

Математическое моделирование стационарных восходящих закрученных потоков газа в окрестности контактной поверхности

С. П. БАУТИН*, С. Л. ДЕРЯБИН, А. В. МЕЗЕНЦЕВ

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия

*Контактный e-mail: SBautin@usurt.ru

Рассмотрены стационарные трехмерные течения идеального политропного газа, примыкающие через вертикальную контактную поверхность к области покоя в условиях действия сил тяготения и Кориолиса. Показано, что такие течения описываются решениями соответствующей начально-краевой задачи для системы уравнений газовой динамики, которые в работе строятся в виде локально сходящихся рядов. Коэффициенты этих рядов определяются в параметрической форме при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Параметры газа на контактной поверхности и в ее окрестности восстанавливаются численно.

Ключевые слова: система уравнений газовой динамики, сила Кориолиса, восходящий закрученный поток, контактная поверхность, сходящиеся ряды.

Введение

Задачи о математическом моделировании течений в восходящих закрученных потоках типа торнадо и тропический циклон при учете действия сил тяжести и Кориолиса рассматривались ранее [1–8]. В работе [1] предложена схема зарождения и функционирования восходящего закрученного потока газа. Эта схема обоснована последующими математическими и экспериментальными исследованиями. В частности доказано, что в Северном полушарии в таких потоках закрутка воздуха происходит против хода часовой стрелки, а в Южном — по ходу часовой стрелки. Это согласуется с данными многолетних наблюдений за торнадо и тропическими циклонами [9–11]. В работах [5, 6] рассмотрены течения политропного газа в восходящем закрученном потоке в некоторой окрестности вертикально расположенной контактной характеристики кратности пять, разделяющей газ и вакуум. Показано, что и в случае примыкания газа к вакууму закрутка газа происходит в тех же направлениях, а также установлено, что сам вихрь движется на запад, немного смещаясь к северу. В работах [7, 8] построены течения газа также в окрестности контактной характеристики, но кратности два и являющейся непроницаемой плоскостью $z = 0$.

В данной работе рассматриваются течения газа в некоторой окрестности вертикальной контактной характеристики кратности два, разделяющей восходящий закрученный поток и покоящийся газ.

1. Постановка задачи

Будут рассматриваться стационарные изэнтропические течения политропного газа со следующими искомыми газодинамическими параметрами: $c = \rho^{\gamma-1/2}$ — скорость звука газа; u — радиальная составляющая вектора скорости газа; v — окружная составляющая вектора скорости газа; w — вертикальная составляющая вектора скорости газа. Здесь ρ — плотность газа, γ — показатель политропы газа, и для воздуха обычно полагается $\gamma = 1.4$. Газодинамические параметры зависят от независимых переменных: r — полярного радиуса в плоскости xOy , φ — полярного угла, z — третьей пространственной координаты.

В этом случае система уравнений газовой динамики в безразмерных переменных имеет следующий вид [1–4]:

$$\begin{cases} uc_r + \frac{v}{r}c_\varphi + wc_z + \frac{\gamma-1}{2}c \left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = 0, \\ uw_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{2}{\gamma-1}cc_r = av - bw \cos \varphi, \\ wv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + ww_z + \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{r}cc_\varphi = -au + bw \sin \varphi, \\ ww_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{\gamma-1}cc_z = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $a = 2\Omega \sin \psi$; $b = 2\Omega \cos \psi$; Ω — модуль угловой скорости вращения Земли; ψ — широта точки ($z = 0, r = 0$) на поверхности Земли; $g = \text{const} > 0$ — ускорение свободного падения.

Для предложенной в работе [1] схемы течения в восходящем закрученном потоке, соответствующей структуре течения у тропических циклонов и сформировавшихся разрушительных торнадо, предполагается существование области покоящегося газа вдоль вертикальной оси потока, которая в случае тропического циклона обычно имеет название “глаз циклона” или “глаз тайфуна” (рис. 1). Именно такая схема течения будет рассматриваться далее. При этом предполагается, что контактная поверхность, разделяющая центральную область покоящегося газа и течений вне ее, является вертикальной цилиндрической поверхностью Γ : $r = r_{00}$, $r_{00} = \text{const}$. Значения переменной z отсчиты-

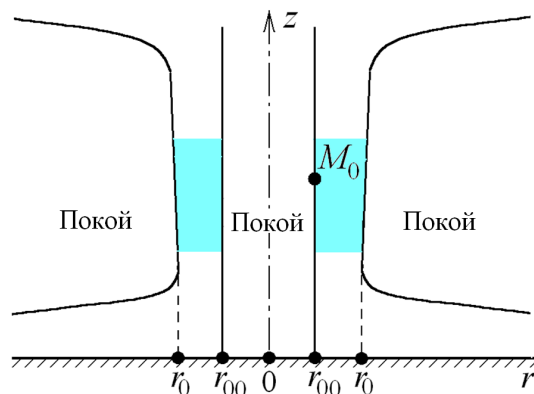


Рис. 1

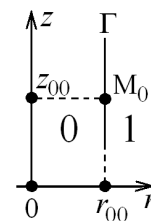


Рис. 2

ваются от поверхности Земли. Построение и исследование течения будут проводиться в окрестности точки $M_0(r = r_{00}, z = z_{00})$, $z_{00} = \text{const} > 0$ (рис. 2).

