

О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчет

Е. В. АМЕЛИНА¹, С. К. ГОЛУШКО^{1,2,*}, В. С. ЕРАСОВ³, С. В. ИДИМЕШЕВ¹,
Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ⁴, Б. В. СЕМИСАЛОВ¹, А. В. ЮРЧЕНКО², Н. О. ЯКОВЛЕВ³

¹Конструкторско-технологический институт вычислительной техники СО РАН,
Новосибирск, Россия

²Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

³Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов
ГНЦ РФ, Москва, Россия

⁴Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Россия

*Контактный e-mail: golushkosk@kti.sbras.ru

Разработан и реализован комплексный подход к построению математических моделей нелинейно-упругого деформирования полимерных матриц и углепластиков при изгибе, учитывающий эффект разносопротивляемости при растяжении и сжатии. Предложен математический аппарат для анализа и обработки больших массивов данных измерений и устранения наиболее значимых артефактов испытаний. Получены математические соотношения, описывающие нелинейно-упругое поведение разносопротивляющихся растяжению и сжатию изотропной и армированной балок при трехточечном изгибе. Предложен алгоритм численного решения соответствующих краевых задач. Проведено сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными для полимерной матрицы ВСЭ-1212 и конструкционного углепластика ВКУ-28.

Ключевые слова: композиционный материал, углепластик, полимерная матрица, разносопротивляемость, нелинейность, эксперимент, математическая модель.

Введение

Углепластики являются наиболее перспективными современными композиционными материалами. Высокие требования, предъявляемые к конструкциям ответственного назначения авиационной и ракетно-космической отраслей промышленности, автомобилестроения и строительной индустрии, заставляют использовать при их производстве новые композиционные материалы и искать пути по улучшению их характеристик [1, 2]. Использование методов компьютерного моделирования позволяет существенно сократить время и стоимость исследований по поиску наилучших параметров конструкций из углепластиков [3, 4]. Методы математического моделирования открывают возможность всестороннего анализа поведения как углепластиков, так и конструкций из них, предоставляя эффективный инструментарий для решения важных прикладных задач.

Исходными данными для построения математических моделей композиционных материалов, в том числе углепластиков, являются результаты измерений, полученные в ходе механических испытаний. Прогресс и широкое применение цифровых испытательных машин перевели процессы подготовки и проведения экспериментов по определению характеристик материалов на качественно новый уровень. Фиксируя с высокой частотой дискретизации большое количество параметров, современные испытательные машины позволяют в ходе одного эксперимента получить обширную информацию о характере деформирования и разрушения материала. Адекватная обработка таких экспериментальных данных является одним из важнейших этапов построения математических моделей деформирования современных композиционных материалов и конструкций ответственного назначения из них. Последний тезис особенно актуален в приложении к анализу экспериментальных данных для углепластиков, имеющих в качестве связующего материала эпоксидные матрицы, обладающие специфическими особенностями поведения.

Одно из характерных свойств эпоксидных матриц — их разносопротивляемость при процессах растяжения и сжатия [5, 6]. В частности, при испытании образцов эпоксидных матриц на растяжение происходит их быстрое разрушение: при построении диаграмм растяжения для образцов эпоксидных матриц типичным является интервал от 0 до 4%. В то же время при испытаниях на сжатие образцы могут деформироваться в интервале от 0 до 20% не разрушаясь. Более сложная картина деформирования имеет место при испытаниях на изгиб: деформации и в зоне растяжения, и в зоне сжатия могут достигать 5% и более. При растяжении и сжатии эпоксидных матриц различаются не только их пределы прочности, но и характер деформирования.

В работе [7] показано, что при испытаниях на растяжение жесткость образцов углепластика с углами армирования до 20° увеличивается с ростом деформаций. В [8] указывается, что это происходит из-за свойств углеродных волокон. Аналогичные выводы сделаны в [9], где в качестве возможной причины такого поведения названо наличие пор в углеродных волокнах, возникающих при отжиге, которые могут “схлопываться” при их растяжении. В то же время при других углах армирования (больше 20°) волокна практически перестают воспринимать нагрузку и наблюдается эффект быстрого падения жесткости углепластиков вследствие малой жесткости материалов матриц. Указанные нелинейные свойства компонентов и самого углепластика требуют построения физически нелинейных моделей. Это, в свою очередь, порождает серьезные математические и вычислительные проблемы, возникает необходимость разработки и использования специальных расчетных схем при анализе поведения конструкций из углепластиков.

Вопросы расчета деформирования для нелинейно-упругих разносопротивляющихся материалов мало исследованы вследствие значительных вычислительных трудностей. Задачи моделирования линейно-упругих разномодульных материалов рассматривались, в частности, С. П. Тимошенко [10] и С. А. Амбарцумяном [11, 12]. В работе [13] изложен теоретический подход к расчету разносопротивляющихся растяжению — сжатию нелинейно-упругих балок при изгибе. Ниже предложена математическая модель изгиба балки из нелинейно-упругого разносопротивляющегося материала, позволившая разработать вычислительную методику и провести численные расчеты балок из углепластиков и полимерных матриц.

В настоящей статье представлен разработанный и реализованный комплексный подход к моделированию и расчету нелинейно-упругого деформирования полимерных мат-

риц и углепластиков с различными схемами армирования с учетом их разносопротивляемости растяжению — сжатию на примере задачи трехточечного изгиба балки. Данный подход реализует полный цикл разработки и валидации модели и включает следующие этапы:

- проведение испытаний и получение экспериментальных данных;
- предварительную обработку экспериментальных данных и получение диаграмм деформирования;
- аппроксимацию диаграмм деформирования аналитическими приближениями;
- построение математических моделей деформирования образцов изотропной и армированной балок при трехточечном изгибе и разработку метода решения возникающих математических задач;
- проведение численных расчетов на основе данных об образцах изотропной и армированной балок, испытанных на трехточечный изгиб в ходе реализации программы испытаний;
- сравнение результатов численного моделирования с данными экспериментов.

1. Проведение испытаний и получение экспериментальных данных

При построении модели деформирования материала необходимо установить взаимосвязь между напряжениями и деформациями. Основные механические характеристики традиционных конструкционных материалов (модули Юнга, коэффициенты Пуассона, модули сдвига) определяются в ходе стандартизованных испытаний на растяжение, сжатие и изгиб. Эти характеристики используются в классических физически линейных моделях деформирования конструкционных материалов.

Полимеры и полимерные композиционные материалы отличаются ярко выраженным нелинейным поведением, что заставляет искать новые подходы к описанию взаимосвязей между напряжениями и деформациями в них. Возможности для этого открывают современные методы испытаний, позволяющие более точно описать характер деформирования исследуемых материалов.

Для изучения особенностей деформирования разработанных в ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ эпоксидной матрицы ВСЭ-1212 и углепластика ВКУ-28 (углеродный жгут Т-800, матрица ВСЭ-1212) создана программа испытаний их образцов, реализованная в Испытательном центре ФГУП «ВИАМ». ВКУ-28 — один из наиболее перспективных углепластиков, который планируется применять в конструкциях новой авиационной техники.

Ниже рассмотрим поведение указанных материалов в нормальных условиях. Программа испытаний включает эксперименты по сжатию, растяжению и изгибу образцов углепластика ВКУ-28 для продольного и поперечного направления выреза по ГОСТ 25.601, ASTM D 3039/D 3039M, ГОСТ 25.602, ГОСТ 25.604 и образцов полимерной матрицы ВСЭ-1212 по ГОСТ 4651, ГОСТ 11262, ГОСТ 9550, ГОСТ 4648.

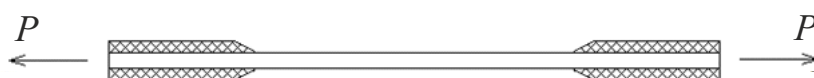


Рис. 1. Схема испытания на растяжение

При проведении испытаний на растяжение образец зажимается в клиновидных захватах, а на его рабочую область устанавливаются ножи навесного экстензометра (рис. 1). Для установки экстензометра в начальный момент испытания к образцу прилагается малая ненулевая нагрузка (преднагрузка). База замера деформации для образцов полимерной матрицы составляла около 40 мм, а для образцов углепластика — не менее 50 мм. Сила прижатия ножей экстензометра не превышает 10 Н. Нагружение образцов проводится с постоянной скоростью деформирования $d\varepsilon/dt = 0.1 \text{ мин}^{-1}$. При этом вплоть до момента разрушения записывается массив данных: время испытания, относительная деформация, нагрузка.

Для получения диаграмм деформирования полимерной матрицы при сжатии используются образцы в виде параллелепипедов с прямоугольным сечением, которые устанавливаются между плоскопараллельными прижимными плитами. К верхней плите подводится щуп макродатчика деформации (рис. 2). Сжатие образца проводится со скоростью $1 \text{ мм} \cdot \text{мин}^{-1}$. Записывается массив данных: время испытания, перемещение по траверсе и/или датчику деформации, нагрузка.

