Гамильтонова структура для двумерных линейных уравнений теории упругости

В. Н. Гребенев, С. Б. Медведев*

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

*Контактный e-mail: medvedev@ict.nsc.ru

Рассмотрен вопрос о гамильтоновой структуре модели линейной двумерной упругости. Показано, что она обладает неканонической вырожденной скобкой Пуассона. На основе свойства вырожденности полученной скобки найдены функционалы Казимира, которые сохраняются для любого вида гамильтониана. Найдены условия положительной определенности гамильтониана, зависящие от параметров задачи. Доказано, что закон сохранения энергии является единственным законом нулевого порядка для двумерных линейных уравнений теории упругости.

Ключевые слова: гамильтонова структура, законы сохранения, двумерная линейная теория упругости, функционалы Казимира, вырожденная скобка Пуассона.

Введение

Одной из простейших моделей механики сплошной среды является модель линейной двумерной упругости, которая применяется для описания малых деформаций [1, 2]. Эта система также вошла в университетский учебник [3] в качестве примера симметризации гиперболической системы.

В настоящей работе рассмотрен вопрос о гамильтоновой структуре модели линейной двумерной упругости, хотя основное внимание гамильтоновой теории полевых систем сосредоточено на нелинейных моделях и линеаризованные модели часто наследуют гамильтонову структуру нелинейных уравнений. Тем не менее исследование гамильтоновой структуры линейных уравнений имеет смысл, поскольку, во-первых, линейные (линеаризованные) уравнения, как правило, получаются без учета "гамильтоновости" исходных нелинейных моделей и, во-вторых, неканонический вид скобки Пуассона нелинейной модели может приводить к неоднозначности линеаризованных уравнений [4].

Показано, что двумерная система линейной упругости обладает неканонической вырожденной скобкой Пуассона. На основе свойства вырожденности полученной скобки найдены функционалы Казимира, которые сохраняются для любого вида гамильтониана. Найдены условия положительной определенности гамильтониана, зависящие от параметров задачи. Доказано, что закон сохранения энергии является единственным законом нулевого порядка для двумерных линейных уравнений теории упругости.

Возьмем модель линейной двумерной упругой среды в следующем виде [3]:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} = \left(K + \frac{4}{3}\mu\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} = \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(K + \frac{4}{3}\mu\right)\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{5}$$

$$\sigma_{21} = \sigma_{12}, \tag{6}$$

где ρ_0 — плотность среды; u и v — компоненты вектора скорости перемещения в направлениях x и y соответственно; σ_{ik} — компоненты тензора напряжений; постоянные положительные коэффициенты K и μ называются соответственно модулем всестороннего сжатия и модулем сдвига.

1. Гамильтонова структура

Для поиска и исследования гамильтоновой структуры удобно ввести векторное обозначение для зависимых переменных

$$u_1 = u, \quad u_2 = v, \quad u_3 = \sigma_{11}, \quad u_4 = \sigma_{22}, \quad u_5 = \sigma_{12}. \tag{7}$$

Тогда систему (1)–(6) можно записать в операторном виде $\mathbf{u}_t = \hat{L}\mathbf{u}$ или более подробно

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0}\partial_x & 0 & \frac{1}{\rho_0}\partial_y \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0}\partial_y & \frac{1}{\rho_0}\partial_x \\ \left(K + \frac{4}{3}\mu\right)\partial_x & \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\partial_y & 0 & 0 & 0 \\ \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\partial_x & \left(K + \frac{4}{3}\mu\right)\partial_y & 0 & 0 & 0 \\ \mu\partial_y & \mu\partial_x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где индекс t означает производную по времени, а ∂_x и ∂_y — пространственные переменные.

