Of Chemical Engineers J.* 1972. Vol. 18, No. 2. P. 372–380.
- [4] **Oliveira, M.S.N., Oliveira, P.J., Pinho, F.T., Alves, M.A.** Effect of contraction ratio upon viscoelastic flow in contractions: The axisymmetric case // *J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2007. Vol. 147. P. 92–108.
- [5] **Kfuri, S.L.D., Silva, J.Q., Soares, E.J., Thompson, R.L.** Friction losses for power-law and viscoplastic materials in an entrance of a tube and an abrupt contraction // *J. of Petroleum Science and Engineering*. 2011. Vol. 76, No. 3–4. P. 224–235.
- [6] **Pitz, D.B., Franco, A.T. Negro, C.O.R.** Effect of the Reynolds number on viscoelastic fluid flows through axisymmetric sudden contraction // *J. of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2017. Vol. 39, No. 5. P. 1709–1720.
- [7] **Регирер С.А.** Некоторые термогидродинамические задачи об установившемся одномерном течении вязкой каплевой жидкости // *Прикл. математика и механика*. 1957. Т. 21, № 3. С. 424–430.  
**Regirer, S.A.** Some thermohydrodynamic problems of steady one-dimensional flow of a viscous liquid with droplets // *J. of Applied Mathematics and Mechanics*. 1957. Vol. 21, No. 3. P. 424–430. (In Russ.)
- [8] **Kearsley, E.A.** The viscous heating correction for viscometer flows // *Transactions of the Society of Rheology*. 1962. Vol. 6. P. 253–261.
- [9] **Каганов С.А.** Об установившемся ламинарном течении несжимаемой жидкости в плоском канале и круглой цилиндрической трубе с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры // *Прикл. механика и техн. физика*. 1962. № 3. С. 96–99.  
**Kaganov, S.A.** On a steady laminar flow of incompressible fluid in plane channel and round cylindrical tube accounting for the heat due to friction and dependence of viscosity on temperature // *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1962. No. 3. P. 96–99. (In Russ.)
- [10] **Martin, B.** Some analytical solutions for viscometric flows of power-law fluids with heat generation and temperature dependent viscosity // *Intern. J. of Non-Linear Mechanics*. 1967. Vol. 2, No. 4. P. 285–301.
- [11] **Бостанджиян С.А., Мержанов А.Г., Худяев С.И.** О гидродинамическом тепловом взрыве // *Докл. Акад. наук СССР*. 1965. Т. 163, № 1. С. 133–136.  
**Bostandzhiyan, S.A., Merzhanov, A.G., Khudyaev, S.I.** On the hydrodynamic thermal explosion // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1965. Vol. 163, No. 1. P. 133–136. (In Russ.)
- [12] **Бостанджиян С.А., Черняева С.М.** О гидродинамическом тепловом взрыве неньютоновской жидкости // *Докл. Акад. наук СССР*. 1966. Т. 170, № 2. С. 301–304.  
**Bostandzhiyan, S.A., Chernyaeva, S.M.** On the hydrodynamic thermal explosion in a non-Newtonian fluid flow // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1966. Vol. 170, No. 2. P. 301–304. (In Russ.)
- [13] **Петухов Б.С.** Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 409 с.

- Petukhov, V.S.** Heat transfer and drag in laminar fluid flow through the pipes. Moscow: Energiya, 1967. 409 p. (In Russ.)
- [14] **Фройштетер Г.Б., Данилевич С.Ю., Радионова Н.В.** Течение и теплообмен неньютоновских жидкостей в трубах. Киев: Наукова думка, 1990. 216 с.  
**Froyshteter, G.B., Danilevich, S.Yu., Radionova, N.V.** Flow and heat transfer of non-Newtonian fluids through the pipes. Kiev: Naukova Dumka, 1990. 216 p. (In Russ.)
- [15] **Mitsoulis, E., Vlachopoulos, J.** Non-isothermal creeping flow through parallel plates and a sudden planar contraction // The Canadian J. of Chemical Eng. 1984. Vol. 62. P. 837–844.
- [16] **Bell, B.C., Surana, K.S.** p-Version least squares finite element formulation for two-dimensional incompressible Newtonian and non-Newtonian non-isothermal fluid flow // Computers & Structures. 1995. Vol. 54, No. 1. P. 83–96.
- [17] **Habla, F., Woitalka, A., Neuner, S., Hinrichsen, O.** Development of a methodology for numerical simulation of non-isothermal viscoelastic fluid flows with application to axisymmetric 4:1 contraction flows // Chemical Engineering J. 2012. Vol. 207-208. P. 772–784.
- [18] **Sylvester, N.D., Rosen, S.L.** Laminar flow in the entrance region of a cylindrical tube // Amer. Institute of Chemical Engineers J. 1970. Vol. 16, No. 6. P. 964–966.
- [19] **Pienaar, V.G.** Viscous flow through sudden contractions: Dis. doctoral degree. Cape Town: Cape Peninsula Univ. of Technology, 2004. 198 p.
- [20] **Jay, P., Magnin, A., Piau, J.M.** Numerical simulation of viscoplastic fluid flows through an axisymmetric contraction // J. of Fluids Engineering. 2002. Vol. 124. P. 700–705.
- [21] **Fester, V., Mbiya, B., Slatter, P.** Energy losses of non-Newtonian fluids in sudden pipe contractions // Chemical Engineering J. 2008. Vol. 145. P. 57–63.
- [22] **Liu, M., Chen, M., Duan, Yu.** Local resistance characteristics of highly concentrated coal-water slurry flow through fittings // Korean J. of Chemical Engineering. 2009. Vol. 26, No. 2. P. 569–575.
- [23] **Kfuri, S.L.D., Soares, E.J., Thompson, R.L., Siqueira, R.N.** Friction coefficients for Bingham and power-law fluids in abrupt contractions and expansions // J. of Fluids Engineering. 2017. Vol. 139(2). 021203. (8 p.)
- [24] **Christiansen, E.B., Kelsey, S.J.** Nonisothermal laminar contracted flow // Amer. Institute of Chemical Engineers J. 1972. Vol. 18, No. 4. P. 713–720.
- [25] **Yesilata, B., Oztekin, A., Neti, S.** Non-isothermal viscoelastic flow through an axisymmetric sudden contraction // J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2000. Vol. 89. P. 133–164.
- [26] **Янков В.И., Глот И.О., Труфанова Н.М., Шакиров Н.В.** Течение полимеров в отверстиях фильер. Теория, расчет, практика. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010. 368 с.  
**Yankov, V.I., Glot, I.O., Trufanova, N.M., Shakirov, N.V.** Flow of the polymers through the spinneret holes. Theory, computation, and practice. Moscow; Izhevsk: Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika, 2010. 368 p. (In Russ.)
- [27] **Ostwald, W.** Ueber die rechnerische Darstellung des Strukturgebietes der Viskosität // Kolloid Zeitschrift. 1929. Vol. 47, No. 2. P. 176–187.
- [28] **Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р.** Установившееся неизотермическое течение степенной жидкости в плоском/осесимметричном канале // Вестн. Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2018. № 52. С. 41–52.  
**Borzenko, E.I., Shragger, G.R.** Non-isothermal steady flow of power-law fluid in a planar/axisymmetric channel // Tomsk State Univ. J. of Mathematics and Mechanics. 2018. No. 52. P. 41–52. (In Russ.)