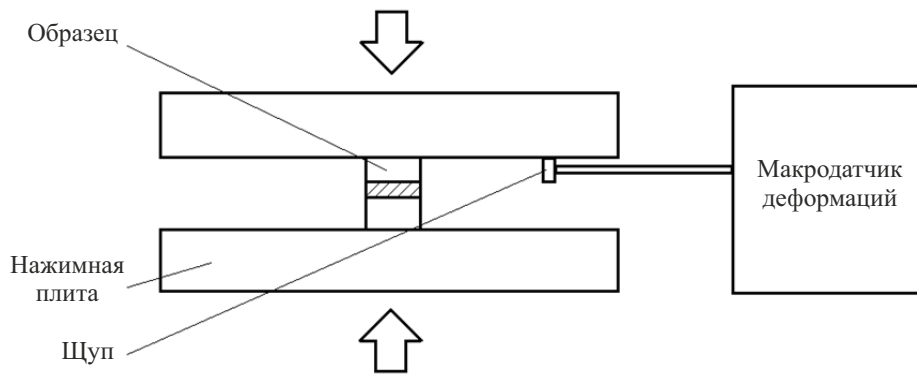


Рис. 2. Схема испытания образцов полимерной матрицы на сжатие

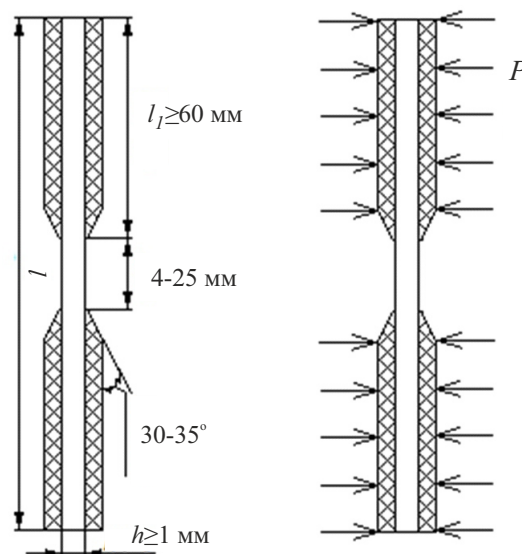


Рис. 3. Схема испытания на сжатие образцов углепластика

При испытании на сжатие углепластиков образцы с накладками общей длиной 120 мм и рабочей зоной порядка $4h$ (рис. 3) зажимаются в специальном приспособлении, устанавливаемом между плоскопараллельными прижимными плитами. При нагружении записывается массив данных: время испытания, перемещение по траверсе и/или относительные деформации, нагрузка.

Испытание образцов на трехточечный изгиб является одним из стандартных методов определения механических свойств материалов. В этом испытании образец в форме параллелепипеда укладывается на две опоры, расстояние между которыми равно L , так, чтобы основная часть образца находилась между ними. Граничные части образца при этом должны выходить за опоры (рис. 4), что позволяет иметь в районе самих опор запас для возможных продольных перемещений образца. В середине пролета между

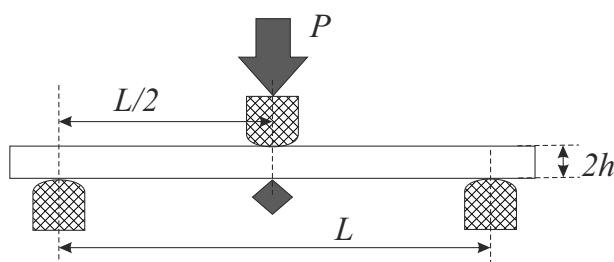


Рис. 4. Схема испытания образцов на трехточечный изгиб

ширина b_0	20	мм	Стандартный датчик силы	Стандартный ДД	Датчик перемещения траверсы
Толщина a_0	2.05	мм	Н	%	мм
Время испытания t			Н	%	мм
0.00996094			149.491	-1.42E-06	0.065813
0.0299609			149.475	-1.42E-06	0.00206823
0.259961			149.151	0.00144088	0.00233695
..		

Рис. 5. Вид пакета экспериментальных данных

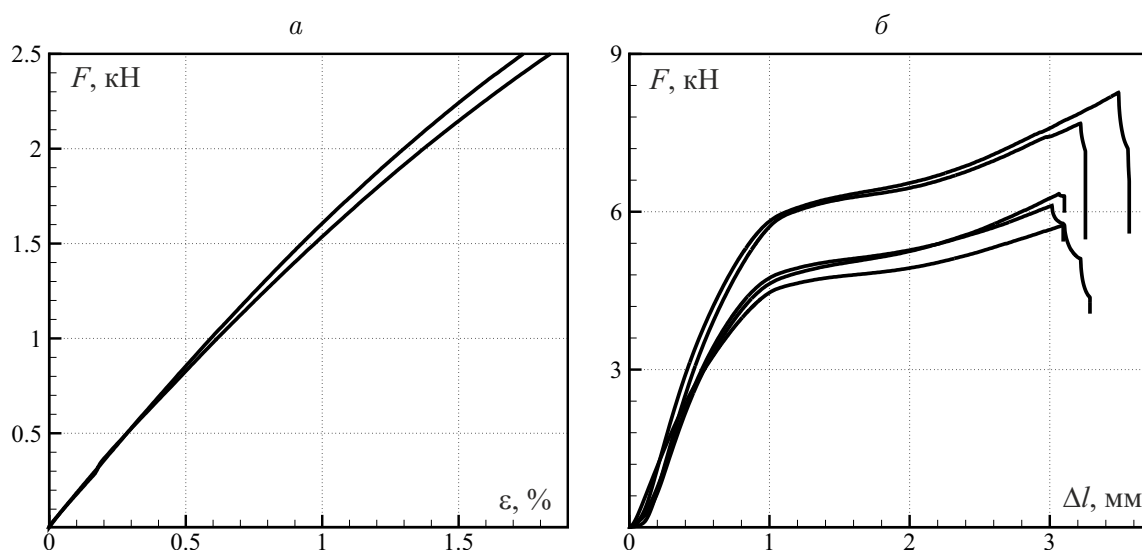


Рис. 6. Диаграммы растяжения (а) и сжатия (б) образцов ВСЭ-1212 до обработки: нагрузка — деформация (а) и нагрузка — перемещение по траверсе испытательной машины (б)

опорами на образец с силой P давит нож, напротив которого, снизу образца, находится шуп датчика деформации. В ходе испытания происходит увеличение прогиба образца с постоянной скоростью вплоть до момента его разрушения, при этом датчик деформаций фиксирует прогиб образца w в середине пролета, а датчик силы — прилагаемую силу. Записывается массив данных: время испытания, перемещение, нагрузка.

Частота опроса датчиков в испытаниях составляет не менее 10 Гц так, что в результате каждого испытания получается массив, содержащий до 10 000 строк, соответствующих различным моментам времени. Также в каждом испытании фиксируются основные параметры образца (рис. 5).

На основе записанных данных могут быть построены различные диаграммы, связывающие полученные в испытаниях характеристики. Типичной является диаграмма деформирования, в которой фиксируется связь между прикладываемой нагрузкой и кинематической характеристикой (перемещением по траверсе, деформацией, локальным прогибом). Примеры таких диаграмм представлены на рис. 6.

2. Предварительная обработка экспериментальных данных

Полученные результаты различных испытаний материалов требуют применения специальных подходов к их обработке и преобразованию для последующего использования в математических моделях. Во-первых, получаемые на испытательных машинах данные содержат артефакты, возникающие из-за особенностей проведения испытаний или сбоев во время отдельных экспериментов. Во-вторых, эти данные часто являются косвенными по отношению к теоретическим величинам, которые необходимо определить. Это касается, например, восстановления деформаций по значениям перемещений по траверсе при испытаниях на сжатие. В-третьих, экспериментальные данные содержат неизбежные ошибки измерений, которые необходимо оценить и устранить.

Таким образом, для корректного описания закономерностей деформирования материала необходимо выполнить несколько этапов предобработки экспериментальных данных. На основе анализа полученных диаграмм деформирования, стандартов испытаний, особенностей их проведения и способов измерений был выдвинут ряд гипотез, позволяющих устранить артефакты в данных.

При испытаниях на сжатие образцов полимерной матрицы на начальном участке диаграммы наблюдается нетипично быстрый рост деформаций, замедляющийся впоследствии, что более характерно для пористых или сотовых материалов (рис. 7, *a*) [14]. Наиболее вероятной причиной возникновения этого эффекта является поджатие силовой цепочки испытательной машины, которое отражается в диаграмме при измерении перемещений по траверсе испытательной машины.

Поджатие силовой цепочки может быть проверено экспериментально с помощью датчика деформаций (экстензометра, тензорезисторного датчика, лазерного датчика и др.), установленного на рабочей базе образца. При испытании на сжатие с использованием таких датчиков начальная нелинейность диаграммы отсутствует.

Для устранения влияния этого эффекта использовались следующие гипотезы:

- в начальный момент деформирования жесткость материала максимальна, таким образом, диаграмма должна иметь наибольший угол наклона;
- на начальной стадии деформирования происходит практически линейно по тому же закону, что и на основном участке диаграммы до начала интенсивного разупрочнения материала.