Наша система линейна и должна иметь квадратичный закон сохранения, который является энергией системы и одновременно гамильтонианом. Наша цель — записать систему в гамильтоновом виде [5, 6]

$$\mathbf{u}_t = \hat{J}_{\mathbf{u}} \frac{\delta H[\mathbf{u}]}{\delta \mathbf{u}} = \hat{J}_{\mathbf{u}} A_{\mathbf{u}} \mathbf{u}, \tag{9}$$

где $\hat{J}_{\mathbf{u}}$ — кососимметричный оператор, задающий соответствующую скобку Пуассона [5, 6], индекс $\mathbf{u}$ означает, что оператор действует для переменной $\mathbf{u}$, а $\dfrac{\delta H[\mathbf{u}]}{\delta \mathbf{u}}$ означает вариационную производную от гамильтониана, квадратичного по $\mathbf{u}$:

$$H[\mathbf{u}] = \frac{1}{2}\int \mathbf{u}^T A_{\mathbf{u}} \mathbf{u}\, dxdy. \tag{10}$$

Заметим, что блок оператора $\hat{L}$ может быть представлен в виде симметричной матрицы M и оператора дифференцирования

$$\begin{pmatrix} \left(K+\frac{4}{3}\mu\right)\partial_x & \left(K-\frac{2}{3}\mu\right)\partial_y \\ \left(K-\frac{2}{3}\mu\right)\partial_x & \left(K+\frac{4}{3}\mu\right)\partial_y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left(K+\frac{4}{3}\mu\right) & \left(K-\frac{2}{3}\mu\right) \\ \left(K-\frac{2}{3}\mu\right) & \left(K+\frac{4}{3}\mu\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Это позволяет записать оператор $\hat{L}$ и уравнение в факторизованной форме

$$\hat{L} = A^{-1}\hat{I}, \quad \mathbf{u}_t = A^{-1}\hat{I}A^{-1}A\mathbf{u},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{3K+4\mu}{4\mu(3K+\mu)} & \dfrac{-3K+2\mu}{4\mu(3K+\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-3K+2\mu}{4\mu(3K+\mu)} & \dfrac{3K+4\mu}{4\mu(3K+\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\mu} \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\rho_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(K+\frac{4}{3}\mu\right) & \left(K-\frac{2}{3}\mu\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(K-\frac{2}{3}\mu\right) & \left(K+\frac{4}{3}\mu\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

и оператор $\hat{I}$ является кососимметричным и не зависит от параметров задачи

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_x & 0 & \partial_y \\ 0 & 0 & 0 & \partial_y & \partial_x \\ \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 & 0 & 0 \\ \partial_y & \partial_x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для существования обратной матрицы A^{-1} необходимо и достаточно, чтобы определитель этой матрицы был ненулевой

$$\rho_0 \neq 0, \quad \mu \neq 0, \quad \det(S) = 4\mu\left(K+\frac{1}{3}\mu\right) \neq 0.$$

Для того чтобы получить гамильтонову формулировку уравнений (9), достаточно заметить, что оператор $\hat{J} = A^{-1}\hat{I}A^{-1}$ является кососимметричным, поскольку матрица A^{-1} симметричная. Явный вид оператора $\hat{J}$ следующий:

$$\hat{J}_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0}\partial_x\left(K+\frac{4}{3}\mu\right) & \frac{1}{\rho_0}\partial_x\left(K-\frac{2}{3}\mu\right) & \frac{\mu}{\rho_0}\partial_y \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0}\partial_y\left(K-\frac{2}{3}\mu\right) & \frac{1}{\rho_0}\partial_y\left(K+\frac{4}{3}\mu\right) & \frac{\mu}{\rho_0}\partial_x \\ \left(K+\frac{4}{3}\mu\right)\partial_x\frac{1}{\rho_0} & \left(K-\frac{2}{3}\mu\right)\partial_y\frac{1}{\rho_0} & 0 & 0 & 0 \\ \left(K-\frac{2}{3}\mu\right)\partial_x\frac{1}{\rho_0} & \left(K+\frac{4}{3}\mu\right)\partial_y\frac{1}{\rho_0} & 0 & 0 & 0 \\ \partial_y\frac{\mu}{\rho_0} & \partial_x\frac{\mu}{\rho_0} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дальнейшее преобразование гамильтоновой структуры основано на использовании линейной замены переменных с невырожденной матрицей T