- [29] **Годунов С.К., Рябенкий В.С.** Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 440 с.  
**Godunov, S.K., Ryabenkiy, V.S.** Difference schemes. North-Holland: Elsevier Sci. Ltd, 1987. 440 p.
- [30] **Самарский А.А.** Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 553 с.  
**SamarSKIY, A.A.** Introduction to the theory of difference schemes. Moscow: Nauka, 1971. 553 p. (In Russ.)
- [31] **Roache, P.J.** Computational fluid dynamics. Albuquerque: Hermosa Publ., 1976. 446 p.
- [32] **Янков В.И., Боярченко В.И., Первадчук В.П., Глот И.О., Шакиров Н.В.** Переработка волокнообразующих полимеров. Основы реологии полимеров и течение полимеров в каналах. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2008. 264 с.  
**Yankov, V.I., Boyarchenko, V.I., Pervadchuyk, V.P., Glot, I.O., Shakirov, N.V.** Processing of fiber-forming polymers. Fundamentals of the rheology of polymers, and the flow of polymers in channels. Moscow; Izhevsk: Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika, 2008. 264 p. (In Russ.)
- [33] **Идельчик И.Е.** Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1992. 672 с.  
**Idel'chik, I.E.** Handbook of hydraulic resistance. Jerusalem: Israel Program for Sci. Translations, 1966. 517 p.
- [34] **Tiu, C., Boger, D.V., Halmos, A.L.** Generalized method for predicting loss coefficients in entrance region flows for inelastic fluids // The Chemical Engineering J. 1972. Vol. 4, No. 2. P. 113–117.

*Поступила в редакцию 10 сентября 2019 г.*

### **Numerical simulation of a non-isothermal power-law fluid flow in a channel with abrupt contraction**

RYLTSEVA, KIRA E.\*, SHRAGER, GENNADY R.

National Research Tomsk State University, Tomsk, 634050, Russia

\*Corresponding author: Ryltseva, Kira E., e-mail: kiraworkst@gmail.com

Viscous fluid flow through a sudden contraction is frequently encountered in a number of industrial equipment dealing with processing and transporting of liquid materials. Generally, the fluid exhibits non-Newtonian behavior and flows under non-isothermal conditions. Such flow is characterized by specific structure, viscous dissipation, and local pressure losses.

In this work, a numerical solution to the problem of a non-isothermal power-law fluid flow through a two-to-one axisymmetric abrupt contraction is presented. Mathematical model includes the momentum, continuity and energy equations written in terms of stream function, vorticity and temperature variables. The rheological behavior of the fluid is specified by the Ostwald-de Waele power law. The proposed flow model accounts for viscous dissipation and temperature-dependent rheological properties. To solve the problem, the relaxation method is used, followed by the implementation of the finite-difference method based on the scheme of alternative directions. The equations in a discrete form are solved using the tridiagonal matrix algorithm.

It is found that the flow includes both one-dimensional and two-dimensional flow regions. The lengths of these regions are studied versus the Reynolds number, the Peclet

number, and power-law index. Comparing isothermal and non-isothermal cases, it is revealed that an increase in the power-law index leads to a decrease in the downstream two-dimensional zone in the first case, and, in contrast, it provides a significant increase in the second case. The viscosity and temperature distributions are presented to show the effect of the Peclet number for pseudoplastic, Newtonian, and dilatant fluids. The parametric investigation of the local pressure losses is implemented in a wide range of the main parameters.

*Keywords:* non-isothermal flow, viscous dissipation, abrupt contraction, non-Newtonian fluid, the Ostwald de Waele model, flow structure, local pressure losses.

*Cite:* Ryltseva, K.E., Shrager, G.R. Numerical simulation of a non-isothermal power-law fluid flow in a channel with abrupt contraction // Computational Technologies. 2019. Vol. 24, No. 5. P. 75–89. DOI: 10.25743/ICT.2019.24.5.007. (In Russ.)

**Acknowledgements.** This research was supported by Russian Science Foundation (project No. 18-19-00021).

*Received September 10, 2019*