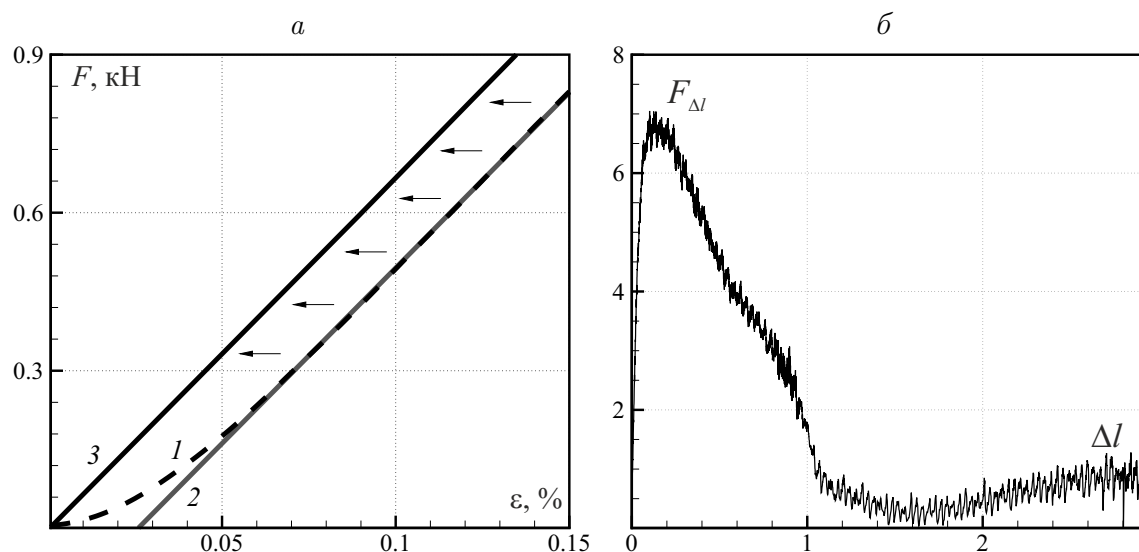


Рис. 7. Артефакты испытаний: *a* — устранение эффекта поджатия силовой цепочки испытательной машины; *б* — разностная производная напряжений в испытаниях на сжатие образца ВСЭ-1212

Определяя точку максимума разностной производной от сжимающей нагрузки, фиксируемой в эксперименте, и восстанавливая параболу от этой точки к диаграмме, был получен начальный участок параболической формы, гладко сопряженный с диаграммой. Осуществив перенос диаграммы вдоль оси деформаций так, чтобы точка $(0, 0)$ стала ее частью, получена диаграмма деформирования без артефакта, связанного с поджатием силовой цепочки. Пример реализации этого процесса представлен на рис. 7, *a*, где пунктирной кривой 1 соответствуют исходные данные, кривой 2 отвечает результат восстановления закона деформирования для начального участка диаграммы, кривой 3 — преобразование по переносу в начало координат.

Другой артефакт измерения в испытаниях проявляется в виде пилообразных скачков: резких изменений измеряемых значений силы и деформаций. Важно отметить, что такие скачки являются артефактами только в том случае, если они не соответствуют началу разрушения, например микрорастрескиванию углепластика. Они могут возникать при отклеивании накладок во время испытаний, тогда угол наклона диаграммы до и после скачка сохраняется с высокой точностью.

Для восстановления диаграммы деформирования в таких случаях будем исходить из предположения о ее непрерывности и гладкости вплоть до момента возникновения в образце очагов начального разрушения. При этом необходимо совместить участки диаграммы на краях скачков путем ее переноса вдоль линии скачка так, чтобы сохранить непрерывность и гладкость кривой.

Еще одной особенностью испытаний является наличие “шума в данных”, связанное с погрешностями измерений, вибрациями испытательных систем, особенно связи “силовая цепочка — привод испытательной машины — датчик деформации” при испытаниях по жесткому режиму (управление по деформациям), когда образуется контур с обратной связью. Лучше всего это видно, если построить разностные производные от наблюдаемых величин, дисперсия которых становится сопоставимой с их значениями (рис. 7, *б*).

Учитывая наличие в моделях деформирования композиционных материалов операторов дифференцирования, а также намерение максимально эффективно использовать аналитические методы, совместим решение задачи устранения “шума” в данных с задачей их приближения гладкими функциями с аналитическим представлением.

Рассмотрим задачу преобразования данных в требуемый в дальнейшем формат σ – ε -диаграмм. Восстановление относительных деформаций для каждого способа измерения определяется методологией, описанной в соответствующих стандартах и технической документации к испытательным машинам и их программному обеспечению. В случае измерений по датчику деформаций (ДД), который определяет деформации в процентах, необходимо полученное в эксперименте значение $\varepsilon_{\text{ДД}}$ разделить на 100: $\varepsilon = \varepsilon_{\text{ДД}}/100$. При сжатии для определения относительных деформаций по значениям перемещения траверсы $d_{\text{тр}}$ необходимо разделить $d_{\text{тр}}$ на длину образца l : $\varepsilon = d_{\text{тр}}/l$.

Базой для определения напряжений является значение приложенной к образцу нагрузки. Считая напряжения равномерно распределенными в сечении и вдоль образца, для их вычисления применяем формулу $\sigma = F/S$, где F — сила, S — площадь образца в поперечном сечении. В случае испытаний на растяжение, где величина деформаций не превышает 2%, допустимо применение этой формулы с пренебрежением изменения площади поперечного сечения образца. В случае сжатия образцов полимерной матрицы деформации становятся достаточно велики (10% и более) и изменение площади сечения уже существенно.

Рассмотрим два варианта вычисления напряжений, когда считается что $S = \text{const}$ и $S = S(\varepsilon) = V_0/h(\varepsilon)$, где V_0 — начальный объем, $h(\varepsilon)$ — высота образца в зависимости от величины деформаций. Первый вариант соответствует гипотезе о сохранении площади сечения (принятой в большинстве стандартов), второй — гипотезе о сохранении объема образца. В работе [14] рассмотрено применение формулы изменения площади сечения в зависимости от деформаций, учитывающей объемный модуль упругости, но, как будет показано ниже, точность формулы на основе гипотезы о постоянстве объема вполне достаточна.

Полученные с использованием указанных формул σ – ε -диаграммы деформирования ВСЭ-1212 приведены на рис. 8. Во всех построенных диаграммах, учитывающих

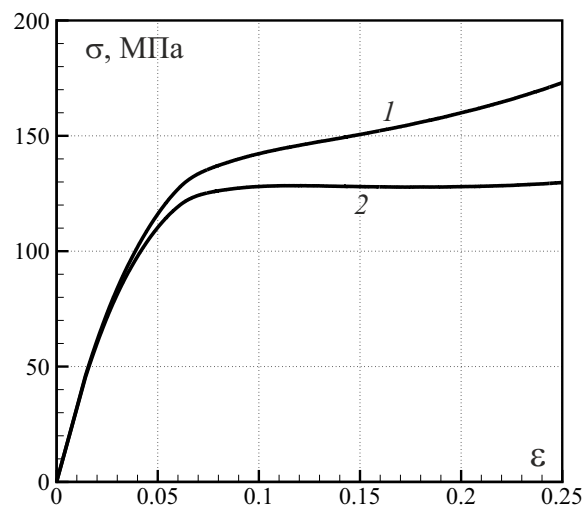


Рис. 8. Диаграммы сжатия образца полимерной матрицы ВСЭ-1212 с учетом изменения площади сечения (кривая 2) и без него (кривая 1)

изменение площади сечения, выделяется характерный максимум напряжений и не наблюдается упрочнение материала, что соответствует эмпирическим наблюдениям и теоретическим представлениям о характере деформирования таких материалов. При этом разницу в значениях напряжений между результатами применения формул с постоянной и переменной площадью сечений можно заметить уже при деформациях порядка 5 %, что может существенно повлиять на результаты расчетов, и пренебрегать этим не вполне корректно.

3. Математический аппарат аппроксимации диаграмм деформирования

После предварительной обработки данных механических испытаний получают семейства $\sigma - \varepsilon$ -диаграмм деформирования полимерной матрицы и углепластика, представленные в виде упорядоченных пар значений $\{\varepsilon, \sigma\}$, соответствующих различным моментам времени испытания. Для использования $\sigma - \varepsilon$ -диаграмм в математических моделях будем строить их аппроксимации функциями, задаваемыми аналитическими выражениями вида $\sigma = \sigma(\varepsilon)$.

В работах [14–16] представлены различные подходы к построению и аппроксимации сложных диаграмм деформирования. В настоящей работе используются два подхода к приближению экспериментальных данных аналитическими зависимостями. Первый подход заключается в поиске функции заданного вида, наименее отклоняющейся от экспериментальных данных в смысле наименьших квадратов [17]. Второй подход основан на применении математического аппарата методов без насыщения [18–20], идея которого заключается в выборе из всего набора экспериментальных данных определенного множества точек, использование которых в качестве узлов интерполяции для построения интерполяционных полиномов обеспечивает приближение всей выборки данных с высокой точностью. Проиллюстрируем применение этих подходов на примере диаграмм деформирования полимерных матриц при испытаниях на сжатие.

3.1. Приближения с помощью метода наименьших квадратов

В рамках первого подхода минимизируется функционал среднеквадратичного отклонения искомой функции от имеющегося набора данных испытаний:

$$\sum_{i=1}^N (f(x_i) - \phi(x_i))^2 \rightarrow \min, \quad (1)$$

где $f(x)$ — аппроксимирующая функция; $\{x_i, \phi(x_i)\}$ — результаты испытаний, N — число измерений.

Метод поиска минимума указанного функционала зависит от представления $f(x)$. В случае, когда $f(x)$ — полиномиальная или кусочно-полиномиальная функция, задача минимизации функционала сводится к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Поскольку при проведении испытаний на деформирование твердых тел для одного эксперимента может быть получено более 5000 измерений, соответствующая система становится плохо обусловленной. Для решения такой сильно переопределенной и плохо обусловленной СЛАУ применяется ортогональный метод QR -разложения ее матрицы — метод отражений Хаусхолдера.