$$\mathbf{v} = T\mathbf{u}.$$

В результате такой замены получаем новую запись системы (9)

$$\mathbf{v}_t = \hat{J}_{\mathbf{v}}\frac{\delta H[\mathbf{v}]}{\delta \mathbf{v}} = \hat{J}_{\mathbf{v}}A_{\mathbf{v}}\mathbf{v}, \quad H[\mathbf{v}] = \frac{1}{2}\int \mathbf{v}^T A_{\mathbf{v}}\mathbf{v}\, dxdy,$$

где оператор скобки Пуассона и матрица гамильтониана преобразуются по правилу

$$\hat{J}_{\mathbf{v}} = T\hat{J}_{\mathbf{u}}T^T, \quad A_{\mathbf{v}} = (T^{-1})^T A_{\mathbf{u}}T^{-1}.$$

Наиболее простой вид оператора $\hat{J}_{\mathbf{v}}$, определяющего скобку Пуассона, можно получить с помощью замены при $T = A$:

$$\mathbf{v} = A\mathbf{u}.$$

Тогда система принимает вид

$$\mathbf{v}_t = \hat{I}\frac{\delta H[\mathbf{v}]}{\delta \mathbf{v}} = \hat{I}A^{-1}\mathbf{v}, \tag{12}$$

где гамильтониан равен

$$H[\mathbf{v}] = \frac{1}{2}\int \mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{v}dxdy. \tag{13}$$

2. Положительная определенность гамильтониана

Существование гамильтониана в системе еще не гарантирует ее устойчивость. Гарантировать устойчивость решений относительно нормы, которую задает интеграл энергии, можно, если этот квадратичный интеграл положительно определен. Для положительной определенности гамильтониана $H[\mathbf{u}]$ в (9) необходимо и достаточно, чтобы была положительно определена матрица A (или A^{-1} в (13)). Это имеет место при условиях

$$\rho_0 > 0, \quad \mu > 0, \quad S_{11} = K + \frac{4}{3}\mu > 0, \quad \det(S) = 4\mu\left(K + \frac{1}{3}\mu\right) > 0$$

или более кратко

$$\rho_0 > 0, \quad \mu > 0, \quad K + \frac{1}{3}\mu > 0.$$

2.1. Симметричная форма

Если систему (8) умножить слева на A, то она принимает вид линейной симметричной гиперболической системы по Фридрихсу [3, 7]:

$$A\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + B\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + C\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = 0, \tag{14}$$

где симметричная матрица A положительно определена и матрицы B и C являются симметричными

$$B = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если (9) умножить на A и сравнить с (14), то видно, что кососимметричный оператор $\hat{I}$ выражается через матрицы B и C:

$$\hat{I} = -B\partial_x - C\partial_y. \tag{15}$$

На самом деле имеет место более общее утверждение.

Утверждение. *Любая линейная симметричная гиперболическая система по Фридрихсу*

$$A\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + B\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + C\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + D\mathbf{u} = 0, \tag{16}$$

где симметричная матрица A положительно определена, матрицы B и C являются симметричными и матрица D кососимметричная, имеет гамильтонову структуру (9) с оператором

$$\hat{J} = -A^{-1}BA^{-1}\partial_x - A^{-1}CA^{-1}\partial_y - A^{-1}DA^{-1} \tag{17}$$

и гамильтонианом

$$H[\mathbf{u}] = \frac{1}{2}\int \mathbf{u}^T A\mathbf{u}\, dxdy.$$

.

Доказательство повторяет предыдущие рассуждения. Умножая уравнение (16) на A, перепишем систему в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\left(A^{-1}BA^{-1}\frac{\partial}{\partial x} + A^{-1}CA^{-1}\frac{\partial}{\partial y} + A^{-1}DA^{-1}\right)A\mathbf{u}. \tag{18}$$

Поскольку $\dfrac{\delta H[\mathbf{v}]}{\delta \mathbf{v}} = A\mathbf{u}$ и оператор (17) не зависит от $\mathbf{u}$, система (18) является гамильтоновой.

Это утверждение — простой пример, который подтверждает слова С.П. Новикова, что “динамические системы, описывающие реальные физические процессы, являются, как правило, в том или ином смысле гамильтоновыми, если можно пренебречь диссипацией энергии” [6], потому что линейные гиперболические системы описывают достаточно широкий класс физических явлений [3, 7].

2.2. Кососимметричная форма

Поскольку гамильтонова структура уравнений задается скобкой Пуассона и гамильтонианом, существуют два пути упрощения этих объектов. В предыдущем параграфе оператор скобки Пуассона был приведен к простейшему виду. Если матрица A положительно определена, то определен квадратный корень из нее и можно привести квадратичный гамильтониан к главным осям, что является простейшим видом для положительной квадратичной формы.

Если перейти к новым переменным

$$\mathbf{w} = A^{1/2}\mathbf{u},$$

то система (9) принимает вид

$$\mathbf{w}_t = \hat{J}_{\mathbf{w}} \frac{\delta H[\mathbf{w}]}{\delta \mathbf{w}} = \hat{J}_{\mathbf{w}} \mathbf{w},$$

где гамильтониан приведен к главным осям

$$H[\mathbf{w}] = \frac{1}{2} \int \mathbf{w}^T \mathbf{w} dx dy$$

и оператор скобки Пуассона равен

$$\hat{J}_{\mathbf{w}} = A^{-1/2} \hat{I} A^{-1/2}.$$

В силу блочно-диагональной структуры матрицы A^{-1} достаточно вычислить квадратный корень из матрицы M, что легко делается и дает

$$M^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3K+\mu}{6}} + \sqrt{\frac{\mu}{2}} & \sqrt{\frac{3K+\mu}{6}} - \sqrt{\frac{\mu}{2}} \\ \sqrt{\frac{3K+\mu}{6}} - \sqrt{\frac{\mu}{2}} & \sqrt{\frac{3K+\mu}{6}} + \sqrt{\frac{\mu}{2}} \end{pmatrix}.$$

3. Функционалы Казимира

Кроме гамильтониана $H[\mathbf{v}]$ система (12) может сохранять и другие функционалы вследствие вырожденности оператора $\hat{I}$. Найдем такие функционалы. Для этого надо решить следующее операторное уравнение:

$$0 = \hat{I}\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_x & 0 & \partial_y \\ 0 & 0 & 0 & \partial_y & \partial_x \\ \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 & 0 & 0 \\ \partial_y & \partial_x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \\ \hat{m}_3 \\ \hat{m}_4 \\ \hat{m}_5 \end{pmatrix}.$$

Очевидное решение этой системы в классе дифференциальных операторов имеет вид

$$\hat{\mathbf{M}}^T = (0, 0, \partial_y^2, \partial_x^2, -\partial_x \partial_y).$$

Подействуем сопряженным оператором $\hat{\mathbf{M}}^*$ на систему (12) слева и получим тождество

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\partial_y^2 v_3 + \partial_x^2 v_4 - \partial_x\partial_y v_5\right) = \partial_y^2\partial_x \frac{\delta H}{\delta v_1} + \partial_x^2\partial_y \frac{\delta H}{\delta v_2} - \partial_x\partial_y\left(\partial_y \frac{\delta H}{\delta v_1} + \partial_x \frac{\delta H}{\delta v_2}\right) \equiv 0,$$

которое справедливо для любой зависимости гамильтониана $H[\mathbf{v}]$ от переменной $\mathbf{v}$. Из этого тождества следует, что сохраняются функционалы Казимира

$$C_\Psi = \int \Psi\left(x, y, \partial_y^2 v_3 + \partial_x^2 v_4 - \partial_x\partial_y v_5\right) dxdy$$

для любой дифференцируемой по z функции $\Psi(x, y, z)$.

Оператор $\hat{I}$ может зануляться еще и на функциях $\mathbf{N}(x, y)$. Теперь ищем решение уравнения

$$0 = \hat{I}\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_x & 0 & \partial_y \\ 0 & 0 & 0 & \partial_y & \partial_x \\ \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 & 0 & 0 \\ \partial_y & \partial_x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \end{pmatrix}.$$

Эта система кроме очевидного постоянного решения имеет и переменные решения

$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{yy} \\ f_{xx} \\ -f_{xy} \end{pmatrix},$$

где $f = f(x, y)$ — произвольная функция.

Умножим систему на транспонированный вектор $\mathbf{N}_1^T$, что дает уравнение

$$\partial_t(-yv_1 + xv_2) = -\partial_x\left(y\frac{\delta H}{\delta v_3}\right) + \partial_y\left(x\frac{\delta H}{\delta v_4}\right) + x\partial_x \frac{\delta H}{\delta v_5} - y\partial_y \frac{\delta H}{\delta v_5}.$$

После интегрирования по x и y правая часть зануляется при подходящих граничных условиях и получаем интеграл

$$C_0 = \int (-yv_1 + xv_2)\, dxdy.$$

Применяя эту процедуру для $\mathbf{N}_f$, легко увидеть, что полученный интеграл сохранения соответствует уже рассмотренному случаю при $\Psi(x, y, z) = f(x, y)z$, поскольку

$$\int (f_{yy}v_3 + f_{xx}v_4 - f_{xy}v_5)\, dxdy = \int f(x, y)\left(\partial_y^2 v_3 + \partial_x^2 v_4 - \partial_x\partial_y v_5\right) dxdy.$$

4. Законы сохранения нулевого порядка

Законы сохранения будем искать в дифференциальном виде

$$S \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} = 0, \tag{19}$$

где F — плотность закона сохранения и G_i — потоки закона сохранения.

Поскольку мы ищем законы сохранения нулевого порядка для линейной системы, то будем искать плотность F и потоки G_i в следующем виде:

$$F = F(t, x, y, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5), \quad G_i = G_i(t, x, y, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5).$$

Подставим эти выражения в (19) и продифференцируем, затем заменим производные по t с помощью исходных уравнений и соберем коэффициенты при производных и оставшиеся члены без производных. Коэффициенты при производных по x дают следующие уравнения:

$$S_{11} = \left(K + \frac{4}{3}\mu\right)\frac{\partial F}{\partial u_3} + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial F}{\partial u_4} + \frac{\partial G_1}{\partial u_1} = 0,$$

$$S_{21} = \mu\frac{\partial F}{\partial u_5} + \frac{\partial G_1}{\partial u_2} = 0,$$

$$S_{31} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{\partial G_1}{\partial u_3} = 0,$$

$$S_{41} = \frac{\partial G_1}{\partial u_4} = 0,$$

$$S_{51} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial F}{\partial u_2} + \frac{\partial G_1}{\partial u_5} = 0,$$

где S_{n1} означает все коэффициенты при производной по x от u_n. Вторая группа уравнений получается для коэффициентов при производных по y:

$$S_{12} = \mu\frac{\partial F}{\partial u_5} + \frac{\partial G_2}{\partial u_1} = 0,$$

$$S_{22} = \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial F}{\partial u_3} + \left(K + \frac{4}{3}\mu\right)\frac{\partial F}{\partial u_4} + \frac{\partial G_2}{\partial u_2} = 0,$$

$$S_{32} = \frac{\partial G_2}{\partial u_3} = 0,$$

$$S_{42} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial F}{\partial u_2} + \frac{\partial G_2}{\partial u_4} = 0,$$

$$S_{52} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{\partial G_2}{\partial u_5} = 0,$$

где S_{n2} означает все коэффициенты при производной по y от u_n. Связь между этими системами устанавливает уравнение для коэффициента при членах, не содержащих производные:

$$S_0 = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} = 0.$$

Исключая перекрестным дифференцированием переменные G_1 и G_2 из первых двух подсистем, получим двадцать уравнений на функцию F. Исключение G_1 дает десять уравнений

$$\left(K + \frac{4}{3}\mu\right)F_{23} + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)F_{24} - \mu F_{15} = 0,$$

$$\left(K+\frac{4}{3}\mu\right)F_{33}+\left(K-\frac{2}{3}\mu\right)F_{34}-\frac{1}{\rho_0}F_{11}=0,$$
$$\left(K+\frac{4}{3}\mu\right)F_{34}+\left(K-\frac{2}{3}\mu\right)F_{44}=0,$$
$$\left(K+\frac{4}{3}\mu\right)F_{35}+\left(K-\frac{2}{3}\mu\right)F_{45}-\frac{1}{\rho_0}F_{12}=0,$$
$$\mu F_{35}-\frac{1}{\rho_0}F_{12}=0,\quad \mu F_{45}=0,\quad \mu F_{55}-\frac{1}{\rho_0}F_{22}=0,$$
$$\frac{1}{\rho_0}F_{14}=0,\quad \frac{1}{\rho_0}(F_{15}-F_{23})=0,\quad \frac{1}{\rho_0}F_{24}=0.$$

Исключение G_2 дает также десять уравнений

$$\left(K+\frac{4\mu}{3}\right)F_{14}+\left(K-\frac{2\mu}{3}\right)F_{13}-\mu F_{25}=0,$$
$$\left(K+\frac{4\mu}{3}\right)F_{44}+\left(K-\frac{2\mu}{3}\right)F_{34}-\frac{1}{\rho_0}F_{22}=0,$$
$$\left(K+\frac{4\mu}{3}\right)F_{34}+\left(K-\frac{2\mu}{3}\right)F_{33}=0,$$
$$\left(K+\frac{4\mu}{3}\right)F_{45}+\left(K-\frac{2\mu}{3}\right)F_{35}-\frac{1}{\rho_0}F_{12}=0,$$
$$\mu F_{45}-\frac{1}{\rho_0}F_{12}=0,\quad \mu F_{35}=0,\quad \mu F_{55}-\frac{1}{\rho_0}F_{11}=0,$$
$$\frac{1}{\rho_0}F_{13}=0,\quad \frac{1}{\rho_0}(F_{25}-F_{14})=0,\quad \frac{1}{\rho_0}F_{23}=0.$$

Исключая G_1 и G_2 из S_0, получим еще пять уравнений

$$F_{t1}-\left(K+\frac{4\mu}{3}\right)F_{x3}-\left(K-\frac{2\mu}{3}\right)F_{x4}-\mu F_{y5}=0,$$
$$F_{t2}-\left(K+\frac{4\mu}{3}\right)F_{y4}-\left(K-\frac{2\mu}{3}\right)F_{y3}-\mu F_{x5}=0,$$
$$F_{t3}-\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{\rho_0}F_{x1}=0,\quad F_{t4}-F_{y2}=0,\quad F_{t5}-\frac{1}{\rho_0}(F_{x2}+F_{y1})=0. \tag{20}$$

В приведенных выше формулах F_{ij} означает производную от F по u_i и u_j. Для производных по x и y от F используются индексы x и y соответственно.

Первые две подсистемы могут быть приведены к более простому виду. Девять уравнений имеют одночленный вид

$$F_{12}=F_{13}=F_{14}=F_{15}=F_{23}=F_{24}=F_{25}=F_{35}=F_{45}=0. \tag{21}$$

Остальные уравнения имеют двухчленный вид

$$\frac{1}{\rho_0}F_{11}=\mu F_{55},\quad \frac{1}{\rho_0}F_{22}=\mu F_{55},\quad F_{33}=F_{44}, \tag{22}$$
$$F_{33}=\frac{1}{\rho_0}\frac{3K+4\mu}{4\mu(3K+\mu)}F_{11},\quad F_{34}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{3K-2\mu}{4\mu(3K+\mu)}F_{11}. \tag{23}$$

Из уравнений (21) заключаем, что решение имеет вид

$$F = f_1(t,x,y,u_1) + f_2(t,x,y,u_2) + f_5(t,x,y,u_5) + f_{34}(t,x,y,u_3,u_4),$$

где f_1, f_2, f_5, f_{34} — произвольные функции. Из уравнений (22), (23) находим общий вид решения этой подсистемы

$$F = a(t,x,y)\left(\rho_0\frac{u_1^2+u_2^2}{2} + \frac{u_5^2}{2\mu} + \frac{3K+4\mu}{4\mu(3K+\mu)}\frac{u_3^2+u_4^2}{2} - \frac{3K-2\mu}{4\mu(3K+\mu)}u_3u_4)\right), \tag{24}$$

где a — произвольный коэффициент. Поскольку система (21)–(23) содержит только вторые производные, к найденному решению можно добавить линейные члены

$$b_1(t,x,y)u_1 + b_2(t,x,y)u_2 + b_3(t,x,y)u_3 + b_4(t,x,y)u_4 + b_5(t,x,y)u_5. \tag{25}$$

Коэффициенты линейных членов найдем отдельно.

Подставив решение (24) в последнее уравнение из (20), найдем, что функция $a(t,x,y)$ является постоянной. Таким образом, имеется всего один квадратичный закон сохранения, который совпадает с гамильтонианом (10) нашей системы.

Для коэффициентов линейной плотности (25) имеем следующую систему:

$$\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\\ b_5 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \left(K+\frac{4}{3}\mu\right)\partial_x & \left(K-\frac{2}{3}\mu\right)\partial_x & \mu\partial_y \\ 0 & 0 & \left(K-\frac{2}{3}\mu\right)\partial_y & \left(K+\frac{4}{3}\mu\right)\partial_y & \mu\partial_x \\ \frac{1}{\rho_0}\partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_0}\partial_y & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho_0}\partial_y & \frac{1}{\rho_0}\partial_x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\\ b_5 \end{pmatrix},$$

которая является сопряженной к исходной системе (8). Этот факт легко доказать в общем виде. Поиск коэффициентов b_i эквивалентен поиску решения исходной системы. В случае коэффициентов b_i, не зависящих от t, получаются точно такие же решения, как при поиске функционалов Казимира.

Заключение

Полученная гамильтонова форма уравнений может быть использована для построения численных методов с учетом ее гамильтоновой структуры [8]. В частности, гамильтонова структура позволяет строить разностные схемы в области произвольной геометрии с сохранением интеграла энергии [9].

Построенная скобка Пуассона оказалась вырожденной. Поэтому имеются функционалы Казимира, которые зануляют скобку Пуассона с любым функционалом и являются интегралами уравнений для любого вида гамильтониана. Найдены все функционалы Казимира. Оказалось, что имеются один функционал Казимира, не содержащий производные, и семейство функционалов Казимира, содержащее вторые пространственные производные.

Найдены все возможные законы сохранения, не содержащие производных. Прямым вычислением доказано, что имеется всего один квадратичный закон сохранения, который есть закон сохранения энергии.

Благодарности. Исследование выполнено в рамках Президентской программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-5006.2014.9).

Список литературы / References

[1] **Годунов С.К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 304 с.
Godunov, S.K. Elements of continuum mechanics. Moscow: Nauka, 1978. 304 p.(in Russ.)

[2] **Годунов С.К., Роменский Е.И.** Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Науч. книга, 1998. 280 с.
Godunov, S.K., Romenskii, E.I. Elements of continuum mechanics and conservation laws. Berlin: Springer, 2003. 258 p.

[3] **Годунов С.К.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 392 с.
Godunov, S.K. Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1979. 392 p. (in Russ.)

[4] **Shepherd, T.G.** A unified theory of available potential energy // Atmosphere Ocean. 1993. Vol. XXXL, No. 1. P. 1–26.

[5] **Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.** Современная геометрия. 2-е изд. М.: Наука, 1986. 760 с.
Dubrovin, B.A., Fomenko, T.A., Novikov, S.P. Modern geometry-methods and applications. Part 1. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields. Part 1. Berlin: Springer, 1984. 464 p.

[6] **Новиков С.П.** Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи матем. наук. 1982. Т. 37, № 5. С. 3–49.
Novikov, S.P. The Hamiltonian formalism and a many-valued analogue of Morse theory // Russian Mathematical Surveys. 1982. Vol. 37, No. 5. P. 1–56.

[7] **Курант Р., Гильберт Д.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
Courant, R., Hilbert, D. Methods of mathematical physics. Vol. II. N.Y.: John Wiley & Sons, 1962.

[8] **Sanz-Serna, J.M., Calvo, M.P.** Numerical hamiltonian problems. London: Chapman and Hall, 1994. 207 p.

[9] **Коновалов А.Н.** Численные методы в динамических задачах теории упругости// Сиб. матем. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 551–568.
Konovalov, A.N. Numerical methods for the dynamical problems of elasticity // Siberian Mathematical Journal. 1997. Vol. 38, No. 3. P. 471–487.

Поступила в редакцию 2 марта 2015 г.,
с доработки — 3 июля 2015 г.

Hamiltonian structure for two-dimensional linear equations of elasticity theory

Grebenev, Vladimir N., Medvedev, Sergey B.*

Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

*Corresponding author: Medvedev, Sergey B., e-mail: medvedev@ict.nsc.ru

In the present paper, we establish that the two-dimensional linear elasticity model admits a Hamiltonian structure. Moreover, the existence of extra conservation laws is also discussed. Notice that the main attention of the Hamiltonian theory of field systems is paid for nonlinear models and linearized models, which often inherit Hamiltonian structure of nonlinear equations. Nevertheless, the study of a Hamiltonian structure has sense when linearized equations are obtained, as a rule, without taking attention of the Hamiltonian structure for the original equations. So-called non-canonical form of the Poisson bracket of the nonlinear model under consideration can lead us to non-unique representations of linearized equations.

We show that the two-dimension linear elasticity possesses a degenerated Poisson bracket and the integral of energy is a Hamiltonian. Based on the degenerate property of the obtained bracket, we found the complete family of the Casimir functionals, which depend on combinations of the second-order derivatives and these functionals are conserved for any form of Hamiltonian. The conditions of positive definiteness of the Hamiltonian which depend on parameters of the problem are obtained. We present connection between the obtained Hamiltonian structure and the form of equations rewritten in the Godunov symmetric representation. Using the Hamiltonian structure of the positive definite Hamiltonian, a skew-symmetric form for the quadratic Hamiltonian with the unit diagonal matrix is exposed. We prove the result that arbitrary linear symmetrical hyperbolic in the sense of Fridrichs is a non-canonical Hamiltonian system. The expression for the Poisson bracket and Hamiltonian using the coefficients of the corresponding symmetrical hyperbolic system is derived.

Using the direct calculations, we find all zero-order conservation laws i. e. the conservation laws those densities are independent of the spatial derivatives. We prove that there no exist other zero-order conservation laws besides of the functional of energy.

Keywords: Hamiltonian structure, conservation laws, two-dimensional linear elasticity theory, Casimir functionals, singular Poisson bracket.

Acknowledgements. This work was supported by the President Programme of supporting leading schools of Russian Federation (grant No. NSH-5006.2014.9).

Received 2 March 2015
Received in revised form 3 July 2015