

## Восстановление распределения температуры среды в двумерной области томографическим методом по результатам измерений электрического сопротивления ориентированных проводников

В. А. ДЕРЕВЯНКО<sup>1\*</sup>, А. Ф. ЛАТЫПОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

<sup>2</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

\*Контактный e-mail: dv@icm.krasn.ru

Рассмотрена возможность использования “термометра сопротивления” для измерения распределения температуры в двумерной области. Создана математическая модель датчика, сводящаяся к решению томографической задачи. Важной особенностью модели является то, что число уравнений в системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) больше числа переменных. Это позволяет уменьшить ошибки в исходных данных. Создана программа для определения решения СЛАУ с плохо обусловленной матрицей, позволяющая обрабатывать результаты измерений в реальном масштабе времени. Выполнен тестовый расчет. При малом числе ракурсов измерений получена удовлетворительная точность восстановления температуры.

*Ключевые слова:* двумерное распределение температуры, термометр сопротивления, система линейных алгебраических уравнений, решение томографической задачи.

### Введение

Обеспечение длительного срока активного существования космических аппаратов (КА) — важнейшая научная, инженерная и экономическая задача, решение которой требует глубокого системного подхода на всех этапах создания и эксплуатации бортовой радиоэлектронной аппаратуры (РЭА) космических аппаратов. Стратегической задачей для обеспечения длительного срока активного существования КА является реализация на всех этапах жизненного цикла бортовой РЭА предельно достижимых показателей надежности, это может быть обеспечено за счет использования эффективных методов и средств не только проектирования, производства и испытаний на этапе наземной экспериментальной отработки, но и мониторинга физических процессов, приводящих к преждевременному отказу бортовой РЭА на этапе активного существования КА. Развитые средства технической диагностики позволяют организовать эффективную проверку исправности, работоспособности, правильности функционирования технических объектов.

Многолетний опыт тестирования электронного оборудования в космической промышленности показал, что 80 % электромеханических отказов связаны с различными термическими воздействиями на оборудование и примерно 20 % отказов приходятся на различные виды вибрации и ударное воздействие, поэтому контролю тепловых режимов бортовой РЭА уделяется пристальное внимание [1].

В настоящее время контроль температуры осуществляется с помощью термодатчиков, установленных в непосредственной близости от электрорадиоизделий. Однако контролировать температуру всех критичных электрорадиоизделий с помощью термодатчиков невозможно из-за их большого количества (несколько десятков на каждой плате и несколько сотен в приборе). Поэтому задача определения температурных полей радиоэлектронных блоков для контроля тепловых режимов бортовой радиоэлектронной аппаратуры космических аппаратов в режиме реального времени является чрезвычайно актуальной.

## 1. Постановка задачи

Известные методы измерения температурных полей термоэлектрическими датчиками в виде спаренных разнородных проводников [2] отличаются сложностью реализации: во-первых, необходимо изолировать электрические проводники от объекта; во-вторых, требуется стабилизация температуры выводов термодатчиков.

Известен способ измерения температурного поля с использованием термоэлектрического датчика в виде сетки с четырехугольными ячейками из  $m$  и  $n$  разнородных проводников, соединенных в месте пересечения и образующих соответственно столбцы и строки, путем измерения термоЭДС между выходными концами проводников [3]. Недостатки способа — сложность математической модели и низкая точность восстановления профиля температурного поля из-за того, что в модели не учитывается изменение удельного сопротивления термоэлектрических проводников в зависимости от температуры. Учет этой зависимости приведет к еще большему усложнению математической модели.

Использование распределенных резистивно-диодных датчиков [4, 5] для измерения температурных полей вызывает сложности при обработке регистрируемого суммарного сигнала от многих датчиков, что существенно снижает точность регистрации.

Широко распространенные “термометры сопротивления” для точечного измерения температуры в разнообразных средах используют зависимость интегрального сопротивления проводника (медного или платинового) от температуры поверхности датчика. Распределение температуры в двумерной области можно определить, используя тот же принцип “термометра сопротивления”. При этом в область измерения предлагается поместить сетку последовательно соединенных проводников, по которым пропускается электрический ток. На концах проводников измеряются разности потенциалов и тем самым определяются интегральные сопротивления проводников, зависящие от распределения температуры вдоль них. Фактически каждый проводник является распределенным термометром сопротивления (рис. 1).

Использование нескольких совмещенных сеток различной ориентации (ракурсов) позволяет рассчитать распределение температуры проводников в плоскости сеток. При некоторых дополнительных условиях можно определять температуру среды и/или тепловые потоки.

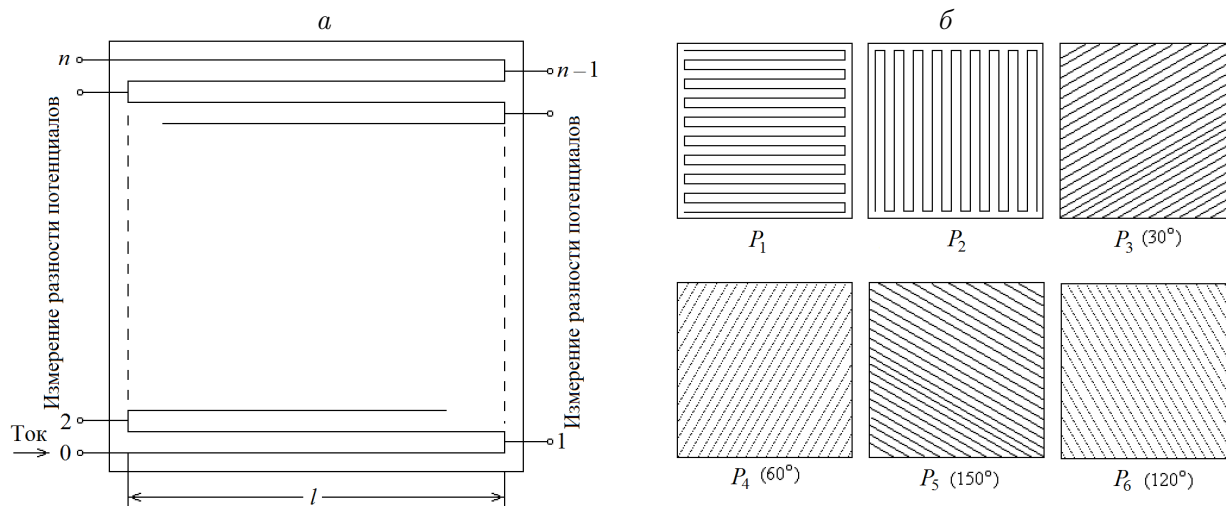


Рис. 1. Схемы двумерного термометра сопротивлений; *a* — датчик сопротивлений, *б* — расположение проводников (ракурсов)

Введем обозначения:  $x, y$  — оси координат;  $t$  — температура,  $^{\circ}\text{C}$ ;  $\rho(t)$  — удельное электрическое сопротивление,  $\text{Ом} \cdot \text{м}$ :

$$\rho(t) = \rho^0(1 + \alpha t), \quad \rho^0 = \rho(0), \quad \bar{\rho}(t) = \rho(t)/\rho^0,$$

где  $\alpha$  — температурный коэффициент сопротивления и  $\rho^0$  — удельное сопротивление проводника при  $t = 0^{\circ}\text{C}$  (определяются экспериментально);  $R_{lk}$  — измеряемые полные электрические сопротивления проводников в направлении лучей  $L$ ,  $\text{Ом}$ ;  $l$  — номер луча в  $k$ -м ракурсе;  $S_{lk}$  — длина проводника,  $\text{м}$ .

Рассматривается некоторое ограниченное пространство, внутри которого имеются источники тепла. Требуется определить распределение температуры поверхности датчика, помещенного в некоторую область выделенного пространства. В качестве датчика используется прямоугольная пластина размером  $[a \times b]$ , на которой размещаются электрические проводники, ориентированные по направлениям лучей  $L$  под углами  $\pm\theta_j$ , углы (ракурсы) задаются. Пластина подвергается воздействию лучистого, конвективного и кондуктивного тепловых потоков. Предполагается, что реализуется квазистационарный тепловой режим. Так как в этом случае температура является функцией пространственных координат, то и удельное сопротивление есть функция этих координат. Используя зависимость измеряемого электрического сопротивления проводников от температуры, определяют распределение температуры поверхности датчика (задача томографии).

Введем безразмерные координаты  $\xi = x/b, \eta = y/b$ . Решение будем строить в классе кусочно-постоянных функций  $t_{ij} = \text{const}$ ,  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ , определяемых в квадратных ячейках сетки. Обозначим  $\bar{\rho}_{ij} = \bar{\rho}(t_{ij})$ . Числа  $\{m, n\}$ , число ракурсов  $K_R$  и число лучей в ракурсах  $N_R$  определяются задаваемым пространственным разрешением  $h$ . Измеряемое полное электрическое сопротивление  $R_{lk}$  проводника длиной  $S_{lk}$  и площадью поперечного сечения  $\Omega$  в используемой математической модели определяется как взвешенная сумма удельных сопротивлений пересекаемых лучом ячеек. Весовые множители равны относительным длинам участка проводника в ячейках. Записывая эти соотношения для всех измерений, получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{aligned}
\sum_{ij(lk)} \frac{s_{ij(lk)}}{\Omega} \rho_{ij(lk)} &= R_{lk}, \\
\vartheta_{lk} &= \sum_{ij(lk)} \bar{s}_{ij(lk)} \bar{\rho}_{ij(lk)} - \bar{r}_{lk} = 0, \\
\bar{s}_{ij(lk)} &= \frac{s_{ij(lk)}}{S_{lk}}, \quad r_{lk} = \frac{R_{lk}}{S_{lk}/\Omega}, \quad \bar{\rho}_{ij(lk)} = \frac{\rho_{ij(lk)}}{\rho^0}, \quad \bar{r}_{lk} = \frac{r_{lk}}{\rho^0}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Символика  $ij(lk)$  означает зависимость номеров  $\{i, j\}$  от номеров луча и ракурса,  $\vartheta_{lk}$  — невязки уравнений. Параметры  $\alpha$ ,  $\rho^0$  определяются по измерениям сопротивлений проводника длиной  $S$  при двух (или более) значениях температуры.

## 2. Оценка необходимого числа ракурсов или допустимого числа неизвестных

Пусть число неизвестных  $mn$ ,  $m = \text{entier}(a/h)$ ,  $n = \text{entier}(b/h)$ , число “косых” ракурсов  $K_R$ , число уравнений  $M_u = K_R N_R + (m + n)$  (второе слагаемое соответствует числу уравнений на лучах, параллельных осям координат).

Из условия  $K_R N_R + (m + n) \geq mn$  получаем

$$K_R \geq \frac{mn - (m + n)}{N_R}$$

или

$$\begin{aligned}
n &\leq \text{entier}(n_*), \quad \lambda = a/b, \\
n_* &= \frac{(\lambda + 1) + \sqrt{(\lambda + 1)^2 + 4\lambda K_R N_R}}{2\lambda}
\end{aligned}$$

при  $\lambda = 1 \rightarrow n_* = 1 + \sqrt{1 + K_R N_R}$ .

## 3. Решение СЛАУ

Для восстановления температур с необходимой точностью расстояния между проводниками могут оказаться малыми и значения коэффициентов в уравнениях для проводников, проходящих по одним и тем же ячейкам, будут близкими. Это повлечет большое значение числа обусловленности матрицы и существенные трудности и ошибки при получении решения. Следует отметить, что число уравнений, как правило, будет больше числа неизвестных. Ранг матрицы должен быть равен числу неизвестных величин. Поэтому решение удобнее определять из условия минимума функционала среднеквадратичных невязок уравнений [6]. Таким образом, необходимо решить следующую задачу:

$$\min_{t_{ij}} F, \quad F = \frac{1}{2M_u} \sum_{l,k} \vartheta_{lk}^2. \tag{2}$$

Значения  $\vartheta_{lk}$  определяются выражениями (1). Задача (2) решается методом координатного спуска. Далее изложение ведется в терминах температур. Начальные значения  $t_{ij}^{(0)}$  задаются. В программе реализован вариант  $t_{ij}^{(0)} = 0.5(t_i + t_j)$ , где в скобках стоят

средние температуры, соответствующие измерениям сопротивлений на лучах, параллельных осям координат.

Пусть варьируется только одна переменная  $t_{i'j'}$ . Определим приращение функционала

$$\begin{aligned} \Delta F &= F - F^{(0)} = \frac{1}{2M_u} \sum_{l,k} \left[ \vartheta_{lk}^{(0)} + \bar{s}_{i'j'(lk)} \left( t_{i'j'} - t_{i'j'}^{(0)} \right) \right]^2 - F^{(0)} = \\ &= \frac{1}{M_u} \left( \sum_{l,k} \vartheta_{lk}^{(0)} \bar{s}_{i'j'(lk)} \Delta t_{i'j'} + \frac{1}{2} \sum_{l,k} \bar{s}_{i'j'(lk)}^2 \Delta t_{i'j'}^2 \right), \\ \Delta t_{i'j'} &= t_{i'j'} - t_{i'j'}^{(0)}, \\ \frac{\Delta F}{\Delta t_{i'j'}} &= \frac{1}{M_u} \left( \sum_{l,k} \vartheta_{lk}^{(0)} \bar{s}_{i'j'(lk)} + \frac{1}{2} \sum_{l,k} \bar{s}_{i'j'(lk)}^2 \Delta t_{i'j'} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Из условия  $\frac{\partial F}{\partial t_{i'j'}} \approx \frac{\Delta F}{\Delta t_{i'j'}} = 0$  получаем

$$\Delta t_{i'j'} = -\frac{\alpha_{i'j'}}{\beta_{i'j'}}, \quad \alpha_{i'j'} = \sum_{l,k} \vartheta_{lk}^{(0)} \bar{s}_{i'j'(lk)}, \quad \beta_{i'j'} = \frac{1}{2} \sum_{l,k} \bar{s}_{i'j'(lk)}^2. \quad (4)$$

Таким образом, схема алгоритма следующая. Индекс <sup>(0)</sup> соответствует значениям переменных и параметров, полученных на последней итерации; индекс <sup>(1)</sup> — результатам следующей итерации, заданы значения  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ .

1. Получены значения  $t^{(0)} = \{t_{ij}^{(0)}; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}\}$ ,  $\vartheta_{lk}^{(0)}$ ,  $F^{(0)}$ .
2. По соотношениям (4) вычисляются  $\Delta t_{ij}$ .
3. Новые значения переменных  $t_{ij}^{(1)} = t_{ij}^{(0)} + \Delta t_{ij}$ .
4. По соотношениям (1) вычисляются невязки  $\vartheta_{lk}^{(1)}$ .
5. По формуле (2) вычисляется функционал  $F^{(1)}$ .
6. Если  $|t^{(1)} - t^{(0)}| < \varepsilon_1$ ,  $F^{(1)} < \varepsilon_2$ , то п. 8.
7. Иначе выполняются присвоения  $t_{ij}^{(0)} = t_{ij}^{(1)}$ ,  $\vartheta_{lk}^{(0)} = \vartheta_{lk}^{(1)}$ ,  $F^{(0)} = F^{(1)}$ , переход на п. 2.
8. Печать результатов. Конец.

Большое число обусловленности матрицы коэффициентов СЛАУ является причиной овражной структуры поверхностей уровня функционала  $F$ . Поэтому малые ошибки в вычислении функционала могут приводить к существенным отклонениям значений искомых переменных от точных значений. Для остановки процесса необходимо выполнение комбинированных условий (по крайней мере, двух условий п. 6).

Так как СЛАУ переопределена, а ранг матрицы равен числу искомых переменных, существуют линейно зависимые строки матрицы коэффициентов. Но правые части соответствующих уравнений различаются, в процессе решения происходит их осреднение и тем самым повышается точность исходных данных. Тот же результат дает следующий известный способ:

$$\begin{aligned} Ax &= B, \quad A[m, n], \quad x[n, 1], \quad B[m, 1], \quad m \geq n, \\ A^T Ax &= A^T B, \quad x = (A^T A)^{-1} A^T B. \end{aligned}$$

На рис. 2 представлен пример двумерного распределения температуры для тестирования процедуры восстановления. Задано:  $n = 28$ ,  $m = 19$ ,  $K_R = 6$ ,  $N_R = 94$ , плюс два ракурса вдоль координатных осей, углы наклона лучей  $\pm 30^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$ ,  $\pm 60^\circ$ . Восстановленное распределение представлено на рис. 3, распределение ошибок — на рис. 4. Получено: максимальная ошибка в восстановлении температуры  $4^\circ$ , средняя —  $0.8^\circ$ .

В таблице даны результаты решения вариантов для различного числа ракурсов. Задано:  $n = m = 16$ ,  $N_R = 64$ . Этот пример является иллюстрацией метода. Точность восстановления температуры монотонно увеличивается с ростом числа ракурсов  $K_R$  и числа лучей в ракурсах  $N_R$ . Числа  $K_R$ ,  $N_R$  определяются требуемой точностью восстановления температуры и возможностью технической реализации.

Таким образом, предложенная технология вычисления распределения температуры может быть применена в двумерной области произвольной конфигурации, так как

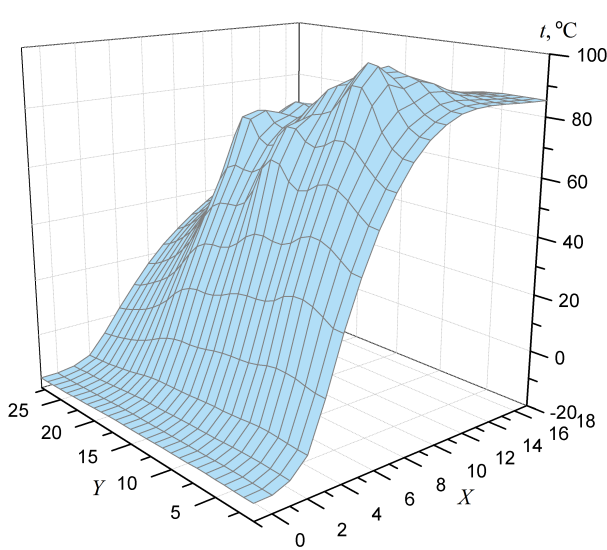


Рис. 2. Исходное распределение температуры

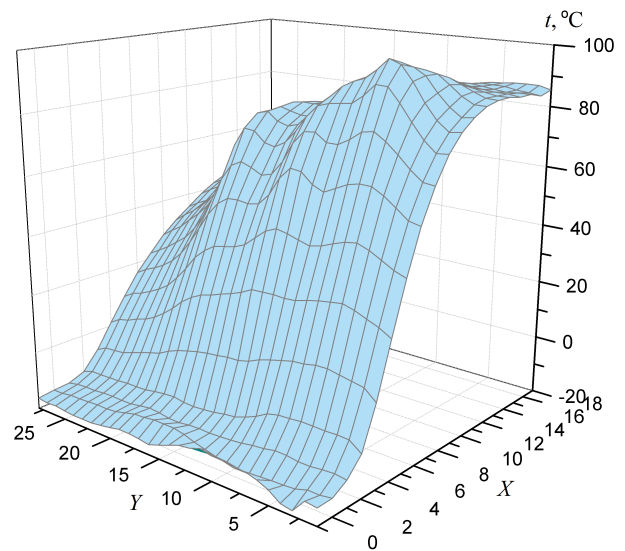


Рис. 3. Восстановленное распределение

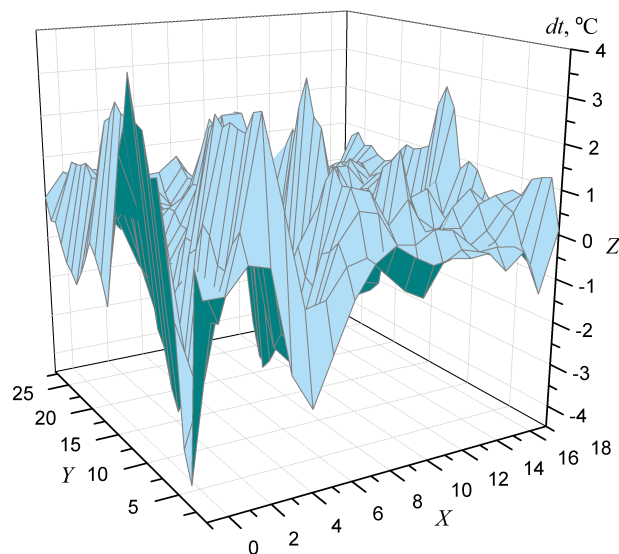


Рис. 4. Распределение ошибки

Результаты решения вариантов для различного числа ракурсов

Показатель	Число ракурсов				
	4	6	8	10	12
	0	0	0	0	0
Угол наклона лучей, град.	$\pm 45$	$\pm 30$	$\pm 30$	$\pm 15$	$\pm 10$
	90	$\pm 60$	$\pm 45$	$\pm 30$	$\pm 15$
		90	$\pm 60$	$\pm 45$	$\pm 30$
			90	$\pm 60$	$\pm 45$
				90	$\pm 60$
				90	
$\Delta t_{\max}$	8.69	3.92	2.83	1.47	1.20
$\Delta t_{\text{mid}}$	1.04	0.738	0.563	0.342	0.237

на тестируемой поверхности проводники могут быть расположены произвольно. При этом координаты элементов проводников, длины проводников и их сопротивления должны быть известны.

**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности в рамках научного проекта № 16-41-242104.

## Список литературы / References

- [1] **Steinberg, D.S.** Vibration analysis for electronic equipment. 3rd ed. John Wiley & Sons, 2000. 432 p.
- [2] **Линевег Ф.** Измерение температуры в технике. М.: Metallurgiya, 1980. 543 с.  
**Lineveg, F.** Temperature measurement in engineering. Moscow: Metallurgiya, 1980. 543 p. (In Russ.)
- [3] **Caltagirone, J.P.** Roseau maille de conducteurs electriques, notamment pour mesure de temperatures: Demande de Brevet D'invention, No. 75 19957, 25.06.1975, France.  
**Caltagirone, J.P.** Cell network of electric conductors for temperature measurement: Demande de Brevet D'invention, No. 75 19957, 25.06.1975 (in French).
- [4] **Краев В.В.** Методы измерения температурных полей на основе распределенных датчиков: исследование и реализация: Дис. ... канд. техн. наук. Казанский гос. техн. ун-т, Казань, 1995. 17 с.  
**Kraev, V.V.** Methods for measurements of temperature fields on the basis of distributed sensors: research and realization: Dis. ... kand. tekhn. nauk. Kazanskiy Gos. Tekhn. Univ., Kazan, 1995. 17 p. (In Russ.)
- [5] Патент РФ № 2079822. (от 20.05.1997.) Устройство измерения пространственного распределения температуры / А.Г. Баширова, Ю.К. Евдокимов, В.В. Краев., Ф.Х. Натфулов. Казанский гос. техн. ун-т, 1997.  
Patent RF, No. 2079822, 20.05.1997. Device for measurement of the spatial temperature distribution / A.G. Bashirova, Yu.K. Evdokimov, V.V. Kraev, F.H. Natfulov. Kazanskiy Gos. Tekhn. Univ., 1997. (In Russ.)
- [6] **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений. Т. 1. М.: Наука, 1962. 464 с.  
**Berezin, I.S., Zhidkov, N.P.** Computational methods. Vol. 1. Moscow: Nauka, 1962. 464 p. (In Russ.)

Поступила в редакцию 15 марта 2017 г.,  
с доработки — 10 октября 2017 г.

**The restoration of temperature distribution in a two-dimensional domain by a tomographic method by using the results of measurements for electric resistance of oriented conductors**

DEREVYANKO, VALERY A.<sup>1,\*</sup>, LATYPOV, ALBERT F.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Computational Modeling SB RAS, Krasnoyarsk, 630036, Russia

<sup>2</sup>Christianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

\*Corresponding author: Derevyanko, Valery A., e-mail: dv@icm.krasn.ru

**Purpose.** To ensure a long period of active lifetime of space vehicles, it is necessary to use effective methods and means to control physical processes leading to premature failure of on-board radio electronic equipment both at the stage of ground testing and during active operation of the spacecraft in space. Long-term testing experience for electronic equipment shows that monitoring compliance with necessary temperature conditions of onboard equipment plays the main role in ensuring reliability. Ideally, the thermal control should be performed for all elements of radio electronic units in real time.

**Method.** The possibility of using a “two-dimensional resistance thermometer” for recording the thermal field of a printed circuit board of an electronic unit is considered. The principle of operation of the thermometer is based on the measurement of integral resistances of extended mutually intersecting conductors in a medium with inhomogeneous temperature distribution. The registration of the integral resistances of individual conductors is possible with the help of an automated measuring system by solving the tomographic problem aimed to obtain the temperature distribution on the surface of the printed circuit board.

**Result.** The design of the “two-dimensional temperature sensor” is considered. The sensor is technologically compatible with the design of the printed circuit board of the radio electronic unit. A mathematical model of the sensor is developed. It is reduced to the solution of a tomographic problem. A program for solving a system of linear equations with an ill-conditioned matrix is developed that provides the real-time processing for measurement results. The test calculation is performed. A satisfactory accuracy of the temperature restoration is achieved.

**Conclusion.** A “two-dimensional resistance thermometer” can be used to measure a two-dimensional temperature field for a printed circuit board of a radio electronic unit in real time. The mathematical model allows adapting the thermometer design to a specific radio electronic unit and selecting the required accuracy of the temperature field restoration.

*Keywords:* two-dimensional temperature distribution, resistance thermometer, system of linear algebraic equations, the solution of a tomographic problem.

**Acknowledgements.** The studies have been performed with the financial support of RFBR, the government of Krasnoyarsk Territory, and Krasnoyarsk Territory Foundation for support of the scientific and scientific-technical activity in the frameworks of the scientific project No. 16-41-242104.

*Received 15 March 2017*

*Received in revised form 10 October 2017*