Редукции уравнений с частными производными к системам обыкновенных дифференциальных уравнений

О. В. Капцов*, Д. О. Капцов
Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия
*Контактный e-mail: kaptsov@icm.krasn.ru

Предложен метод использования симметрий высших порядков и инвариантных многообразий для поиска совместного численного решения уравнений с частными производными. Необходимость применения такого подхода обусловлена невозможностью нахождения общего решения подобных уравнений в большинстве случаев. Рассмотрены примеры использования предложенного подхода к уравнениям Кортевега — де Фриза, sin-Гордон и sh-Гордон с графиками решений.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с частными производными, обыкновенные дифференциальные уравнения, инвариантные многообразия, редукции уравнений.

Введение

Как известно, для интегрирования уравнений с частными производными первого порядка Шарпи, Лагранж, а затем Якоби использовали дополнительные соотношения [1]. Во второй половине прошлого века Н.Н. Яненко предложил применять дифференциальные связи для нахождения решений уравнений математической физики. Его учениками и последователями получены многочисленные решения ряда моделей механики сплошной среды [2]. Следует отметить, что одна из серьезных проблем данного подхода заключается в нахождении дифференциальных связей, совместных с исходными уравнениями.

С другой стороны, в последние десятилетия найдены нелинейные уравнения с частными производными, обладающие высшими симметриями [4,5]. В свою очередь, высшие симметрии порождают дифференциальные связи. Однако их применение для построения решений наталкивается на значительные трудности. Дело в том, что необходимо интегрировать дифференциальные уравнения не ниже второго порядка. Например, в случае уравнения Кортевега — де Фриза нужно интегрировать дифференциальные уравнения пятого порядка или выше. В работах Матвеева, Новикова, Дубровина, Кричевера [6–8] и их последователей для интегрирования подобных уравнений применялся метод конечнозонного интегрирования.

В работе [9] предложен метод редукции уравнений в частных производных с дополнительными дифференциальными связями к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученные системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно решать стандартными численными методами типа Рунге—Кутты. В данной работе метод редукции применяется для решений уравнения Кортевега—де Фриза, уравнений sin-Гордон и sh-Гордон.

1. Инвариантные многообразия уравнений

Для простоты изложения опишем метод редукции для случая одного уравнения с двумя неизвестными переменными. Более общая ситуация описана в [10].

Пусть задано эволюционное уравнение

$$E \equiv u_t + F(t, x, u, u_1, ..., u_n) = 0, \tag{1}$$

где $u_i = \partial^i u/\partial x^i$. Задано также обыкновенное дифференциальное уравнение

$$h \equiv u_m + G(x, u, u_1, ..., u_{m-1}) = 0. \tag{2}$$

Геометрически уравнения (1) и (2) задают многообразия в пространстве джетов [5]. Всюду в дальнейшем эти многообразия считаются бесконечно дифференцируемыми.

Определение. *Многообразие (2) называется инвариантным относительно уравнения (1), если соотношение*

$$D_t h = 0 \tag{3}$$

выполняется в силу уравнений (1), (2) и их дифференциальных следствий по переменной x.

В формуле (3) D_t — оператор полного дифференцирования по t, а под дифференциальными следствиями по x уравнений (1), (2) понимаются выражения $D_x^k E = 0$, $D_x^k h = 0$, $k \geq 1$. Здесь D_x — оператор полного дифференцирования по x.

В [9] доказано следующее утверждение.

Лемма. *Пусть многообразия (2) являются инвариантными относительно уравнения (1). Тогда в некоторой окрестности точки $(t_0, x_0) \in R^2$ существует единственное гладкое решение системы (1), (2), удовлетворяющее начальным данным*

$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j}(t_0, x_0) = c_j,$$

где $0 \leq j \leq m-1$; c_j — произвольные константы.

В качестве первого приложения этой леммы рассмотрим уравнение Кортевега—де Фриза

$$u_t = u_{xxx} + u u_x. \tag{4}$$

Как известно [4], это уравнение допускает бесконечное число операторов симметрий

$$X_i = f_i \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{k \geq 1} D_x^k f_i, \quad i \geq 1.$$

Выпишем некоторые функции f_i:

$$f_1 = u_1, \quad f_2 = u_3 + u u_1, \quad f_5 = u_5 + \frac{5}{3} u u_3 + \frac{10}{3} u_1 u_2 + \frac{5}{6} u^2 u_1.$$

Простейшим нетривиальным решением уравнения Кортевега—де Фриза (4) является солитон, который задается формулами

$$u = 12\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln F, \quad F = 1 + ce^{kx+k^3t},$$

где c, k — произвольные константы [11]. Несложно проверить, что эта функция u при $c = 1$ удовлетворяет уравнению второго порядка

$$u_{xx} + \frac{u^2}{2} - k^2u = 0.$$

Левая часть последнего уравнения делит дифференциальный многочлен $h = f_5 - f_1$ в том смысле, что

$$h = D_x^3 g + \left(\frac{2u}{3} + k^2\right) D_x g + \frac{u_x}{3} g.$$

Мы полагаем $k = 1$ и приравниваем h к нулю. В результате получаем дифференциальную связь пятого порядка

$$u_{xxxxx} + \frac{5}{3}uu_{xxx} + \frac{10}{3}u_x u_{xx} + \frac{5}{6}u^2 u_x - u_x = 0. \tag{5}$$

Введем новые функции

$$w_1 = u_x, \quad w_2 = u_{xx}, \quad w_3 = u_{xxx}, \quad w_4 = u_{xxxx}.$$

Тогда из уравнения (5) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений по x:

$$u_x = w_1, \quad w_{1_x} = w_2, \quad w_{2_x} = w_3, \quad w_{3_x} = w_4,$$
$$w_{4_x} = -\frac{5}{3}uw_2 - \frac{10}{3}w_1w_2 - \frac{5}{6}u^2w + w_1. \tag{6}$$

Дифференцируя по x уравнения (4) и используя (6), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений по t:

$$u_t = w_3 + uw_1, \quad w_{1_t} = w_4 + uw_2 + w_1^2, \quad w_{2_t} = \frac{16uw_3 + 38w_1w_2 + 5u^2w_1}{6},$$
$$w_{3_t} = \frac{54w_1w_3 + 16uw_4 + 38w_2^2 + 10uw_1^2 + 5u^2w_2}{6},$$
$$w_{4_t} = \frac{390w_2w_3 + 210w_1w_4 + 80u^2w_3 + 160w_1w_2u + 40u^3w_1 + 30w_1^3}{18} +$$
$$+\frac{90uw_2w_1 + 15u^2w_3}{18}. \tag{7}$$

Согласно лемме, можем задать пять начальных значений. Поскольку t и x не входят явным образом в (6), (1), не ограничивая общности, полагаем $t_0 = x_0 = 0$. Мы хотим вычислить решения, “близкие” к солитону, поэтому берем начальные данные, близкие к начальным данным, полученным из солитонного решения.

Полагая $u(0) = 3.1,\ w_1(0) = 0,\ w_2(0) = -3/2,\ w_3(0) = 0,\ w_4(0) = 3$ и решая методом Рунге—Кутты систему (6), находим функции u, w_1, w_2, w_3, w_4 при $t = 0$, зависящие от x. Затем многократно решаем систему (1), задавая в качестве начальных данных найденные значения функций u, w_1, w_2, w_3, w_4 в прямоугольнике $-10 \leq t \leq 10, -10 \leq x \leq 10$. График решения представлен на рис. 1.

Теперь покажем, как описанный подход применяется к уравнениям неэволюционного типа. Рассмотрим уравнение sin-Гордон

$$u_{tx} = \sin(u) \tag{8}$$

и допускаемые операторы симметрий [4]

$$X_i = f_i \partial_u + \sum_{k_1+k_2 \geq 1} D_t^{k_1} D_x^{k_2} f_i \frac{\partial}{\partial u_{(k_1,k_2)}},$$

где $f_1 = u_x$, $f_2 = u_{xxx} + \dfrac{1}{2}u_x^3$, $u_{(k_1,k_2)} = \dfrac{\partial^{k_1+k_2} u}{\partial t^{k_1} \partial x^{k_2}}$. Этим операторам сопоставляется обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$u_{xxx} + \frac{1}{2}u_x^2 + cu_x = 0, \quad c \in R. \tag{9}$$

Вычисляя производную u_{txxx} согласно уравнению (8) и уравнению (9), а затем приравнивая полученные выражения, запишем уравнение второго порядка

$$u_{xx} + \frac{u_x^2 + 2c}{2} \operatorname{tg}(u) = 0. \tag{10}$$

Вычисляем производную u_{txx} с помощью уравнений (8), (10) и затем, сравнивая, приходим к уравнению первого порядка

$$u_t + \frac{2u_x \cos(u)}{u_x^2 + 2c} = 0. \tag{11}$$

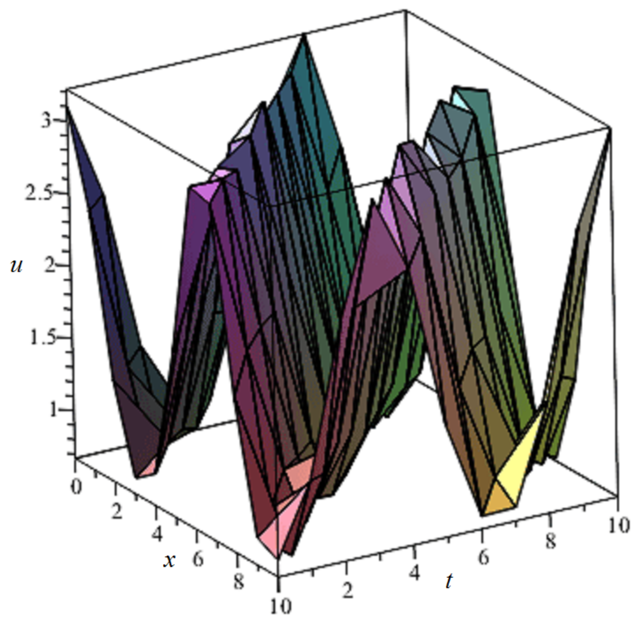

Рис. 1

Несложно проверить, что (11) является инвариантным многообразием уравнения (9), а уравнение sin-Гордон — дифференциальным следствием уравнений (10), (11).

Значит, любое решение системы уравнений (10), (11) является решением уравнения sin-Гордон. Вводим новую функцию $w = u_x$. Тогда, действуя описанным ранее способом, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_x = w, \quad w_x = -\frac{w^2 + 2c}{2}\operatorname{tg}(u), \tag{12}$$

$$u_t = -2\frac{w\cos(u)}{w^2 + 2c}, \quad w_t = \sin(u). \tag{13}$$

Будем считать, что $c = -1$ и зададим следующие начальные данные при $t = 0,\ x = 0$:

$$u = 0.5, \quad w = 0.1.$$

Решая сначала систему (12), а затем систему (13), находим решение, приведенное на рис. 2. Можно показать, что график решения представляет собой линейчатую поверхность, направляющая кривая которой является периодической.

Третий пример не связан с симметриями. Как показано в [10], нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_t = \frac{u_{xx}}{u} \tag{14}$$

обладает инвариантным многообразием

$$u_{xxx} - 2\frac{u_x u_{xx}}{u} - c_1 - c_2 u^4 = 0, \tag{15}$$

где $c_1, c_2 \in R$.

Оказывается, решения этой системы являются решениями гиперболического уравнения второго порядка. Действительно, дифференцируя уравнение (14) по x, получаем соотношение

$$u_{tx} = \frac{u_{xxx}u - u_x u_{xx}}{u^2}. \tag{16}$$

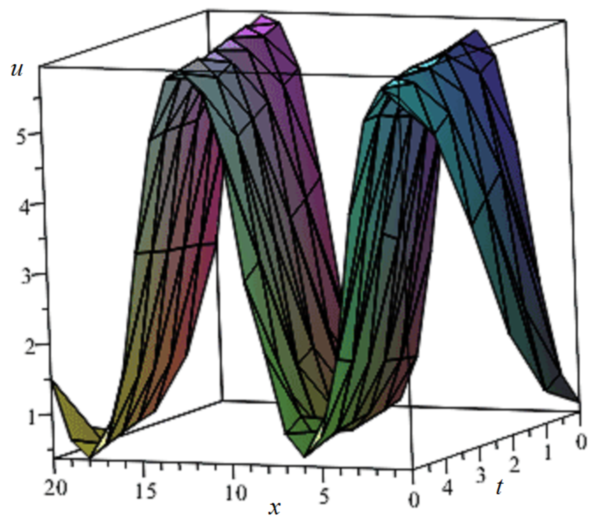

Рис. 2

Подставляя производную u_{xxx} из (15) в (16), получаем

$$u_{tx} = \frac{u_x u_{xx} + c_1 u + c_2 u^5}{u^2}. \tag{17}$$

Выражая u_{xx} из уравнения (14) и подставляя в (17), приходим к уравнению

$$u_{tx} = \frac{u_x u_t + c_1 + c_2 u^4}{u}.$$

Далее вводим новую функцию $v = \ln(u)$. Тогда последнее уравнение принимает вид

$$v_{tx} = c_2 e^{2v} + c_1 e^{-2v}.$$

При $c_2 = 1/2, c_1 = -1/2$ получается уравнение sin-Гордон. Теперь построим решения системы (14), (15). Для этого введем две новые функции $w_1 = u_x,\ w_2 = u_{xx}$. Тогда уравнение (15) записывается в виде системы

$$u_x = w_1, \quad w_{1_x} = w_2, \quad w_{2_x} = \frac{2w_1 w_2}{u} + c_1 + c_2 u^4.$$

Дифференцируя уравнение (14), несложно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_t = \frac{w_2}{u}, \quad w_{1_t} = -\frac{c_1 u^5 + c_2 u - w_1 w_2}{u^2}, \quad w_{2_t} = -\frac{4c_1 u^4 w_1 - w_2^2}{u^2}.$$

В результате численного интегрирования получаем решение, уходящее на бесконечность при

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{2}, \quad u|_{t=x=0} = 0.5, \quad w_1|_{t=x=0} = 0.01, \quad w_2|_{t=x=0} = -0.001.$$

Таким образом, представленный метод может быть использован для построения решений нелинейных уравнений математической физики, включая задачи гидродинамики свободных турбулентных течений. Основные трудности метода состоят в нахождении дифференциальных связей и выборе подходящих начальных данных. Для нахождения связей можно использовать линейные определяющие уравнения, описанные в монографии [10].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-01-00332-а).

Список литературы / References

[1] **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. IV, ч. II. М.: Наука, 1981. 512 с.
Smirnov, V.I. Course of higher mathematics. Vol. IV, pt II. Moscow: Nauka, 1981. 512 p. (In Russ.)

[2] **Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.** Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 с.
Sidorov, A.F., Shapeev, V.P, Yanenko, N.N. The method of differential constraints and its applications in gas dynamics. Novosibirsk: Nauka, 1984. 272 p. (In Russ.)

[3] **Meleshko, S.V.** Methods for constructing exact solutions of partial differential equations. N.Y.: Springer, 2005. 352 p.

[4] **Ибрагимов Н.Х.** Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
Ibragimov, N.Kh. Groups of transformations in mathematical physics. Moscow: Nauka, 1983. 280 p. (In Russ.)

[5] Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Под ред. А.М. Виноградова, И.С. Красильщика. М.: Факториал, 1997. 464 с.
Symmetries and conservation laws of equations of mathematical physics / A.M. Vinogradov, I.S. Krasil'shchik (Eds). Moscow: Factorial, 1997. 464 p. (In Russ.)

[6] **Belokolos, E.D., Bobenko, A.I., Enolski, V.Z., Its, A.R., Matveev, V.B.** Algebro-geometric approach in the theory of integrable equations. Berlin: Springer, 1994. 337 p.

[7] **Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П.** Интегрируемые системы. I // Итоги науки и техники. Сер.: Совр. проблемы математики. Фундам. направления. 1985. Т. 4. С. 179–277.
Dubrovin, B.A., Krichever, I.M., Novikov, S.P. Integrable systems. I // Itogi Nauki i Tekhniki. Ser.: Sovr. Problemy Matematiki. Fundam. Napravleniya. 1985. Vol. 4. P. 179–277. (In Russ.)

[8] **Дубровин Б.А.** Римановы поверхности и нелинейные уравнения. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 152 с.
Dubrovin, B.A. Riemann surfaces and nonlinear equations. Izhevsk: NITS Regulyarnaya i Khaoticheckaya Dinamika, 2001. 152 p. (In Russ.)

[9] **Kaptsov, O.V.** Invariant sets of evolution equations // Nonlinear Anal. 1992. Vol. 19, No. 8. P. 730–761.

[10] **Andreev, V.K., Kaptsov, O.V., Pukhnachov, V.V., Rodionov, V.V.** Applications of group-theoretical methods in hydrodynamics. London: Kluwer Acad. Publ., 1998. 396 p.

[11] **Абловиц М., Сигур Х.** Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 479 с.
Ablowitz, M., Segur, H. Solitons and the inverse scattering transform. Philadelphia: SIAM, 1981. 425 p.

Поступила в редакцию 29 марта 2017 г.,
с доработки — 18 мая 2017 г.

Reduction of partial differential equations to the systems of ordinary differential equations

Kaptsov, Oleg V.*, Kaptsov, Dmitry O.

Institute of Computational Modeling SB RAS, Krasnoyarsk, 660036, Russia

*Corresponding author: Kaptsov, Oleg V., e-mail: kaptsov@icm.krasn.ru

In our article we develop an approach for constructing particular solutions of differential equations. This approach is based on the use of higher symmetries allowed by partial differential equations and the method of differential constraints proposed by N.N. Yanenko.

We restrict ourselves to the study of partial differential equations with two independent variables. Differential constraints and the coefficients of admissible symmetry operators generate ordinary differential equations. The classical Lie theory works well in the case of point and contact transformations. When higher symmetries and higher-order differential constraints are considered then arises the problem of integrating higher-order ordinary differential equations. The solutions of such differential equations are obtained by the inverse scattering problem and finite-zone integration method in the soliton theory. However, this approach has a number of significant difficulties. For example, it is often difficult to sort out real solutions from a set of complex solutions, or solutions are expressed through insufficiently studied functions.

Our approach is based on the numerical integration of passive systems. The additional ordinary differential equations are invariant manifolds of evolution equations. This allows us to rewrite an overdetermed system as two systems of ordinary differential equations. Further we sequentially solve these systems by the Runge — Kutta method. We apply this approach to the Korteweg — de Vries equations, Sin-Gordon and Sinh-Gordon equations. The bounded and unrestricted solutions are found and solution images are constructed. This approach can be used for equations with an arbitrary number of independent variables.

Keywords: partial differential equations, systems of ordinary differential, invariant manifolds, the reduction of equations.

Acknowledgements. This research was supported by RFBR (grant No. 17-01-00332).

Received 29 March 2017
Received in revised form 18 May 2017