На практике конкретный вид аппроксимации выбирается исходя из ряда физических соображений и неизвестные параметры могут входить в это представление нелинейно. Тогда задача (1) может быть решена с применением численных методов глобальной оптимизации. В настоящей работе для этого использованы возможности пакета прикладных программ OPTCON-A [21].

В дополнение к качественному анализу результатов аппроксимации используем числовую характеристику ее точности — величину относительного среднеквадратичного отклонения функции $f(x)$ от исходных данных $\phi(x_i)$:

$$\text{SME} = \|f - \phi\|_2 = \frac{1}{\max_{i=1, \dots, N} \phi(x_i)} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |f(x_i) - \phi(x_i)|^2}.$$

При полиномиальной аппроксимации приближающая функция имеет вид

$$f_K(x) = \sum_{k=1}^K b_k x^k, \quad K = 1, \dots, 5, \quad (2)$$

где b_s — искомые параметры. Такое представление позволяет строить аппроксимации высокой точности, с которыми удобно работать в аналитическом виде. Так как диаграмма деформирования проходит через начало координат, в полиномиальном представлении отсутствует свободный член. Здесь для сравнения рассмотрим и полиномиальные аппроксимации со свободным членом.

На рис. 9 представлены результаты аппроксимации экспериментальных диаграмм деформирования полимерной матрицы (штриховая кривая) с помощью полиномов до пятой степени включительно со свободными членами (а) и без них (б). В табл. 1 приведены значения коэффициентов аппроксимаций полиномами без свободного члена f^* и величина их относительного среднеквадратичного отклонения от набора экспериментальных данных.

Аппроксимация полиномами первой степени ($K = 1$) с помощью метода наименьших квадратов при использовании данных всей диаграммы деформирования не является удовлетворительной даже в самом грубом смысле. Повышение степени аппроксимирующего полинома улучшает качество приближения. Квадратичная аппроксимация ($K = 2$) все еще сильно искажает значения текущего модуля упругости. Использование полиномов третьей и четвертой степени позволяет получить достаточно адекватные результаты, которые мало отличаются по полученным коэффициентам при совпадающих степенях и по среднеквадратичному отклонению от исходных данных.

Т а б л и ц а 1. Коэффициенты полиномиальной аппроксимации, полученные методом наименьших квадратов и среднеквадратичное отклонение функции $f(x)$ от исходных данных

$f(x)$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	SME
f_1^*	8.62e+2	—	—	—	—	2.35e-1
f_2^*	1.82e+3	-0.59e+4	—	—	—	6.60e-2
f_3^*	2.48e+3	-1.60e+4	3.50e+4	—	—	1.15e-2
f_4^*	2.51e+3	-1.70e+4	4.30e+4	-1.99e+4	—	1.14e-2
f_5^*	2.20e+3	-3.52e+4	-1.44e+5	1.02e+6	-2.00e+6	5.50e-3

Полиномы пятой степени аппроксимируют экспериментальные данные с более высокой точностью, однако при этом проявляются нефизичные осцилляции, которые только усиливаются с дальнейшим увеличением степени аппроксимирующего полинома.

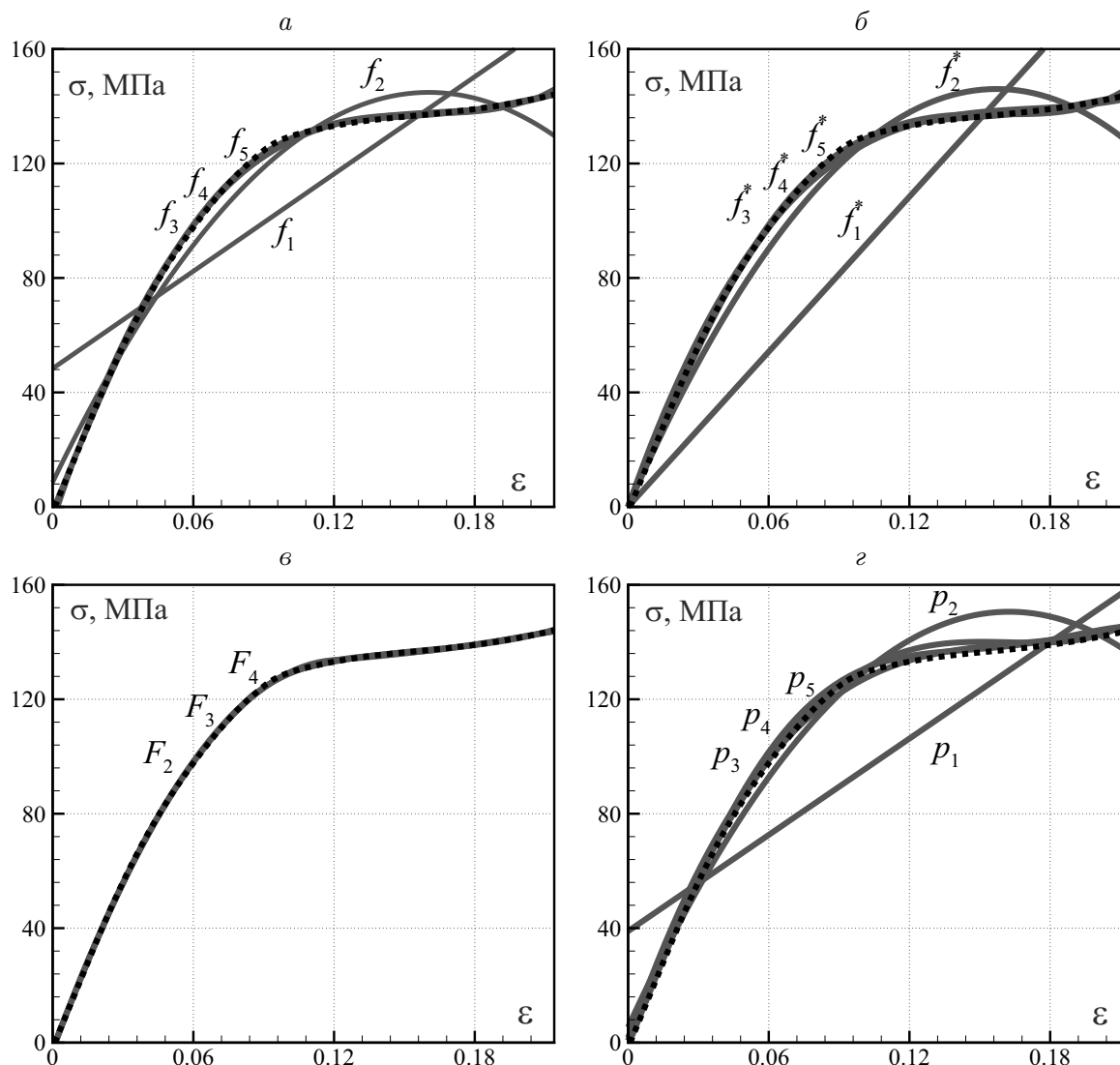


Рис. 9. Аппроксимация диаграмм деформирования: а — полиномами $f_i(x)$, б — полиномами без свободного члена $f_i^*(x)$, в — кусочно-полиномиальными функциями $F_i(x)$, г — полиномами $p_i(x)$ на основе метода без насыщения

Т а б л и ц а 2. Погрешность разных способов аппроксимации (среднеквадратичное отклонение функции $f(x)$ от исходных данных)

$f(x)$	SME	$f(x)$	SME	$f(x)$	x^*	SME	$f(x)$	SME
f_1	1.33e-1	f_1^*	2.35e-1	—	—	—	p_1	1.4e-1
f_2	5.28e-2	f_2^*	6.57e-2	F_2	0.1015	5.49e-3	p_2	6.4e-2
f_3	1.05e-2	f_3^*	1.15e-2	F_3	0.0851	1.91e-3	p_3	1.5e-2
f_4	8.78e-3	f_4^*	1.14e-2	F_4	0.0895	4.46e-4	p_4	1.2e-2
f_5	5.12e-3	f_5^*	5.52e-3	—	—	—	p_5	6.4e-3
—	—	—	—	—	—	—	p_6	2.6e-3

Поэтому, несмотря на высокую точность приближения в смысле среднеквадратичного отклонения, аппроксимации полиномами пятого и выше порядков без применения дополнительных критериев, ограничивающих осцилляции, следует признать неудовлетворительными.

Для аппроксимации сложных диаграмм деформирования можно использовать кусочно-полиномиальную аппроксимацию. Такой подход позволяет снизить обусловленность СЛАУ, избавиться от осцилляций, не имеющих физического смысла, и, как следствие, получить приближение более высокого качества и точности.

Рассмотрим аппроксимацию, состоящую из двух полиномов:

$$F_n(x) = \begin{cases} f_n^1(x), & x \in [x_0, x^*], \\ f_n^2(x), & x \in [x^*, x_1], \end{cases} \quad (3)$$

где x^* — точка склейки; $f_n^i(x)$ — полином степени n . Выбор точки склейки может осуществляться исходя из физических принципов (например, в точке σ^* — пределе текучести), математических критериев (например, в нулях производных первого и второго порядков), вычислительных критериев (например, минимизации погрешности аппроксимации). В настоящей работе точка склейки выбирается автоматически, обеспечивая наименьшее значение среднеквадратичного отклонения от исходных данных. При построении аппроксимации обеспечивалась гладкость $F_n(x)$ в точке склейки.

Результаты кусочно-полиномиальных аппроксимаций двумя полиномами второй, третьей и четвертой степени представлены на рис. 9, в. Аппроксимация полиномами второй степени хорошо приближает экспериментальную кривую в среднеквадратичном смысле, но имеется участок, близкий к точке склейки, где заметно отклонение. Использование полиномов более высоких степеней нивелирует визуальные отличия экспериментальных данных и приближающей функции. Кусочно-полиномиальная функция $F_3(x)$, как и полином пятой степени, имеет 6 варьируемых коэффициентов, но аппроксимирует данные точнее и не осциллирует. Приближения двумя полиномами четвертой степени являются самой точной аппроксимацией, полученной в ходе проведения исследований (табл. 2), но она представляется избыточной.

3.2. Приближения с помощью методов без насыщения

Если предположить, что механические свойства рассматриваемого материала таковы, что диаграммы деформирования обладают высокой степенью гладкости, можно минимизировать объем экспериментальных данных, необходимых для построения достаточно точных аппроксимаций. Воспользуемся для этого приближениями без насыщения интерполяционными полиномами с узлами Чебышева [18–20]

$$p_M(t) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m-1} \frac{\phi(t_m) \sqrt{1-t_m^2}}{t-t_m} \cos(M \arccos t). \quad (4)$$

Здесь $t_m = \cos((2m-1)\pi/2M)$ — узлы интерполяции, которые являются корнями полинома Чебышева степени M ; $\phi(t)$ — аппроксимируемая функция, отображенная с отрезка $[x_0, x_1]$ на отрезок $[-1, 1]$ линейным преобразованием

$$t = \frac{2}{x_1 - x_0} \left(x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right), \quad t \in [-1, 1], \quad x \in [x_0, x_1].$$

Приведенные полиномы позволяют на гладких функциях достичь оценки точности с асимптотикой наилучших приближений, т. е. минимизировать число узлов интерполяции для достижения необходимой точности. Полученные приближения представлены на рис. 9, z , оценки их среднеквадратичного отклонения от исходных данных приведены в табл. 2.

3.3. Аппроксимация наборов данных

Рассмотрим вопрос о построении осредненной диаграммы деформирования на основе нескольких наборов экспериментальных данных. Можно выделить несколько подходов к получению таких диаграмм.

Первый подход заключается в аппроксимации каждой кривой и усреднении полученных характеристик. Такой подход регламентируется, в частности, ГОСТ 4651 и ГОСТ 9550 для определения модуля упругости и других традиционных механических характеристик пластмасс. В нашем случае этот подход может быть эффективен, когда коэффициенты в представлении аппроксимирующей функции входят линейно.

Второй подход заключается в поиске такой функции, чтобы погрешность аппроксимации для всего набора экспериментальных данных в целом была минимальной. Это достаточно трудоемкая процедура, поскольку приходится обрабатывать весь набор экспериментальных данных одновременно.

В рамках третьего подхода предлагается получить осредненную кривую деформирования, построенную на основании данных всего пучка кривых, и использовать описанные выше подходы для аппроксимации этой осредненной кривой.

В последнем случае целесообразно предварительно привести данные к единому набору узлов интервала деформаций, распределенному по этому интервалу равномерно или неравномерно по заданному закону. Каждый график перестраивается на общей сетке, шаг которой выбирается исходя из характерных значений приращения деформаций. Значение напряжений рассчитывается как линейное приближение, построенное в окрестности каждой точки общей сетки. На следующем шаге строится новый набор данных — в каждой точке сетки ищется среднее значение от всех напряжений, полученных на предыдущем шаге. Построенный набор данных затем используется для аппроксимации.

Переход к единой равномерной сетке и работа с одним набором данных позволяют добиваться равнозначного учета всех областей деформирования, а не только тех из них, в которых в ходе проведения испытаний образуются сгущения значений деформаций.

4. Итоги аппроксимации экспериментальных данных

На рис. 10 и 11 приведены диаграммы деформирования полимерных материалов, построенные на основе данных, полученных в результате предварительной обработки. На рис. 10 — для полимерной матрицы ВСЭ-1212 по формулам, не учитывающим изменение поперечного сечения образца (a , b) и учитывающим такое изменение на основе гипотезы о постоянстве объема (v , z). На рис. 11 — для однонаправленно-армированных образцов углепластика ВКУ-28, вырезанных в продольном (a , b) и поперечном (v , z) направлении. Пунктирные кривые соответствуют экспериментальным данным, сплошные — осреднению пучка.

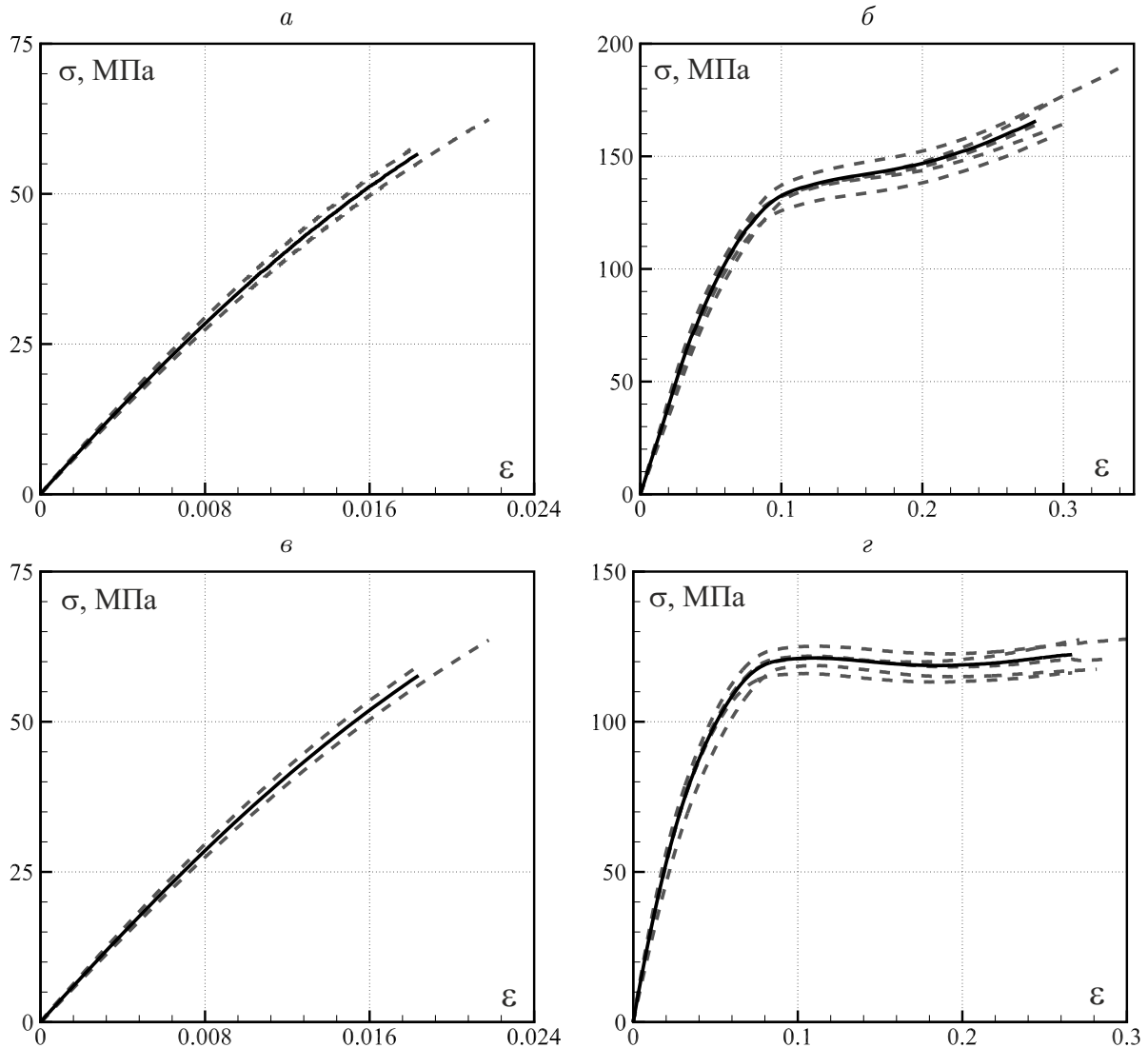


Рис. 10. Диаграммы растяжения (слева) и сжатия (справа) деформирования полимерной матрицы ВСЭ-1212: без учета (*а, б*) и с учетом (*в, г*) изменения поперечного сечения

Т а б л и ц а 3. Коэффициенты аппроксимации диаграмм растяжения полимерного связующего ВСЭ-1212, $\varepsilon \in [0; 0.018]$ и среднеквадратичное отклонение функции $f(x)$ от исходных данных

Вид аппроксимации	$a_1 \cdot 10^{-9}$	$a_2 \cdot 10^{-9}$	a_3	SME
Постоянное поперечное сечение				
A1	3.30	—	—	2.9e-2
A2	3.90	-4.38e+1	—	1.5e-3
A3	3.83	-3.17e+1	-4.94e+11	6.7e-4
A4	3.80	-1.05e+2	2.25	6.6e-4
Переменное поперечное сечение				
A1	3.33			2.7e-2
A2	3.89	-4.02e+1		1.8e-3
A3	3.80	-2.48e+1	-6.30e+2	4.0e-4
A4	3.77	-1.40e+2	2.35	2.7e-4

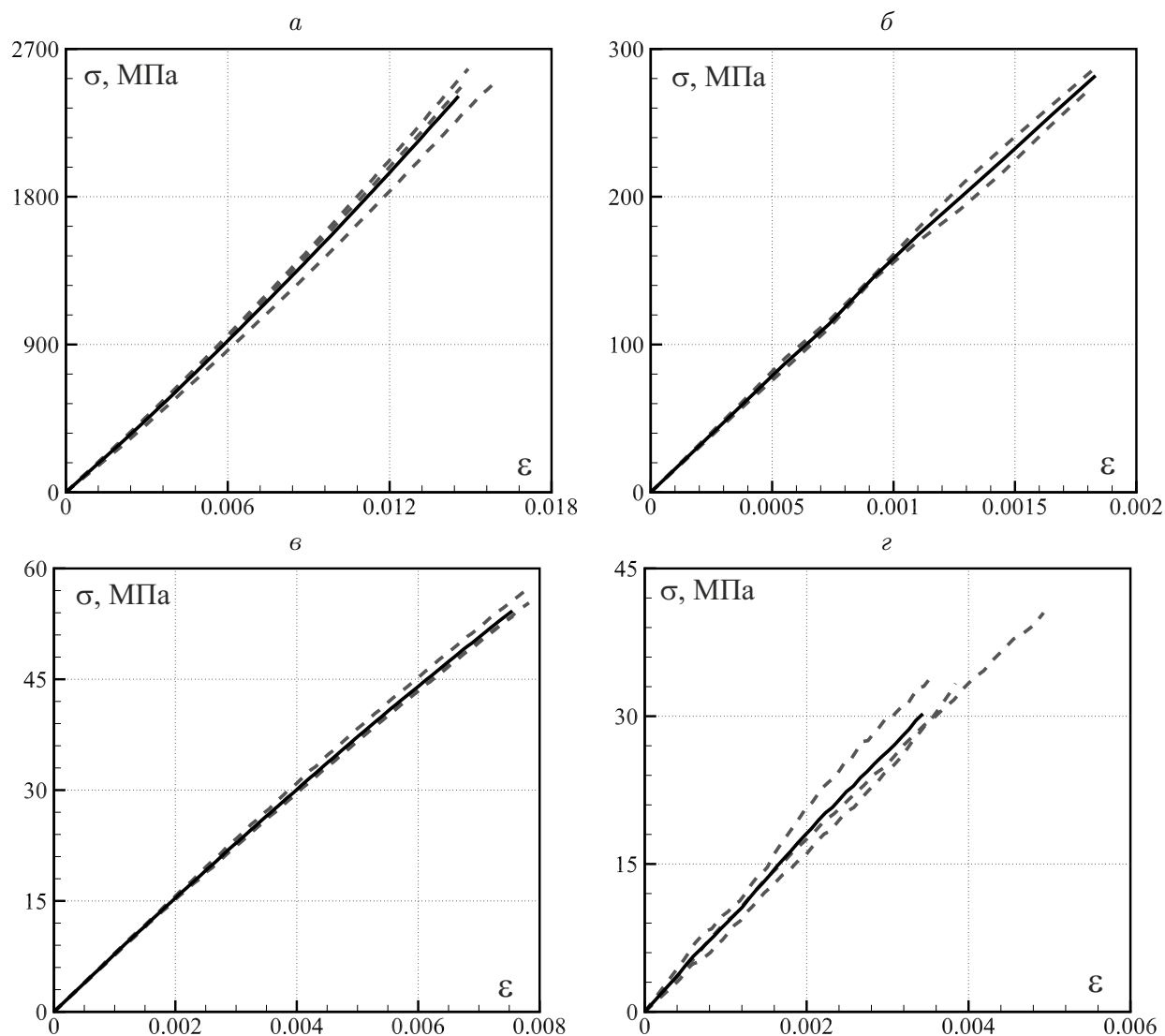


Рис. 11. Диаграммы растяжения (слева) и сжатия (справа) углепластика ВКУ-28 в продольном (а, б) и поперечном (в, г) направлении

В табл. 3–6 приведены результаты аппроксимации представленных выше кривых деформирования различными функциями на различных интервалах диаграмм:

- 1) линейная аппроксимация $\sigma = a_1\varepsilon$ (A1);
- 2) аппроксимация полиномом второй степени $\sigma = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2$ (A2);
- 3) аппроксимация полиномом третьей степени $\sigma = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3$ (A3);
- 4) комбинация линейной и степенной функций $\sigma = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^{a_3}$ (A4).

5. Модель деформирования при изгибе, учитывающая разносопротивляемость растяжению и сжатию

Испытание образцов на трехточечный изгиб — один из стандартных методов определения физико-механических характеристик материалов (см, например, ГОСТ 4648). На рис. 12 представлена схема физической модели трехточечного изгиба балки прямоугольного сечения $b \times 2h$ с пролетом l между опорами. Левый край балки шар-

Т а б л и ц а 4. Коэффициенты аппроксимации диаграмм сжатия ВСЭ-1212 и среднеквадратичное отклонение функции $f(x)$ от исходных данных

Вид аппроксимации	$a_1 \cdot 10^{-9}$	$a_2 \cdot 10^{-9}$	a_3	SME
Постоянное поперечное сечение, $\varepsilon \in [0; 0.28]$				
A1	0.77			2.3e-1
A2	1.60	-3.97		8.2e-2
A3	2.36	-1.29e+1	2.37e+10	1.4e-2
A4	-5.71	5.49	0.90	3.8e-2
Переменное поперечное сечение, $\varepsilon \in [0; 0.28]$				
A1	0.69			3.5e-1
A2	1.69	-5.22		1.4e-1
A3	2.71	-1.84e+1	3.84e+1	3.6e-2
A4	-2.07	1.72	0.72	4.8e-2
Переменное поперечное сечение, укороченный участок, $\varepsilon \in [0; 0.06]$				
A1	2.10			7.2e-2
A2	3.05	-2.12e+1		4.2e-3
A3	3.18	-2.85e+1	9.13e+1	1.1e-3
A4	3.31	-1.24e+1	1.75	1.9e-3

Т а б л и ц а 5. Коэффициенты аппроксимации диаграмм деформирования углепластика ВКУ-28 с продольным армированием и среднеквадратичное отклонение функции $f(x)$ от исходных данных

Вид аппроксимации	$a_1 \cdot 10^{-9}$	$a_2 \cdot 10^{-9}$	a_3	SME
Растяжение, $\varepsilon \in [0; 0.015]$				
A1	160.8			1.4e-2
A2	144.9	1.44e+3		5.7e-4
A3	144.0	1.66e+3	-1.14e+13	4.3e-4
A4	143.0	8.87e+2	1.87	4.1e-4
Сжатие, $\varepsilon \in [0; 0.0018]$				
A1	155.4			5.8e-3
A2	160.2	-3.33e+3		3.4e-3
A3	155.9	4.31e+3	-3.00e+15	2.9e-3
A4	157.7	-5.81e+8	3.98	3.0e-3

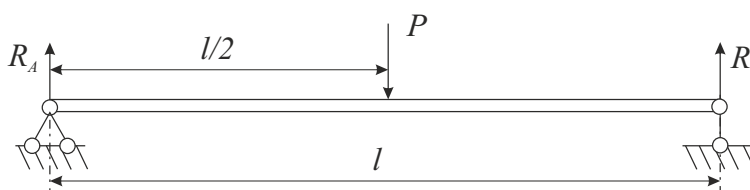


Рис. 12. Схема модели трехточечного изгиба балки прямоугольного сечения

Т а б л и ц а 6. Коэффициенты аппроксимации диаграмм деформирования углепластика ВКУ-28 с поперечным армированием и среднеквадратичное отклонение функции $f(x)$ от исходных данных

Вид аппроксимации	$a_1 \cdot 10^{-9}$	$a_2 \cdot 10^{-9}$	a_3	SME
Растяжение, $\varepsilon \in [0; 0.0076]$				
A1	7.37			1.1e-2
A2	7.89	-9.22e+1		6.4e-4
A3	7.87	-8.97e+1	2.54e+11	4.3e-4
A4	7.82	-2.23e+2	2.20	4.8e-4
Сжатие, $\varepsilon \in [0; 0.0034]$				
A1	8.90			6.7e-3
A2	9.21	-1.20e+2		4.1e-3
A3	8.96	1.16e+2	-5.09e+13	3.7e-3
A4	9.04	-5.16e+6	3.95	3.7e-3

нирно закреплен, а правый свободно оперт, при этом в центр балки прикладывается сосредоточенная нагрузка. В рамках модели пренебрегаем формой опор, возникающие нагрузку P и реакции опор R_A и R_B полагаем сосредоточенными. Кроме того, будем пренебрегать и возможной неоднородностью деформаций в третьем направлении (перпендикулярном продольному направлению и направлению приложения нагрузки). В этом случае в верхней части балки возникают деформации сжатия в продольном направлении, а в нижней части — деформации растяжения. Полимерная матрица ВСЭ-1212 и углепластик ВКУ-28, как было указано выше, по-разному сопротивляются растяжению и сжатию. Рассмотрим, как учет этого фактора влияет на результаты расчетов, и проведем сравнение с результатами экспериментальных измерений.

Вследствие очень малых скоростей деформирования состояние равновесия вполне удовлетворительно описывается классической теорией изгиба балки. В качестве отсчетной примем срединную поверхность балки.

Напряженно-деформированное состояние балки характеризуется следующими величинами, определенными на отсчетной поверхности: $Q(x)$ — перерезывающей силой, $M(x)$ — изгибающим моментом, $N(x)$ — продольным усилием, $u(x)$, $w(x)$ — продольным перемещением и прогибом. Соответствующие уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{dN}{dx} = 0, \quad \frac{dQ}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dx} = Q. \quad (5)$$

Реакции опор R_A и R_B определяются соотношением $R_A = R_B = P/2$. Изгибающие моменты в точках опоры равны нулю $M_A = M_B = 0$. Решение системы уравнений (5) можно записать в виде

$$N = 0, \quad Q(x) = \begin{cases} P/2 & \text{при } 0 \leq x \leq l/2, \\ -P/2 & \text{при } l/2 \leq x \leq l; \end{cases} \quad (6)$$

$$M(x) = \begin{cases} Px/2 & \text{при } 0 \leq x \leq l/2, \\ -P(x-l)/2 & \text{при } l/2 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Распределение деформаций по толщине балки получим в рамках кинематических гипотез Кирхгофа — Лява, в соответствии с которыми

$$\varepsilon(x, z) = e(x) + z\kappa(x), \quad (7)$$

$$e(x) = \frac{du}{dx}, \quad \kappa(x) = -\frac{d^2w}{dx^2}, \quad (8)$$

где $\varepsilon(x, z)$ — деформации в балке; $e(x)$ — деформации срединной поверхности; $\kappa(x)$ — изменение кривизны срединной поверхности. Как было отмечено, в балке возникают деформации сжатия и растяжения, границу раздела которых обозначим z_1 . В области $-h \leq z \leq z_1$ сечения деформации будут отрицательными, а в области $z_1 \leq z \leq h$ — положительными. На границе этих состояний деформации ε равны нулю, поэтому сама граница определяется уравнением

$$z_1 = -\frac{e}{\kappa}, \quad -h \leq z_1 \leq h. \quad (9)$$

Физические соотношения запишем в виде

$$\sigma^\pm(x, z) = f_i^\pm(\varepsilon), \quad (10)$$

где верхний индекс “+” отвечает соотношениям для области с положительными деформациями, “-” — с отрицательными; $f(\varepsilon)$ — выбранная для расчетов форма аппроксимации диаграммы деформирования (линейная функция, полином или комбинация линейной и степенной функций).

Продольное усилие N и изгибающий момент M в сечении стержня определяются равенствами

$$N = b \left(\int_{-h}^{z_1} \sigma^- dz + \int_{z_1}^h \sigma^+ dz \right), \quad M = b \left(\int_{-h}^{z_1} \sigma^- z dz + \int_{z_1}^h \sigma^+ z dz \right). \quad (11)$$

Подставляя в (11) соотношения (7), (9), (10) и интегрируя по толщине, получим систему уравнений для определения κ, e :

при $0 \leq x \leq l/2$

$$\begin{cases} N(\kappa, e, x) = 0, \\ M(\kappa, e, x) = Px/2, \end{cases} \quad (12)$$

при $l/2 < x \leq l$

$$\begin{cases} N(\kappa, e, x) = 0, \\ M(\kappa, e, x) = P(x-l)/2. \end{cases} \quad (13)$$

Система уравнений (12), (13) в общем случае является нелинейной, но при кусочно-линейных физических соотношениях, учитывающих разносопротивляемость в виде

$$\sigma^\pm(x, z) = E^\pm \varepsilon, \quad (14)$$

может быть решена аналитически. В нелинейном случае для решения уравнений (12), (13) использовался метод Ньютона, и тогда линеаризованная система

$$\begin{aligned} N(\varepsilon_0, \kappa_0) + \frac{\partial N(\varepsilon_0, \kappa_0)}{\partial \varepsilon}(\varepsilon - \varepsilon_0) + \frac{\partial N(\varepsilon_0, \kappa_0)}{\partial \kappa}(\kappa - \kappa_0) &= 0, \\ M(\varepsilon_0, \kappa_0) + \frac{\partial M(\varepsilon_0, \kappa_0)}{\partial \varepsilon}(\varepsilon - \varepsilon_0) + \frac{\partial M(\varepsilon_0, \kappa_0)}{\partial \kappa}(\kappa - \kappa_0) &= M(x) \end{aligned}$$

может быть разрешена относительно неизвестных величин

$$\kappa = F(\varepsilon_0, \kappa_0, M(x)), \quad \varepsilon = G(\varepsilon_0, \kappa_0), \quad (15)$$

где ε_0 и κ_0 — начальные приближения, а $M(x)$ определяется из (6).

В качестве начального приближения при малых значениях нагрузки P использовались решения, полученные для линейных физических соотношений (14). Так как расчет производится с постепенным увеличением нагрузки P с относительно небольшим шагом приращения, в случае больших значений P в качестве начального приближения можно принять результат расчета с предыдущего шага.

Определив из системы уравнений (12), (13) изменение кривизны срединной поверхности

$$\kappa(x) = \begin{cases} \kappa_1(x) & \text{при } x \in [0, l/2), \\ \kappa_2(x) & \text{при } x \in [l/2, l], \end{cases}$$

можно составить дифференциальное уравнение для определения прогиба балки. Для этого функция прогиба представляется в виде

$$w(x) = \begin{cases} w_1(x) & \text{при } x \in [0, l/2), \\ w_2(x) & \text{при } x \in [l/2, l]. \end{cases}$$

Используя уравнения (8) и условия закрепления балки, запишем систему уравнений

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} = -\kappa_1, \quad \frac{d^2 w_2}{dx^2} = -\kappa_2,$$

$$w_1(0) = w_2(l) = 0, \quad w_1(l/2) = w_2(l/2), \quad \frac{dw_1(l/2)}{dx} = \frac{dw_2(l/2)}{dx},$$

решение которой можно получить с помощью методов интегрирования краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящей работе для этого применен модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок [22].

6. Численный анализ деформирования балок.

Сопоставление расчетных и экспериментальных данных

На основе аппроксимаций диаграмм деформирования и модели трехточечного изгиба изотропных и армированных балок, описанных выше, проведен численный анализ деформирования балок из полимерной матрицы ВСЭ-1212 и углепластика ВКУ-28.

Рассмотрим три образца различных материалов с геометрическими размерами $l \times 2h \times b$:

- образец 1 — полимерная матрица ВСЭ-1212, $75 \times 4.78 \times 10.05$ мм;
- образец 2 — углепластик ВКУ-28 (образец вырезан вдоль направления укладки армирующего наполнителя), $90 \times 3.45 \times 9.85$ мм;
- образец 3 — углепластик ВКУ-28 (образец вырезан поперек направления армирования), $90 \times 3.40 \times 9.95$ мм.

На рис. 13 представлены результаты расчетов изгиба балок, полученные при использовании различных подходов к аппроксимации физических соотношений, в сравнении с экспериментальными данными.

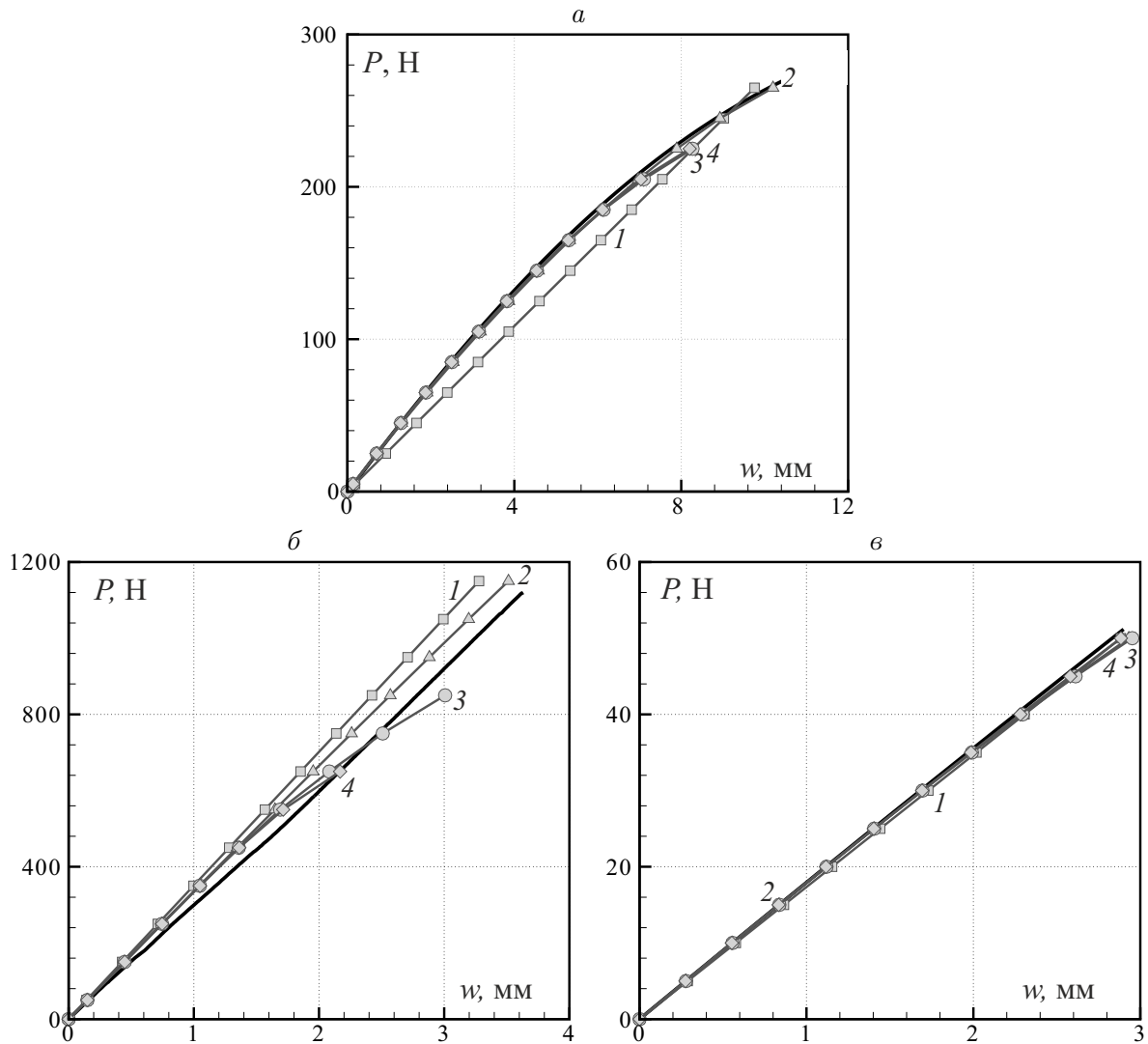


Рис. 13. Экспериментальные (сплошные кривые) и расчетные зависимости прогиба в центре балки от нагрузки: линейная аппроксимация — кривые 1, квадратичная (полиномом второй степени) — 2, кубическая — 3, линейно-степенная — 4; а–в — соответственно образцы 1–3

Использование линейных законов для растяжения и сжатия не дает адекватного приближения даже на 30% диаграммы. Использование более сложных, чем квадратичный, законов аппроксимации для диаграмм растяжения и сжатия приводит к тому, что сначала возникает существенное отклонение от экспериментальной диаграммы, а в дальнейшем начинает расходиться итерационный процесс метода Ньютона. Этот факт объясняется тем, что при испытаниях на растяжение образцов полимерной матрицы вследствие ее хрупкости диапазон деформаций ограничен 2%, в то время как при расчете изгиба деформации в зоне растяжения достигают 4–5%.

Таким образом, при решении задачи изгиба используется экстраполированная в область больших деформаций диаграмма растяжения. Экстраполяции, полученные на основе полинома третьей степени и линейно-степенной функции, быстро достигают максимума, после чего начинают убывать, что не соответствует физике процесса. Аналогичный эффект наблюдается и при расчете изгиба углепластика, вырезанного вдоль направления укладки армирующего наполнителя.

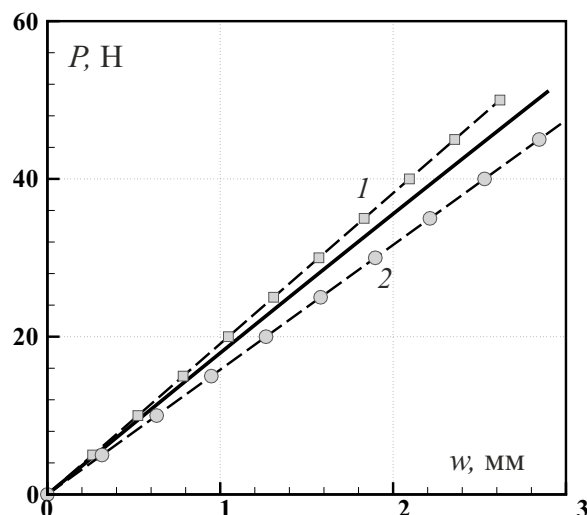


Рис. 14. Решение задачи трехточечного изгиба без учета разностойкости материала растяжению (кривая 1) и сжатию (кривая 2), сплошная кривая — результаты механических испытаний

Вариант расчета при использовании квадратичной аппроксимации и экстраполяции диаграмм растяжения и аппроксимации диаграмм сжатия на коротком (до 6%) участке качественно и количественно лучше всего описывает нелинейный характер изгиба образца полимерной матрицы ВСЭ-1212. В случае поперечно армированного углепластика все варианты аппроксимаций дают близкие к эксперименту результаты расчетов, хотя в эксперименте при максимальных нагрузках наилучшим вариантом остается расчет с использованием квадратичных аппроксимаций.

Рассмотрим эффект от учета разностойкости материала растяжению — сжатию. Выше было показано, что при растяжении углепластика ВКУ-28 имеем нелинейные диаграммы деформирования, а разница характеристик при растяжении и сжатии достигает 5–7% при продольном армировании и 12–15% при поперечном (см. табл. 5, 6). Для полимерной матрицы эта разница превышает 15% (см. табл. 3, 4). Если для определения модуля упругости углепластика использовать испытания на изгиб (ГОСТ 25.604), то имеющаяся “разномодульность” компенсируется и получается некоторая осредненная характеристика.

Рассмотрим влияние способа определения и задания механических характеристик материала при моделировании трехточечного изгиба балки из углепластика, вырезанного поперек направления укладки армирующего наполнителя. На рис. 14 представлены решения, полученные при использовании “равномодульной” линейной аппроксимации физических соотношений: кривая 1 — модуль получен из экспериментов на растяжение, 2 — на сжатие (табл. 6). Как видно, результаты расчетов без учета разностойкости на основе линейных характеристик материала отличаются от результатов механических испытаний (сплошная кривая) более чем на 15%.

Большинство реальных конструкций в обычных условиях эксплуатации подвержено сложному нагружению, при котором в конструкции есть и зоны растяжения, и зоны сжатия, и зоны изгиба, и их различные комбинации. Используя традиционные методики определения характеристик материалов и линейные модели деформирования (в частности, без учета разностойкости материала растяжению и сжатию) для расчета

конструкций из углепластиков, можно получить существенно искаженную картину деформаций и напряжений, и, как следствие, — недооценить или переоценить прочность и жесткость конструкции. Принимая во внимание то, что углепластики используются для изготовления конструкций ответственного назначения, при их расчете необходим учет разносопротивляемости растяжению — сжатию.

Заключение

В рамках проведенного исследования получены следующие результаты:

- разработана и реализована программа испытаний образцов полимерной матрицы ВСЭ-1212 и конструкционного углепластика ВКУ-28 при различных условиях нагружения;
- разработан удобный математический аппарат для обработки большого массива экспериментальных данных и устранения наиболее значимых артефактов испытаний;
- предложен ряд подходов к аппроксимации получаемых в экспериментах диаграмм деформирования материалов, один из которых основан на полиномиальном и кусочно-полиномиальном приближении методом наименьших квадратов, другой использует приближения без насыщения;
- проведен сравнительный анализ эффективности разработанных методов для получения аналитических приближений диаграмм деформирования полимеров и углепластиков при различных видах испытаний;
- построены математические модели нелинейного деформирования углепластиков и полимерных матриц при изгибе с учетом эффекта разносопротивляемости растяжению и сжатию.

Разработанные подходы и математические модели показали свою эффективность при численном решении задач трехточечного изгиба углепластиковых (ВКУ-28) и полимерной (ВСЭ-1212) балок, получено удовлетворительное согласование с результатами механических испытаний, показана необходимость учета нелинейных свойств полимерных матриц и углепластиков при расчете и проектировании реальных конструкций.

Благодарности. Авторы выражают глубокую признательность советнику генерального директора ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ академику Вячеславу Михайловичу Бузнику, инициировавшему проведение данного цикла исследований и оказавшему всестороннюю поддержку на всех этапах работы, выполненной при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-12032-офи_м).

Список литературы / References

- [1] **Ерасов В.С., Яковлев Н.О., Нужный Г.А.** Квалификационные испытания и исследование прочности авиационных материалов // *Авиационные материалы и технологии*. 2012. № 5. С. 440–448.
Erasov, V.S., Yakovlev, N.O., Nuzhnyy, G.A. Qualification Tests and the Study of Aviation Materials Strength // *Aviation Materials and Technologies*. 2012. No. 5. P. 440–448. (in Russ.)

- [2] **Ерасов В.С., Яковлев Н.О., Гладких А.В., Гончаров А.А., Скиба О.В., Боярских А.В., Подживотов Н.Ю.** Испытания крупногабаритных конструкций из полимерных композиционных материалов на силовом полу ГЦКИ “ВИАМ” им. Г.В. Акимова // Композитный мир. 2014. № 1. С. 72–78.
Erasov, V.S., Yakovlev, N.O., Gladkikh, A.V., Goncharov, A.A., Skiba, O.V., Boyarskih, A.V., Podgivotov, N.Y. Qualification tests of large polymer composite constructions on power floor FSUE “VIAM” im. G.V. Akimova // Kompozitnyy Mir. 2014. No. 1. P. 72–78. (in Russ.)
- [3] **Голушко С.К., Немировский Ю.В.** Прямые и обратные задачи механики композитных пластин и оболочек вращения. М.: Физматлит, 2008. 432 с.
Golushko, S.K., Nemirovskiy, Yu.V. Direct and inverse problems of mechanics of composite plates and shells. