

Компактная разностная схема на адаптивной сетке для волнового уравнения

В. И. ПААСОНЕН

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет, Россия

Контактный e-mail: paas@ict.nsc.ru

Предметом исследования в данной работе является адаптивная технология расчета для разностных схем повышенной точности. Исследуется компактная разностная схема, которая аппроксимирует волновое уравнение с третьим порядком на неравномерной пространственной сетке и с четвертым порядком относительно постоянного временного шага. Сетка перестраивается на каждом шаге по времени почти классическим методом, однако в дополнение к нему предлагается эффективный способ коррекции сетки. Эта операция ориентирована на сглаживание слишком резкого изменения пространственного шага в областях значительной кривизны. Такие области расположены, например, в вершинах и у “подножия” солитонов или вблизи фронтов ударных переходов. В работе проведены численные эксперименты на точных решениях в виде сглаженных ударных волн, солитонов, а также их комбинаций. Выполнено сравнение с другими методами.

Ключевые слова: неравномерная сетка, адаптивная сетка, солитон, ударный переход, компактная схема, схема повышенной точности.

Введение

Для краевых задач, решения которых содержат узкие зоны больших градиентов на фоне обширных промежутков плавного изменения решения, равномерные сетки не экономичны, так как аппроксимационные требования к шагу сетки в зоне больших градиентов в условиях равномерной сетки приводят к избыточно мелкому шагу всюду, в том числе на обширных промежутках слабого изменения решения, а это существенно увеличивает объем массивов и вычислений. Для задач с неоднородным характером решения на различных участках более естественными представляются неравномерные сетки. Разумеется, в случае динамических задач преимущество неравномерных сеток имеет шанс проявиться лишь при наличии разумного механизма адаптации сетки к решению.

Существует два основных подхода к численному решению задач с неоднородным характером искомой функции. Первый основан на замене переменных, которая обеспечивает автоматическое масштабирование, при этом в новых переменных используется равномерная сетка. Этот подход очень широко используется при численном исследовании пограничных слоев (см., например, [1]). Для него характерно усложнение дифференциального оператора и, как следствие, усложнение разностных аппроксимаций. Другой подход предполагает расчеты в исходных переменных на адаптивной сетке с буквальной перестройкой сетки и интерполяцией решения на новую сетку.

Критерии, по которым вычисляется распределение шага адаптивной сетки, могут быть самыми различными. Это, например, равномерность по длине дуги кривой [2], постоянство локального значения погрешности аппроксимации [3], постоянство абсолютной величины изменения решения на шаге сетки [4]. Местный размер шага сетки может определяться также методом эквираспределения [5], при котором произведение длины шага на значение управляющей функции поддерживается постоянным. Огромное количество разнообразных методов организации адаптивных сеток описано в обзоре [6].

При необходимости в повышенном порядке точности нелинейность, возникающая в результате преобразования переменных, может оказаться существенным препятствием для повышения порядка точности без расширения шаблона схемы. В этом случае предпочтение следует отдать именно второму подходу, при котором хотя сетка не равномерна, но зато дифференциальные операторы в уравнении не отягощены нелинейным преобразованием.

В данной работе предметом исследования является компактная схема для волнового уравнения третьего порядка точности по пространственной переменной на неравномерной сетке и четвертого порядка по постоянному временному шагу. Попутно даются некоторые рекомендации по коррекции сетки, выработанные в процессе проведения численных экспериментов, а также приводятся результаты сравнения с другими методами на точных решениях в виде солитонов, сглаженных скачков и их комбинаций.

1. Алгоритм построения сетки

Для определенности за основу примем метод построения сетки, квазиравномерной по модулю приращения решения [4]. Предположим, что при расчете динамической задачи с одной пространственной переменной на некоторый момент времени получено решение U на сетке x . Новая сетка, квазиравномерная относительно модуля приращения функции U , строится следующим образом. На сетке x строится аппроксимация управляющей функции

$$W(x) = \int_{x_0}^x \left(\left| \frac{\partial U}{\partial \xi} \right| + \alpha \right) d\xi, \quad \alpha > 0.$$

При $\alpha = 0$ и возрастании U функция W копирует профиль U с точностью до сдвига на несущественную константу, а на промежутках убывания функции U профиль функции W выглядит как зеркальное отражение функции U относительно горизонтальной плоскости, проходящей через точку ее максимума. Для получения взаимно-однозначного отображения $x \leftrightarrow W$ добавлено слагаемое $\alpha > 0$, обеспечивающее строгую монотонность W даже при наличии промежутков постоянства функции U .

В области значений функции W задается равномерная сетка, образ которой при обратном преобразовании $W \rightarrow x$ определяет искомую неравномерную сетку, почти равномерную относительно модуля приращения решения U на шаге, если только вклад линейной функции не слишком велик. Параметр α выбирается так, чтобы на промежутках возможного постоянства функции U получить не слишком большую величину шага сетки по x .

Описанный метод [4] и его различные модификации часто используются на практике в качестве инструмента преобразования переменных или для непосредственного постро-

ения адаптивной сетки. Численные эксперименты по схемам третьего порядка точности по пространственной переменной для уравнения теплопроводности и уравнения Шрёдингера, выполненные автором [7] с применением описанного метода адаптации сетки к решению, выявили некоторые его недостатки. Например, наблюдается нежелательное укрупнение шага сетки в окрестности экстремума функции U (например, вершины солитона), вызывающее здесь всплеск погрешности. Далее, в переходных областях от зон больших градиентов к спокойному поведению решения шаг изменяется слишком резко, что также является заметным источником погрешности. Это проявляется, например, вблизи ударного перехода (сглаженной ударной волны) и у “подножия” солитона. Причина проясняется из сравнения солитона и соответствующего линейного полигона, построенного по узлам сетки. Выделим четыре зоны: зону постоянства функции, “склоны” солитона, вершину солитона и его “подножие”. В зоне постоянства полигон совпадает с кривой при любом шаге, на “склонах” имеет место хорошее совпадение ввиду достаточного сгущения сетки, которую обеспечивает адаптивный алгоритм. А вот у “подножия” ломаная визуально сильно отличается от кривой, так как кривизна здесь значительна, а шаг сетки уже недостаточно мал.

Иногда в подынтегральное выражение управляющей функции включают также модуль второй производной с некоторым весом:

$$W(x) = \int_{x_0}^x \left(\left| \frac{\partial U}{\partial \xi} \right| + \beta \left| \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right| + \alpha \right) d\xi,$$

это несколько улучшает аппроксимацию, но не кардинально. А именно, в численных экспериментах наблюдалась довольно слабая зависимость сетки от веса β при второй производной.

Уменьшение веса α линейной поправки тоже не исправляет положение, так как ведет лишь к тотальному уменьшению шага во всей зоне слабого изменения функции (за счет укрупнения шага в зонах сгущения), но не делает изменение шага сетки в переходной зоне плавным.

Классический алгоритм сглаживания функции по трем соседним узлам

$$\hat{Z}_i = (1 - \alpha)Z_i + \alpha \frac{(x_i - x_{i-1})Z_{i+1} + (x_{i+1} - x_i)Z_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

также не приводит к успеху, так как этот метод быстро справляется с устранением высокочастотного шума, тогда как в данном случае функция имеет совсем другую специфику — большую кривизну в проблемных зонах. Заметим, что для достижения положительного эффекта такое сглаживание потребовалось бы проводить многократно в длинном цикле, что не является эффективным.

Кроме того, при использовании управляющей функции в представленном виде трудно делать разумный выбор коэффициентов ввиду применения размерных величин с непредсказуемым соотношением масштабов, сильно различающимся от задачи к задаче.

В связи с вышесказанным метод построения сетки нуждается в некой коррекции для достижения более плавной зависимости величины шага от координаты в зонах значительной кривизны функции. Желательно также использовать безразмерные величины.

Итак, определим дискретные функции W и V следующим образом:

$$W_0 = 0, \quad W_i = \sum_{j=1}^i |U_j - U_{j-1}|, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$V_0 = 0, \quad V_i = \sum_{j=1}^i \left| \frac{U_{j+1} - U_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{U_j - U_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right|, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad V(N) = V(N-1).$$

Здесь граничные значения для функции V заданы в предположении линейного продолжения решения U за пределы отрезка $[x_0, x_N]$.

Из представленных двух функций составим управляющую функцию как сумму с весами, обезразмерив каждое из слагаемых, а также добавим линейную поправку, тоже с весом:

$$Z_i = (1 - \alpha) \left((1 - \beta) \frac{W_i}{W_N} + \beta \frac{V_i}{V_N} \right) + \alpha \frac{x_i - x_0}{x_N - x_0}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

Область значений возрастающей дискретной функции Z принадлежит отрезку $[0, 1]$. По ней линейной интерполяцией построим строго монотонную функцию непрерывного аргумента в виде кусочно-линейного полигона. Тогда равномерное разбиение

$$\hat{Z}_i = i/\hat{N}, \quad i = 0, \dots, \hat{N},$$

области значений полигона определит однозначно новую сетку $\hat{x}_i = x(\hat{Z}_i)$, зависящую от выбора весов управляющей функции. Заметим, что число шагов новой сетки \hat{N} не обязано совпадать с числом шагов N прежней сетки, оно в общем случае может изменяться в зависимости от изменения характера решения от времени, однако в наших экспериментах число шагов пространственной сетки было постоянным.

Как отмечалось выше, шаг таким образом построенной сетки резко изменяется там, где вторая производная значительна, причем степень изменения шага слабо зависит от параметра β и совсем не поддается регулировке параметром α . Поэтому для сглаживания зависимости длины шага от координаты предлагается следующий метод коррекции. Вычисляется вторая разностная производная управляющей функции Z во внутренних узлах построенной адаптивной сетки:

$$G_i = \Lambda Z_i = \frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left(\frac{Z_{i+1} - Z_i}{h_{i+1}} - \frac{Z_i - Z_{i-1}}{h_i} \right),$$

где h_i — переменный шаг сетки, а затем уточненная управляющая функция определяется как решение разностной задачи

$$\Lambda \hat{Z} = \gamma G, \quad \hat{Z}_0 = 0, \quad \hat{Z}_N = 1$$

с параметром $\gamma \in [0, 1]$, ответственным за меру “спрямления” функции Z . Иначе говоря, строится новая функция, у которой вторая производная сжата по сравнению с исходной с коэффициентом γ . В частности, при нулевом значении γ результатом была бы линейная функция \hat{Z} и ей соответствовала бы равномерная сетка. При $\gamma = 1$ управляющая функция, а вместе с ней и сетка остаются неизменными ($\hat{Z} = Z$). При промежуточных значениях γ управляющая функция сильнее или слабее “спрямляется” в зависимости от величины γ , а соответствующая ей сетка получает большее сгущение в областях большей кривизны. Этот способ корректирует управляющую функцию быстро, “спрямляя” ее в зонах большой кривизны за один шаг. Как вариант вместо сжатия испытывалось также обрезание амплитуды второй производной с положительной и отрицательной стороны до наибольших положительных и наименьших отрицательных значений, умноженных на коэффициент γ .

2. Разностные схемы

Рассмотрим задачу Дирихле на конечном пространственном и временном отрезке для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f$$

с временной t и пространственной x переменными.

Зафиксируем произвольно узел неравномерной сетки по переменной x и обозначим через h_+ и h_- локальные значения шагов сетки справа и слева от этого узла, а через Δ_+ и Δ_- — соответствующие простейшие разделенные разности “вперед” и “назад”. Введем также обозначения для разности, суммы и произведения соседних шагов h_+ и h_- :

$$d = h_+ - h_-, \quad s = h_+ + h_-, \quad p = h_+ h_-.$$

Затем определим трехточечные разностные аналоги первой и второй производных на неравномерной сетке

$$\Delta = \frac{h_- \Delta_+ + h_+ \Delta_-}{s}, \quad \Lambda = \frac{\Delta_+ - \Delta_-}{s/2}$$

и оператор несимметричного осреднения по трем узлам

$$\Sigma = E + \frac{d}{3} \Delta + \frac{d^2 + p}{12} \Lambda,$$

где E — тождественный оператор.

Тогда разностная схема с весами

$$\Sigma \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\tau^2} = a \Lambda \left(\sigma \frac{U^{n+1} + U^{n-1}}{2} + (1 - \sigma) U^n \right) + G^n,$$

где

$$G^n = \Sigma f^n + \frac{\sigma \tau^2}{2} \frac{f^{n+1} - 2f^n + f^{n-1}}{\tau^2},$$

аппроксимирует волновое уравнение с погрешностью $O(\tau^2 + h^3)$. При специальном значении веса $\sigma = 1/6$ порядок погрешности по τ возрастает до четвертого и погрешность схемы составляет величину $O(\tau^4 + h^3)$. В частном случае равномерной сетки имеет место полное совпадение с ранее исследованными схемами точности $O(\tau^2 + h^4)$ и $O(\tau^4 + h^4)$ [8, 9]. Заметим, что построенные здесь компактные схемы на неравномерной сетке легко обобщаются на многомерный случай.

Если в дополнение к основному варианту осредняющего оператора Σ рассмотреть два “усеченных” варианта осреднения

$$\Sigma = E + \frac{d}{3} \Delta, \quad \Sigma = E,$$

которые получаются последовательным отбрасыванием слагаемых оператора осреднения Σ , то порядок аппроксимации по x понизится до второго или первого соответственно. Иначе говоря, погрешность аппроксимации схемы будет составлять величину $O(\tau^4 + |\sigma - 1/6| \tau^2 + h^q)$, где $q = 1, 2, 3$ — число удержанных слагаемых в полном выражении оператора Σ , начиная с первого.

В начальный момент времени краевая задача для волнового уравнения предполагает задание функции и ее производной по времени:

$$U(x, 0) = \Phi(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = \Psi(x),$$

а для старта вычислений по трехслойной схеме необходимо задать значения решения на двух первых временных слоях. Решение на нулевом слое задано, а на первом слое с достаточной точностью определяется из начальных данных путем разложения в ряд Тейлора, использования продолженной системы и аппроксимации пространственных производных разностными подобно тому, как это сделано в работе [8]. Например, для самой точной схемы $O(\tau^4 + h^3)$ имеем

$$U^1 = \left(E + \frac{a\tau^2}{2} \Lambda \right) \Phi + \tau \left(E + \frac{a\tau^2}{6} \Delta \right) \Psi + \frac{\tau^2}{6} (f^1 + 2f^0) + O(\tau^4 + h^3).$$

Предположим, решение вычислено вплоть до текущего n -го временного слоя. Алгоритм перехода на следующий $n + 1$ -й временной слой состоит из последовательности операций.

1. Интерполяция решения предыдущего слоя на сетку текущего слоя.
2. Вычисление решения на следующем слое прогонкой путем решения трехслойной системы разностных уравнений на сетке текущего слоя.
3. Построение новой сетки на верхнем слое, адаптированной к вычисленному решению.
4. Интерполяция вычисленного решения на новую сетку с достаточным порядком точности.

С целью интерполяции решения для схем точности $O(h^q)$ использовалась локальная лагранжева интерполяция по $q + 1$ или $q + 2$ узлам сетки или глобальная сплайн-интерполяция. Заметим, что лагранжева интерполяция в расчетах оказалась на порядок более затратной, чем сплайновая, но зато последняя при наличии зон больших градиентов очень чувствительна к качеству сетки.

3. Результаты расчетов

В данном разделе обсуждаются результаты численного решения ряда краевых задач для волнового уравнения с помощью схем различного порядка точности. Точные решения были заранее известны и имели вид солитонов, ударных переходов (сглаженных скачков) и их комбинаций. Сравнительные расчеты проводились по трем трехслойным схемам точности $O(\tau^4 + h^q)$, где $q = 1, 2, 3$.

Задача 1. В первом тесте исследовалось встречное движение солитонов. Точное решение

$$u(x, t) = \frac{1}{\cosh(20(x + 0.5 - t))} - \frac{0.5}{\cosh(10(x - 0.5 + t))}$$

первой задачи представляет собой комбинацию двух солитонов амплитуды 1 и 0.5, движущихся из точек ± 0.5 навстречу друг другу. На рис. 1 представлены результаты расчетов по различным схемам на момент времени $t = 1$, когда солитоны после взаимопроникновения меняются местами относительно начального положения.

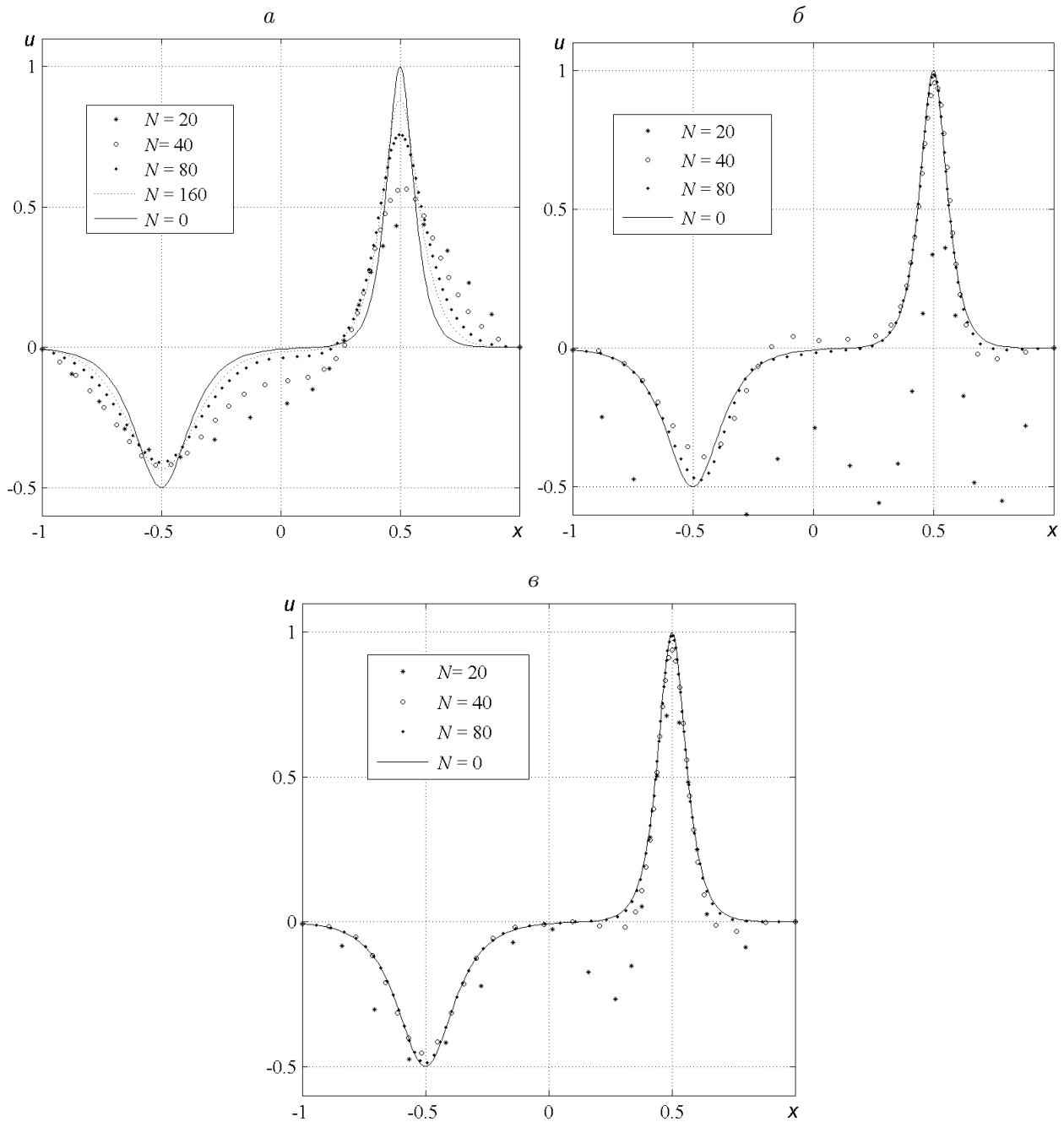


Рис. 1. Результаты расчета взаимодействия солитонов по схемам: $a - O(\tau^4 + h)$; $b - O(\tau^4 + h^2)$; $v - O(\tau^4 + h^3)$

Задача решалась в области $-1 < x < 1, 0 < t < 1$ на сгущающихся адаптивных сетках (с удвоением числа шагов по обоим переменным) с начальным числом шагов $N = 20$ по x и $M = 60$ по t . Обозначения $a-v$ на рис. 1 соответствуют порядкам точности схем $q = 1, 2, 3$ по пространственной переменной, т. е. на каждом рисунке размещены результаты, полученные по одной и той же схеме на различных сетках. Точному решению соответствует кривая, условно в легендах всех рисунков обозначенная как $N = 0$. Визуальное сравнение показывает, что с ростом числа шагов адаптивной сетки сходимость к точному решению тем быстрее, чем выше порядок точности схемы.

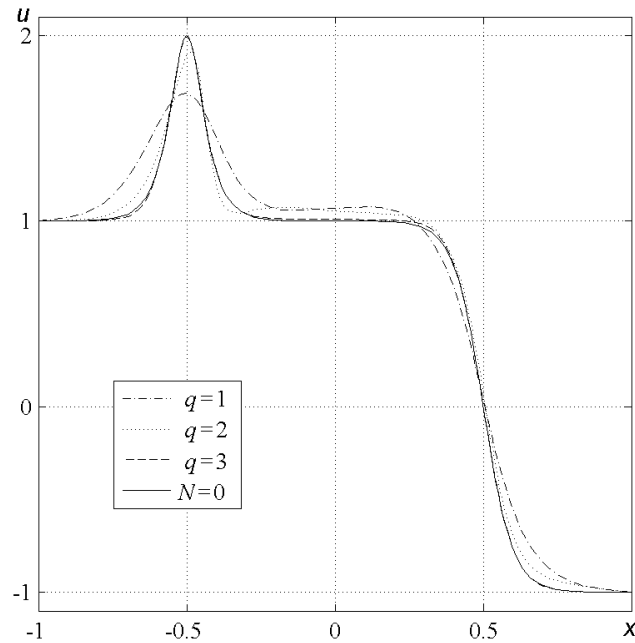


Рис. 2. Результаты расчета взаимодействия ударного перехода и солитона, полученные на сетках с $N = 40$ по схемам $O(\tau^4 + h^q)$, $q = 1, 2, 3$

Задача 2. Исследовалось прохождение ударного перехода через движущийся навстречу солитон. Точное решение имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{\cosh(10(x - 0.5 + t))} - \tanh(10(x + 0.5 - t)).$$

Как и в первой задаче, центры солитона и сглаженного скачка $x = \pm 0.5$ на конечный момент времени $t = 1$ меняются местами относительно их начального положения при $t = 0$. Задача решалась на последовательности сеток с удвоением числа шагов по обоим переменным, начиная с $N = 40$, $M = 80$. На рис. 2 представлены сводные результаты расчетов по всем трем схемам на сетках с равным числом шагов $N = 40$, а также точное решение задачи (кривая $N = 0$).

В табл. 1 приведены C-нормы ошибок приближенного решения для различных схем и различных сеток, полученные для первой и второй задач.

Задача 3. Сравниваются расчеты солитона, полученные по схемам $O(\tau^4 + h^q)$, $q = 1, 2, 3$, при его длительном перемещении. На рис. 3 показано различие в стабильности формы солитона после перемещения на расстояние, приблизительно в 32 раза

Т а б л и ц а 1. Погрешности решения задач 1 и 2, полученные в расчетах по схемам $O(\tau^4 + h^q)$

Задача 1				Задача 2			
N	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	N	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$
20	0.5503	0.6756	0.3028	20	0.7737	0.9813	0.3764
40	0.4214	0.2391	0.1280	40	0.4363	0.5444	0.0915
80	0.1397	0.0601	0.0223	80	0.3175	0.1253	0.0134
160	0.0681	0.0116	0.0020	160	0.2009	0.0354	0.0033
320	0.0731	0.0063	0.0003	320	0.1207	0.0100	0.0006

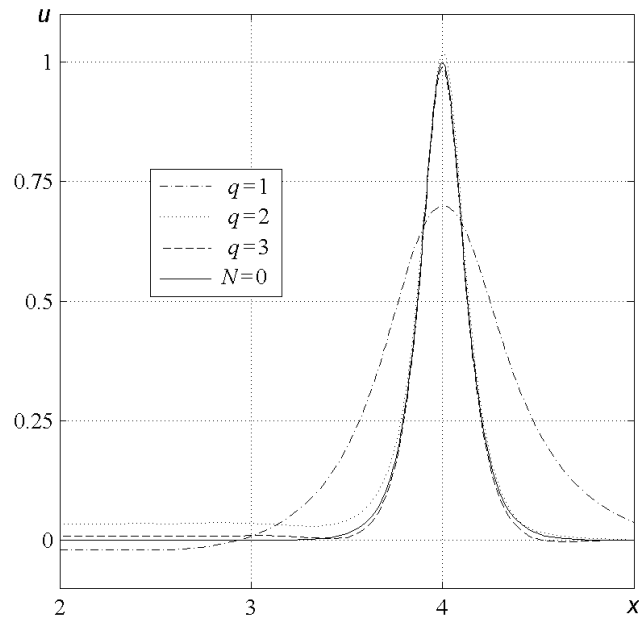


Рис. 3. Степень стабильности солитона по схемам $O(\tau^4 + h^q)$, $q = 1, 2, 3$

превышающее его ширину, измеренную в среднем сечении. Преимущество компактной схемы достаточно заметно даже визуально.

Тестирование метода коррекции сетки. В качестве примера влияния коррекции адаптивная сетка строилась по функции

$$u(x, t) = \frac{1}{\cosh(10(x + 0.5))} - \frac{1}{\cosh(10(x - 0.5))},$$

представляющей собой комбинацию двух солитонов с центрами сосредоточения в точках -0.5 и 0.5 . Параметры управляющей функции $\alpha = 0.025$, $\beta = 0.2$, параметр коррекции $\gamma = 0.8$, число шагов сеток $N = 30$. На рис. 4 приведены два варианта расчета адаптивной сетки — при задании тестовой функции на равномерной сетке (верхняя тройка сеток) и на неравномерной (нижняя тройка). Исходная сетка обозначена плюсами, сетка без коррекции — кружками, а скорректированная сетка — звездочками. Видно, что сетка без коррекции имеет резкий скачок шага у “подножия” солитонов, а шаг скорректированной сетки меняется плавно.

Сравнение со схемой на равномерной сетке. Схемы на неравномерной сетке алгоритмически сложнее, чем их аналоги на равномерной сетке, поэтому удельные

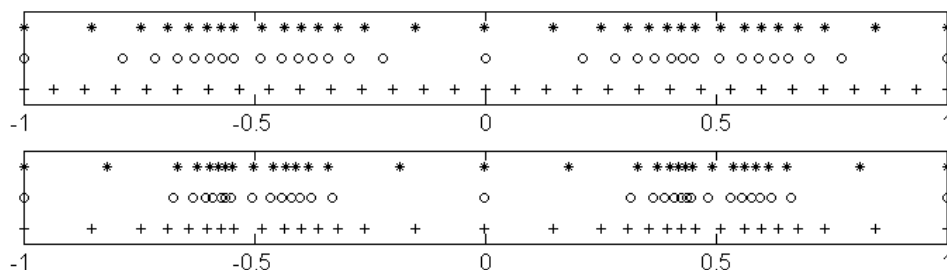


Рис. 4. Пример построения адаптивной сетки. Узлы задания функции (+), сетка без коррекции (o), скорректированная сетка (*)

Т а б л и ц а 2. Погрешность схемы $O(\tau^4 + h^4)$ на равномерной сетке

N	40	80	160	320	640	1280	1600
Погрешность	∞	129.1	94.0	69.4	13.3	2.4	1.23

расходы времени в расчете на узел сетки у них выше. Например, в данном случае на один узел схема третьего порядка на неравномерной сетке расходует приблизительно в 2.5–3 раза больше времени, чем схема четвертого порядка точности на равномерной сетке. Поэтому преимущество схем на неравномерных сетках может реализоваться лишь тогда, когда удастся значительно сократить длину массива координат узлов и число временных слоев. При взаимодействии возмущений, близко друг от друга расположенных, трехкратные потери времени затруднительно компенсировать экономией длин массивов, и в этих случаях схема на равномерной сетке оказывается экономичнее.

Обратного перевеса можно добиться в задачах с несколькими изолированными сигналами и большими зонами покоя между ними, если в зонах покоя применять прогрессивно меняющийся шаг. С целью несколько упрощенного моделирования такой ситуации были проведены расчеты перемещения солитона в обширном промежутке $(-100, 100)$. В расчетах от начального шага h_0 в вершине солитона шаг сетки увеличивался к периферии в геометрической прогрессии в обе стороны, знаменатели прогрессий определялись исходя из заданного числа шагов.

Точность по схеме третьего порядка на неравномерной сетке при начальном шаге $h_0 = 0.0001$ и числе шагов $N = 40$ составила 12%, а при числе шагов $N = 80$ она улучшилась до 1.25%. Точность решения в процентах, полученная на равномерных сетках, приведена в табл. 2. Из нее следует, что для достижения точности равного порядка на равномерной сетке число пространственных шагов требуется увеличить в двадцать раз, при этом необходимо учесть, что временной шаг уменьшается вдвое при каждом удвоении числа пространственных шагов. Это дает коэффициент улучшения порядка трехсот, что в сто раз перекрывает потери от усложнения алгоритма.

Заключение

На неравномерной сетке построена компактная схема третьего порядка точности по пространственной переменной и четвертого порядка по времени, являющаяся обобщением ранее известной схемы четвертого порядка точности по обоим переменным на равномерной сетке. При реализации схемы применен почти классический адаптивный метод перестройки сетки в сочетании с высокоточной интерполяцией решения. Разработан быстрый способ коррекции сетки, обеспечивающий плавность изменения шага в проблемных переходных подобластях между зонами покоя и зонами больших градиентов. Таким образом, в рамках одного алгоритма удалось совместить несколько инструментов повышения эффективности разностных методов (компактная схема высокой точности, неравномерная сетка, адаптивный метод, высокоточная интерполяция и коррекция сетки). Приведенные графические и табличные данные убедительно свидетельствуют о значительном преимуществе компактной схемы в сравнении со схемами первого и второго порядка.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00191) и Российского научного фонда (проект № 14-21-00110).

Список литературы / References

- [1] **Петухов И.В.** Преобразование уравнений пространственного пограничного слоя для численного расчета // Ученые записки ЦАГИ. 1982. Т. 8, № 5. С. 69–78.
Petukhov, I.V. Transformation of spatial boundary layer equations for numerical calculation // Uchenye Zapiski TsAGI. 1982. Vol. 8, No. 5. P. 69–78. (In Russ.)
- [2] **Thompson, J.F.** Grid generation techniques in computational fluid dynamics // AIAA Journal. 1984. Vol. 22, No. 11. P. 1505–1523.
- [3] **Rai, M.M., Anderson, D.A.** Application of adaptive grids to fluid-flow problems with asymptotic solutions // AIAA Journal. 1982. Vol. 20, No. 4. P. 496–502.
- [4] **Dwyer, H.A.** Grid adaptive for problem in fluid dynamics // AIAA Journal. 1984. Vol. 22, No. 12. P. 1705–1712.
- [5] **Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю.** Метод эквираспределения для построения адаптивных сеток // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 6. С. 63–81.
Khakimzyanov, G.S., Shokina, N.Yu. Equidistribution method for constructing adaptive grids // Comput. Technologies. 1998. Vol. 3, No. 6. P. 63–81. (In Russ.)
- [6] **Лисейкин В.Д.** Обзор методов построения структурированных адаптивных сеток // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1996. Т. 36, № 1. С. 3–41.
Liseikin, V.D. A survey of methods for constructing structured adaptive grids // Comput. Mathematics and Mathem. Physic. 1996. Vol. 36, No. 1. P. 1–32.
- [7] **Паасонен В.И.** Компактные схемы третьего порядка точности на неравномерных адаптивных сетках // Вычисл. технологии. 2015. Т. 20, № 2. С. 56–64.
Paasonen, V.I. Compact third-order accuracy schemes on non-uniform adaptive grids // Comput. Technologies. 2015. Vol. 20, No. 2. P. 56–64. (In Russ.)
- [8] **Валиуллин А.Н., Паасонен В.И.** Экономичные разностные схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения колебаний // Числ. методы мех. сплош. среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; ИТПМ. 1970. Т. 1, № 1. С. 34–47.
Valiullin, A.N., Paasonen, V.I. Economic high order difference schemes for the multivariate wave equation // Chisl. Methody Mekhan. Splosh. Sredy: Sb. Nauch. Tr. / AN SSSR. Sib. Otd-nie. VZ; ITPM. 1970. Vol. 1, No. 1. P. 34–47. (In Russ.)
- [9] **Paasonen, V.I.** Compact schemes for system of second-order equations without mixed derivatives // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1998. Vol. 13, No. 4. P. 335–344.

*Поступила в редакцию 7 июня 2016 г.,
с доработки — 3 августа 2016 г.*

The compact difference scheme on adaptive grid for wave equation

PAASONEN, VIKTOR I.

Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia
Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090, Russia

*Corresponding author: Paasonen, Viktor I., e-mail: paas@ict.nsc.ru

Object of research in this paper is the adaptive technology of calculation for difference schemes of the increased accuracy. We investigate the compact difference scheme

which approximates the wave equation with the third order on a nonuniform space grid and with the fourth order on constant time step.

The grid is reconstructed on each step on time by almost classical method, however in addition the effective way of correction of a grid is proposed. This operation is focused on smoothing of too sharp change of a step in areas of considerable curvature. Such areas are located, for example, on tops and at the bottom of a soliton or near the front of a shockwave.

The results of numerical experiments are presented on exact solutions in the form of smoothing shockwaves and solitons, either their combinations. The comparison with other methods has been done.

Keywords: non-uniform grid, adaptive grid, soliton, shockwave, compact scheme, scheme of the increased accuracy.

Acknowledgements. This work was supported by RFBR (grant No. 14-01-00191) and by the Russian Science Foundation (project No. 14-21-00110).

Received 7 June 2016

Received in revised form 3 August 2016