На цилиндре $r = r_{00}$ ставятся условия

$$\begin{cases} c|_{r=r_{00}} = c_0(z) \equiv \sqrt{c_{00} - g(\gamma - 1)z}, \\ u|_{r=r_{00}} = 0, \\ v|_{r=r_{00}} = v_0(\varphi, z), \\ w|_{r=r_{00}} = w_0(\varphi, z). \end{cases} \quad (2)$$

Конкретная функция $c_0(z)$ из условий (2) является решением системы (1), если $u = v = w = 0$ [3, 4], т.е. она задает скорость звука газа, покоящегося в поле тяжести. Заметим, что эта же зависимость получена из результатов физических экспериментов и наблюдений за параметрами атмосферы Земли до высоты десять километров [12]. Константа c_{00} задается значением скорости звука газа при $z = 0$. Далее предполагается, что выполнено неравенство

$$c_{00} > g(\gamma - 1)z_{00},$$

которое обеспечивает аналитичность функции $c_0(z)$ в некоторой окрестности точки M_0 .

Первое соотношение из (2) обеспечивает равенство давления при $r = r_{00}$ по обе части от поверхности Γ по всей высоте:

$$0 \leq z \leq z_*, \quad z_* = c_{00}/[g(\gamma - 1)].$$

Второе соотношение из (2) обеспечивает непротекание газа через вертикальную поверхность $r = r_{00}$. Следовательно, поверхность Γ является контактной, а значит, это характеристика системы (1) и кратность этой характеристики равна двум [13].

Таким образом, поставленная задача (1), (2) является характеристической задачей Коши с данными на контактной характеристике. Однако она и по газодинамическому смыслу, и по математической постановке отличается от ранее рассмотренных задач с данными на контактных характеристиках для восходящих закрученных потоков [5–8].

Если в системе (1) положить $r = r_{00}$ и учесть условия (2), то при обозначениях

$$c_r|_{r=r_{00}} = c_1, \quad u_r|_{r=r_{00}} = u_1$$

получаются следующие четыре соотношения:

$$\begin{cases} w_0 c_{0z} + \frac{\gamma - 1}{2} c_0 \left(u_1 + \frac{1}{r_{00}} v_{0\varphi} + w_{0z} \right) = 0, \\ -\frac{1}{r_{00}} v_0^2 + \frac{2}{\gamma - 1} c_0 c_1 = a v_0 - b \cos \varphi w_0, \\ \frac{1}{r_{00}} v_0 v_{0\varphi} + w_0 v_{0z} = b \sin \varphi w_0, \\ \frac{1}{r_{00}} v_0 w_{0\varphi} + w_0 w_{0z} = -b \sin \varphi v_0. \end{cases} \quad (3)$$

При выписывании четвертого уравнения из системы (3) учтен конкретный вид функции $c_0(z)$ из условий (2).

Из первых двух равенств, входящих в систему (3), однозначно в некоторой окрестности точки M_0 определяются u_1 и c_1 :

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{r_{00}}v_0\varphi - w_{0z} - \frac{2}{\gamma - 1c_0}w_0c_{0z}, \\ c_1 = \frac{\gamma - 1}{2c_0} \left(av_0 - b \cos \varphi w_0 + \frac{1}{r_{00}}v_0^2 \right), \end{cases} \quad (4)$$

поскольку $r_{00} > 0$, $c_0(z_{00}) > 0$.

Последние два равенства, входящие в систему (3), являются необходимыми условиями разрешимости характеристической задачи Коши (1) и (2) [13], и из них следует, что функции v_0 и w_0 , входящие в данные (2), нельзя брать произвольными. Они должны удовлетворять двум последним соотношениям из системы (3), т. е. следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{r_{00}}v_0v_{0\varphi} + w_0v_{0z} = b \sin \varphi w_0, \\ \frac{1}{r_{00}}v_0w_{0\varphi} + w_0w_{0z} = -b \sin \varphi v_0. \end{cases} \quad (5)$$

Пусть для задачи (1) и (2) заданы два дополнительных условия

$$\begin{cases} v(r, \varphi, z)|_{z=z_{00}} = v^0(r, \varphi), \\ w(r, \varphi, z)|_{z=z_{00}} = w^0(r, \varphi) \end{cases} \quad (6)$$

с аналитическими в окрестности точки ($r = r_{00}$, $\varphi = \varphi_{00}$) функциями $v^0(r, \varphi)$ и $w^0(r, \varphi)$, которые удовлетворяют условиям согласования

$$\begin{cases} v^0(r, \varphi)|_{r=r_{00}} = v_0(\varphi, z)|_{z=z_{00}} = v_{00}(\varphi), \\ w^0(r, \varphi)|_{r=r_{00}} = w_0(\varphi, z)|_{z=z_{00}} = w_{00}(\varphi). \end{cases} \quad (7)$$

Таким образом, поставлена характеристическая задача Коши (1), (2) и (6).

2. Об одном свойстве решений задачи (1), (2), (6)

Последние условия (7) при заданных функциях $v^0(r, \varphi)$ и $w^0(r, \varphi)$ определяют, в частности, начальные данные для системы (5). Далее полагаем, что $v_{00}(\varphi_{00}) \neq 0$, $w_{00}(\varphi_{00}) \neq 0$, и тогда по теореме Ковалевской задача (5), (7) имеет единственное локально-аналитическое решение [13].

С помощью введения характеристического параметра τ [14] система (5) из двух уравнений с частными производными сводится к системе из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\tau} = 1, & \frac{dz}{d\tau} = \frac{r_{00}w_0}{v_0}, \\ \frac{dv_0}{d\tau} = br_{00} \sin \varphi \frac{w_0}{v_0}, \\ \frac{dw_0}{d\tau} = -br_{00} \sin \varphi. \end{cases} \quad (8)$$

Для нее начальные данные (7) выписываются также в параметрической форме

$$\begin{aligned} \varphi(\tau)|_{\tau=0} &= \varphi_{00}, & z(\tau)|_{\tau=0} &= z_{00}, \\ v_0(\tau)|_{\tau=0} &= v_{00}(\varphi_{00}), & w_0(\tau)|_{\tau=0} &= w_{00}(\varphi_{00}). \end{aligned} \quad (9)$$

При интегрировании первого уравнения системы (8) получается $\varphi = \tau + \varphi_{00}$. Следовательно, систему (8) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = \frac{r_{00}w_0}{v_0}, \\ \frac{dv_0}{d\tau} = br_{00} \sin(\tau + \varphi_{00}) \frac{w_0}{v_0}, \\ \frac{dw_0}{d\tau} = -br_{00} \sin(\tau + \varphi_{00}). \end{cases} \quad (10)$$

Если в системе (10) третье уравнение поделить на четвертое при условии, что $v_{00} \neq 0$, то получится дифференциальное уравнение

$$\frac{dv_0}{dw_0} = -\frac{w_0}{v_0}, \quad (11)$$

которое имеет общее решение, удовлетворяющее равенству

$$v_0^2 + w_0^2 = C^2, \quad C^2 = \text{const} = v_{00}^2(\varphi_{00}) + w_{00}^2(\varphi_{00}). \quad (12)$$

Если в системе (10) четвертое уравнение поделить на третье при условии, что $w_{00} \neq 0$, то получится дифференциальное уравнение

$$\frac{dw_0}{dv_0} = -\frac{v_0}{w_0}, \quad (13)$$

общее решение которого также удовлетворяет равенству (10).

Следовательно, для восходящих закрученных течений газа на контактной поверхности $r = r_{00}$ имеет место

Закон сохранения модуля вектора скорости газа. Если уменьшается (увеличивается) модуль вертикальной составляющей вектора скорости газа, то увеличивается (уменьшается) модуль окружной составляющей вектора скорости газа в соответствии с формулой (12).

Интегрирование последнего уравнения системы (10) дает

$$w_0(\tau) = D + br_{00} \cos(\tau + \varphi_{00}),$$

и постоянная определяется из условий (9)

$$D = w_{00}(\varphi_{00}) - br_{00} \cos \varphi_{00}.$$

Окончательно

$$w_0(\tau, \varphi_{00}) = w_{00}(\varphi_{00}) + br_{00}(\cos(\tau + \varphi_{00}) - \cos \varphi_{00}). \quad (14)$$

Из соотношения (12) как из следствия третьего и четвертого уравнений системы (8) определяется

$$v_0(\tau, \varphi_{00}) = \sqrt{v_{00}^2(\varphi_{00}) + w_{00}^2(\varphi_{00}) - (w_{00}(\varphi_{00}) + br_{00}(\cos(\tau + \varphi_{00}) - \cos \varphi_{00}))^2}. \quad (15)$$

После интегрирования первого уравнения системы (10) получается уравнение для бихарактеристик системы (5):

$$z = z_{00} + r_{00} \int_0^\tau \frac{w_0}{v_0} d\tau = z_0(\tau, \varphi_{00}). \quad (16)$$

Следовательно, переменные z и φ через параметры τ , φ_{00} выражаются по формулам

$$\varphi = \tau + \varphi_{00}, \quad z = z_0(\tau, \varphi_{00}). \quad (17)$$

Таким образом, искомые v_0 и w_0 , входящие в условия (2), определились как функции двух параметров — τ и φ_{00} . Чтобы получить эти функции как функции переменных z и φ , т. е. из бихарактеристик построить интегральные поверхности системы (5) [13], необходимо параметры τ и φ_{00} выразить через переменные z и φ .

Якобиан преобразования (17) вычисляется по формулам

$$J = \begin{vmatrix} \varphi_\tau & \varphi_{\varphi_{00}} \\ z_{0\tau} & z_{0\varphi_{00}} \end{vmatrix} = z_{0\varphi_{00}} - z_{0\tau}.$$

Поскольку

$$z_{0\varphi_{00}} = r_{00} \int_0^\tau \left(\frac{w_0}{v_0} \right)'_{\varphi_{00}} d\tau \quad (18)$$

и при этом

$$z_{0\tau} = r_{00} \frac{w_0(\tau, \varphi_{00})}{v_0(\tau, \varphi_{00})},$$

окончательно получаем

$$J = -r_{00} \frac{w_0(\tau, \varphi_{00})}{v_0(\tau, \varphi_{00})} + r_{00} \int_0^\tau \left(\frac{w_0}{v_0} \right)'_{\varphi_{00}} d\tau. \quad (19)$$

Если в соотношении (19) положить $\tau = 0$, то

$$J|_{\tau=0} = -r_{00} \frac{w_{00}(\varphi_{00})}{v_{00}(\varphi_{00})} \neq 0,$$

так как ранее предполагалось выполнение неравенств $v_{00}(\varphi_{00}) \neq 0$, $w_{00}(\varphi_{00}) \neq 0$.

Поскольку $J|_{\tau=0} \neq 0$, в окрестности точки $(z = z_{00}, \varphi = \varphi_{00})$ единственным образом определяются функции

$$\tau = \varphi - f(\varphi, z), \quad \varphi_{00} = f(\varphi, z).$$

Поставляя их в соотношения (14) и (15), получаем искомые функции v_0 , w_0 в виде

$$v_0 = v_0(\varphi - f(\varphi, z), f(\varphi, z)), \quad w_0 = w_0(\varphi - f(\varphi, z), f(\varphi, z)),$$

т. е. как функции переменных φ , z .

3. Построение аналитического решения задачи (1), (2), (6)

Теорема. Задача (1), (2), (6) с функциями v_0, w_0 , определенными при решении задачи (5), (7), имеет в некоторой окрестности точки $(r = r_{00}, \varphi = \varphi_{00}, z = z_{00})$ единственное аналитическое решение.

Доказательство теоремы проводится сведением задачи (1), (2), (6) к характеристической задаче Коши стандартного вида, для которой справедлив соответствующий аналог теоремы Ковалевской [13].

Теорема устанавливает существование и единственность локально аналитического решения. При доказательстве подобных теорем радиус сходимости степенных рядов не оценивается по следующей причине: конструктивно можно оценить снизу только радиус сходимости мажорантного ряда. Но подобные оценки для приложений большого интереса не представляют.

Решение задачи (1), (2), (6) будет строиться в виде ряда по степеням $(r - r_{00})$:

$$\mathbf{f}(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{f}_n(\varphi, z) \frac{(r - r_{00})^n}{n!}, \quad \mathbf{f} = \{c, u, v, w\}. \quad (20)$$

Нулевые коэффициенты ряда (20) определяются из условий (2) и решений системы (5), построенных выше. Функция c_1 находится из второго соотношения (4). Для определения u_1 необходимо получить $w_{0z}, v_{0\varphi}$ как функции двух параметров — τ и φ_{00} .

Для вычисления производных сначала продифференцируем соотношение $z = z_0(\tau, \varphi_{00})$ по φ и z :

$$\begin{aligned} 0 &= z_{0\tau} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} + z_{0\varphi_{00}} \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial \varphi} = z_{0\tau}(1 - f_\varphi) + z_{0\varphi_{00}} f_\varphi = z_{0\tau} + J f_\varphi, \\ 1 &= z_{0\tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} + z_{0\varphi_{00}} \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial z} = z_{0\tau}(-f_z) + z_{0\varphi_{00}} f_z = J f_z. \end{aligned}$$

Из этих соотношений получаем

$$f_\varphi = -\frac{z_{0\tau}}{J} = -\frac{r_{00} w_0}{v_0} \frac{1}{J}, \quad f_z = \frac{1}{J}.$$

Тогда производные по φ и z будут вычисляться по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \varphi_{00}} \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \tau} + f_\varphi \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_{00}} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \varphi_{00}} \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial z} = f_z \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_{00}} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Для функций v_0, w_0 эти производные имеют вид

$$\begin{aligned} v_{0\varphi} &= v_{0\tau} + (v_{0\varphi_{00}} - v_{0\tau}) f_\varphi, & w_{0\varphi} &= w_{0\tau} + (w_{0\varphi_{00}} - w_{0\tau}) f_\varphi, \\ v_{0z} &= (v_{0\varphi_{00}} - v_{0\tau}) f_z, & w_{0z} &= (w_{0\varphi_{00}} - w_{0\tau}) f_z, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} w_{0\varphi_{00}}(\tau, \varphi_{00}) &= w_{00\varphi_{00}} - b r_{00} (\sin(\tau + \varphi_{00}) - \sin \varphi_{00}), \\ v_{0\varphi_{00}}(\tau, \varphi_{00}) &= \frac{v_{00} v_{00\varphi_{00}} + w_{00} w_{00\varphi_{00}} - w_0 w_{0\varphi_{00}}}{v_0}. \end{aligned}$$

В частном случае условий (7), когда

$$v_{00}(\varphi) = v_{00} = \text{const}, \quad w_{00}(\varphi) = w_{00} = \text{const},$$

эти производные вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} w_{0\varphi_{00}} &= -br_{00}(\sin(\tau + \varphi_{00}) - \sin(\varphi_{00})), \\ v_{0\varphi_{00}} &= br_{00} \frac{w_0}{v_0} (\sin(\tau + \varphi_{00}) - \sin(\varphi_{00})), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} J &= -r_{00} \frac{w_0}{v_0} + r_{00} \int_0^\tau \left(\frac{w_0}{v_0} \right)'_{\varphi_{00}} d\tau = -r_{00} \frac{w_0}{v_0} - br_{00}^2 \int_0^\tau \frac{(v_0^2 + w_0^2)(\sin(\tau + \varphi_{00}) - \sin(\varphi_{00}))}{v_0^3} d\tau = \\ &= -r_{00} \frac{w_0}{v_0} - br_{00}^2 C^2 \int_0^\tau \frac{(\sin(\tau + \varphi_{00}) - \sin(\varphi_{00}))}{(\sqrt{C^2 - (w_{00} + br_{00}(\cos(\tau + \varphi_{00}) - \cos \varphi_{00}))^2})^3} d\tau. \end{aligned} \quad (24)$$

Формулы (22) позволяют получить u_1 как функцию двух параметров — τ и φ_{00} .

Продифференцируем систему (1) по r , положив $r = r_{00}$, после преобразований будем иметь

$$\left\{ \begin{aligned} u_2 &= F_{11}(\varphi, z), \\ c_2 &= F_{21}(\varphi, z), \\ v_{1\varphi} + \frac{r_{00}w_0}{v_0}v_{1z} + \frac{r_{00}}{v_0} \left(u_1 + \frac{v_{0\varphi}}{r_{00}} \right) v_1 + \frac{r_{00}}{v_0}(v_{0z} - b \sin \varphi)w_1 &= \frac{r_{00}}{v_0}F_{31}(\varphi, z), \\ w_{1\varphi} + \frac{r_{00}w_0}{v_0}w_{1z} + \frac{r_{00}}{v_0} \left(b \sin \varphi + \frac{w_{0\varphi}}{r_{00}} \right) v_1 + \frac{r_{00}}{v_0}(u_1 + w_{0z})w_1 &= \frac{r_{00}}{v_0}F_{41}(\varphi, z). \end{aligned} \right. \quad (25)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_{11}(\varphi, z) &= \frac{v_{0\varphi}}{r_{00}^2} - \frac{v_{1\varphi}}{r_{00}} - \frac{u_1}{r_{00}} - w_{1z} - \frac{2}{(\gamma - 1)c_0} \left[\frac{\gamma + 1}{2}u_1c_1 + \frac{c_{1\varphi}}{r_{00}}v_0 + \right. \\ &\quad \left. + w_0c_{1z} + w_1c_{0z} + \frac{\gamma - 1}{2} \left(w_{0z} + \frac{v_{0\varphi}}{r_{00}} \right) c_1 \right], \\ F_{21}(\varphi, z) &= \frac{\gamma - 1}{2c_0} \left[av_1 - bw_1 \cos \varphi + \frac{2v_0v_1}{r_{00}} - u_1^2 - \frac{u_{1\varphi}}{r_{00}}v_0 - \frac{v_0^2}{r_{00}^2} - w_0u_{1z} - \frac{2}{\gamma - 1}c_1^2 \right], \\ F_{31}(\varphi, z) &= \frac{v_{0\varphi}}{r_{00}^2}v_0 - \frac{v_0u_1}{r_{00}} - \frac{2}{(\gamma - 1)r_{00}}c_0c_{1\varphi} - au_1, \\ F_{41}(\varphi, z) &= \frac{w_{0\varphi}}{r_{00}^2}v_0 + bu_1 \cos \varphi - \frac{2}{\gamma - 1}(c_1c_{0z} + c_0c_{1z}). \end{aligned}$$

Вводя характеристический параметр в третье и четвертое уравнения системы (25) и используя формулы (4), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1\tau} - \frac{r_{00}}{v_0} \left(w_{0z} + \frac{2}{\gamma - 1c_0} w_0 c_{0z} \right) v_1 + \\ + \frac{r_{00}}{v_0} (v_{0z} - b \sin(\tau + \varphi_{00})) w_1 = \frac{r_{00}}{v_0} F_{31}(\tau + \varphi_{00}, z), \\ w_{1\tau} + \frac{r_{00}}{v_0} \left(\frac{w_{0\varphi}}{r_{00}} + b \sin(\tau + \varphi_{00}) \right) v_1 - \\ - \frac{r_{00}}{v_0} \left(\frac{v_{0\varphi}}{r_{00}} + \frac{2}{\gamma - 1c_0} w_0 c_{0z} \right) w_1 = \frac{r_{00}}{v_0} F_{41}(\tau + \varphi_{00}, z). \end{array} \right. \quad (26)$$

Соотношения на бихарактеристике сохраняются в виде

$$\varphi = \varphi_{00} + \tau, \quad \frac{dz}{d\tau} = \frac{r_{00}w_0}{v_0}.$$

Продифференцируем систему (1) по r n раз, положив $r = r_{00}$, после преобразований будем иметь

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = \frac{2}{\gamma - 1c_0} F_{1n}(\varphi, z), \\ c_{n+1} = \frac{\gamma - 1}{2c_0} F_{2n}(\varphi, z), \\ v_{n\varphi} + \frac{r_{00}w_0}{v_0} v_{nz} + \frac{r_{00}}{v_0} \left(nu_1 + \frac{v_{0\varphi}}{r_{00}} \right) v_n + \frac{r_{00}}{v_0} (v_{0z} - b \sin \varphi) w_n = \\ = \frac{r_{00}}{v_0} F_{3n}(\varphi, z), \\ w_{n\varphi} + \frac{r_{00}w_0}{v_0} w_{nz} + \frac{r_{00}}{v_0} \left(b \sin \varphi + \frac{w_{0\varphi}}{r_{00}} \right) v_n + \\ + \frac{r_{00}}{v_0} (nu_1 + w_{0z}) w_n = \frac{r_{00}}{v_0} F_{4n}(\varphi, z). \end{array} \right. \quad (27)$$

Здесь $F_{ik}, i = 1, 2, 3, 4$, — функции, известным образом зависящие от ранее найденных коэффициентов.

С помощью характеристического параметра третье и четвертое уравнения системы (27) сводятся к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{n\varphi} + \frac{r_{00}}{v_0} \left(nu_1 + \frac{v_{0\varphi}}{r_{00}} \right) v_n + \frac{r_{00}}{v_0} (v_{0z} - b \sin(\tau + \varphi_{00})) w_n = \\ = \frac{r_{00}}{v_0} F_{3n}(\tau + \varphi_{00}, z), \\ w_{n\varphi} + \frac{r_{00}}{v_0} \left(b \sin(\tau + \varphi_{00}) + \frac{w_{0\varphi}}{r_{00}} \right) v_n + \\ + \frac{r_{00}}{v_0} (nu_1 + w_{0z}) w_n = \frac{r_{00}}{v_0} F_{4n}(\tau + \varphi_{00}, z). \end{array} \right.$$

Соотношения на бихарактеристике сохраняются в виде

$$\varphi = \varphi_{00} + \tau, \quad \frac{dz}{d\tau} = \frac{r_{00}w_0}{v_0}.$$

Начальные условия для систем (24) и (26) получаются из условий (6), если функции $v^0(r, \varphi)$ и $w^0(r, \varphi)$ разложить в ряд по степеням $r - r_{00}$:

$$\mathbf{f}^0(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{f}^0_n(\varphi) \frac{(r - r_{00})^n}{n!}, \quad \mathbf{f}^0 = \{v^0, w^0\}.$$

В параметрической форме начальные данные имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi_{00}, & z(0) &= z_{00}, \\ v_n(0) &= v_r^{0(n)}(r_{00}, \varphi_{00}), & w_n(0) &= w_r^{0(n)}(r_{00}, \varphi_{00}). \end{aligned}$$

Таким образом, в виде ряда (20) построено локально-аналитическое решение задачи (1), (2), (6). Коэффициенты ряда (20), зависящие от параметров τ , φ_{00} , определяются при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Заметим, что хотя нулевые коэффициенты v_0 , w_0 находятся из нелинейных дифференциальных уравнений, но они особенностей не имеют (см. формулы (14) и (15)). Поскольку остальные члены ряда находятся при решении линейных дифференциальных уравнений, они также особенностей не имеют. Однако отсутствие особенностей у коэффициентов рядов не исключает возможности расходимости рядов при больших значениях независимых переменных. Но тогда для данной задачи это будет математическим свойством используемых рядов. В наблюдаемых в природе течениях соответствующие контактные поверхности и течения газа вокруг них особенностей не имеют [9–11].

4. Численное моделирование течения газа на контактной поверхности и в ее окрестности

Для построения конкретных течений газа на контактной поверхности $r = r_{00}$ и в ее окрестности выбраны следующие безразмерные величины:

$$\gamma = 1.4, \quad b = 0.001379, \quad r_{00} = 1, \quad z_{00} = 0.00027, \quad c_{00} = 1, \quad v_{00} = 0.159, \quad w_{00} = 0.0024.$$

При введении безразмерных переменных в качестве масштабов скорости и расстояния взяты соответственно $1/3 \cdot 10^3$ м/с и 3650 м, тогда использованные входные данные соответствуют тропическому циклону средней интенсивности, находящемуся на широте $\psi = \pi/6$ [3]. В восходящем закрученном потоке с приведенными значениями входных констант частица газа, сделав полный оборот по поверхности цилиндрической контактной поверхности с размерным значением ее радиуса $r_{00} = 3650$ м, поднялась на высоту 3462 м. На рис. 3 приведены бихарактеристики $z = z_0(\tau, \varphi_{00})$, при численном построении которых с шагом $\Delta\tau = 0.001$ выбирались точки (φ_k, z_k) : фиксировалось φ_{00} , вычислялись $\varphi_k = \tau_k + \varphi_{00}$ и $z_k = z_0(\tau_k, \varphi_{00})$.

Таким образом, построена неравномерная сетка для переменных φ , z . В узлах этой сетки и вычислялись значения функций $v_0(\varphi, z)$ и $w_0(\varphi, z)$. В результате численно построены интегральные поверхности для параметров газа на контактном разрыве. На рис. 4 и 5 приведены интегральные поверхности для функций $v_0(\varphi, z)$ и $w_0(\varphi, z)$.

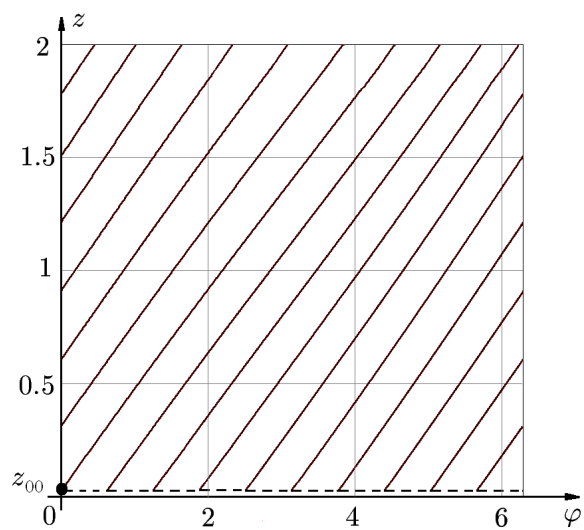


Рис. 3

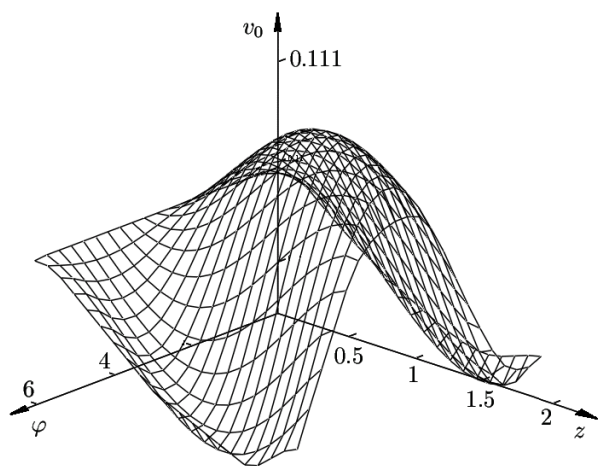


Рис. 4

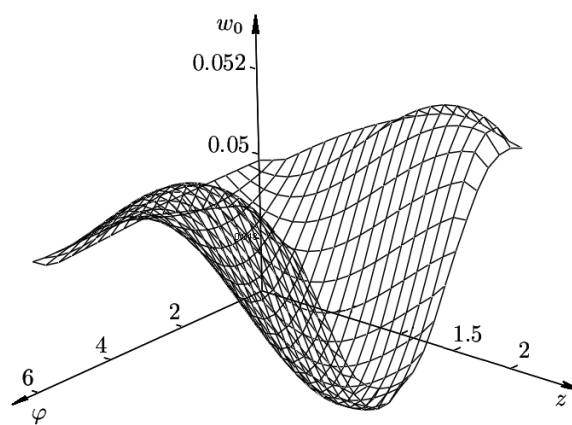


Рис. 5

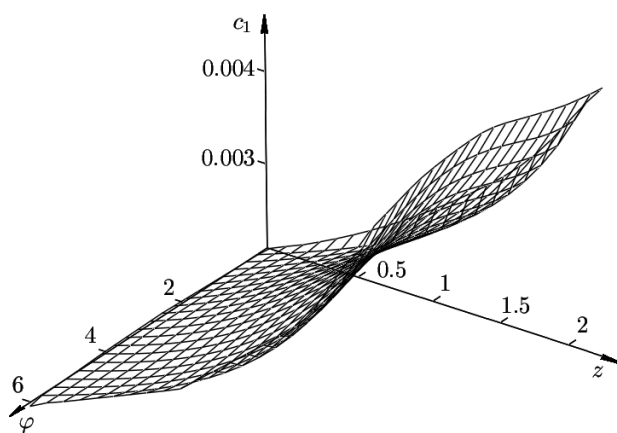


Рис. 6

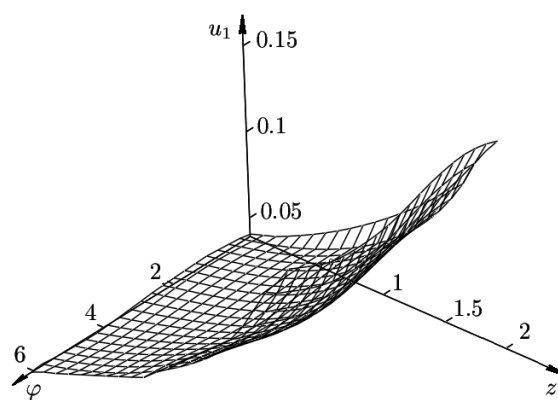


Рис. 7

На рис. 6 и 7 приведены поверхности $c_1(\varphi, z)$ и $u_1(\varphi, z)$ производных, выводящих с контактной поверхности, также численно построенные в узлах упомянутой сетки.

Полученные функции $c_1(\varphi, z)$ и $u_1(\varphi, z)$ в рассматриваемой области имеют положительные значения. Следовательно, при отходе от контактной поверхности $r = r_{00}$ в область искомого течения при $r > r_{00}$ значения скорости звука возрастают, а значения радиальной скорости становятся положительными и тоже возрастают. Это качественно согласуется со свойствами течений, построенных с помощью разложений решений системы уравнений газовой динамики по степеням малых параметров Ω и g [1–4].

Список литературы / References

- [1] **Баутин С.П.** Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.
Bautin, S.P. Tornado and Coriolis forces. Novosibirsk: Nauka, 2008. 96 p. (In Russ.)
- [2] **Баутин С.П., Обухов А.Г.** Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. Новосибирск: Наука, 2012. 152 с.
Bautin, S.P., Obukhov, A.G. Mathematical modeling of devastating atmospheric vortexes. Novosibirsk: Nauka, 2008. 152 p. (In Russ.)
- [3] **Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г., Баутин К.В.** Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты. Новосибирск: Наука, 2013. 215 с.
Bautin, S.P., Krutova, I.Yu., Obukhov, A.G., Bautin, K.V. Devastating atmospheric vortexes: theorems, calculations, experiments. Novosibirsk: Nauka, 2008. 215 p. (In Russ.)
- [4] **Баутин С.П., Дерябин С.Л., Крутова И.Ю., Обухов А.Г.** Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси. Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2017. 336 с.
Bautin, S.P., Deryabin, S.L., Krutova, I.Yu., Obukhov, A.G. The destroying atmospheric vortexes and the Earth's rotation around its axis. Ekaterinburg: USURT, 2017. 336 p. (In Russ.)
- [5] **Дерябин С.Л., Мезенцев А.В.** Эволюция газовых течений, примыкающих к вакууму, в условиях действия сил тяготения и Кориолиса // Тр. Ин-та матем. и механики. 2010. Т. 16, № 2. С. 63–74.
Deryabin, S.L., Mezentsev, A.V. The evolution of the gas flows which adjoin to a vacuum subject to gravity and Coriolis forces // Tr. In-ta Matematiki i Mekhaniki. 2010. Vol. 16, No. 2. P. 63–74. (In Russ.)
- [6] **Дерябин С.Л., Мезенцев А.В.** Численно-аналитическое моделирование газовых течений, примыкающих к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса // Вычисл. технологии. 2010. Т. 15, № 5. С. 51–71.
Deryabin, S.L., Mezentsev, A.V. Computational and analytic modeling of gas flows adjacent to vacuum under the action of gravity and Coriolis // Comput. Technologies. 2010. Vol. 15, No. 5. P. 51–71. (In Russ.)
- [7] **Крутова И.Ю.** Задача о движении газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости // Вестн. УрГУПС. 2012. № 1(13). С. 14–21.
Krutova, I.Yu. Gas flow problem in the circumstances of gravity and Coriolis force effect in surroundings of impermeable horizontal flatness // Herald of USURT. 2012. No. 1(13). P. 14–21. (In Russ.)

- [8] **Крутова И.Ю.** Трехмерный стационарный поток газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости // Вестн. УрГУПС. 2012. № 3(15). С. 16–23.
Krutova, I.Yu. Three-dimensional stationary gas flow under impact of forces of gravity and Coriolis in the neighbourhood of impervious horizontal plane // Herald of USURT. 2012. No. 3(15). P. 16–23. (In Russ.)
- [9] **Наливкин Д.В.** Ураганы, бури и смерчи. Географические особенности и геологическая деятельность. Л.: Наука, 1969. 487 с.
Nalivkin, D.V. Hurricanes, storms and tornados. Geographical peculiarities and geological activity. L.: Nauka, 1969. 487 p. (In Russ.)
- [10] **Наливкин Д.В.** Смерчи. М.: Наука, 1984. 112 с.
Nalivkin, D.V. Tornados. Moscow: Nauka, 1984. 112 p. (In Russ.)
- [11] **Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н.** Торнадо. М.: Физматлит, 2011. 312 с.
Varaksin, A.Yu., Romash, M.E., Kopeytsev, V.N. Tornado. Moscow: Fizmatlit, 2011. 312 p. (In Russ.)
- [12] **Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.** Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.
Kochin, N.E., Kibel, I.A., Roze, N.V. Theoretical hydromechanics. Pt 2. Moscow: Fizmatgiz, 1963. 728 p. (In Russ.)
- [13] **Баутин С.П.** Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.
Bautin, S.P. The characteristic Cauchy problem and its application in gas dynamics. Novosibirsk: Nauka, 2009. 368 p. (In Russ.)
- [14] **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
Curant, R. Partial derivatives equations. Moscow: Mir, 1964. 830 p. (In Russ.)

*Поступила в редакцию 22 июля 2016 г.,
с доработки — 5 июля 2017 г.*

Mathematical modeling of the stationary ascending swirling flows in the vicinity of contact surface

BAUTIN, SERGEY P.*, DERYABIN, SERGEY L., MEZENTSEV, ALEXEY V.

Ural State University of Railway Transport, Ekaterinburg, 620034, Russia

*Corresponding author: Bautin, Sergey P., e-mail: SBautin@usurt.ru

This work addresses mathematical modelling of such part of ascending swirling flows which adjoins a resting gas in the central part of the flow.

The methodology contains the formulation of the initial-boundary problems for the system of equations of gas dynamics subject to gravity and Coriolis forces. The solutions of the problem is presented in the form of infinite convergent series. The coefficients are determined recurrently using the system of ordinary differential equations.

The findings of this work include a proof of the existence and uniqueness solutions of the characteristic Cauchy problem in the standard form. These solutions describe the corresponding part of a three-dimensional stationary ascending twisting flow.

The coefficients of the series are the solutions of the specific system of ordinary differential equations. The initial coefficients are used for the approximate presentation of the unknown flows.

Originality of the work is that for ascending swirling flows the mathematical problem is posed. The solution of problem describes the flow in the vicinity of the vertical contact surface. The existence of solution in the class of analytic functions is proved and the required flow is approximately described.

Keywords: system of equations of gas dynamics, Coriolis force, ascending swirling flows, contact surface, converging series.

Received 22 July 2016

Received in revised form 5 July 2017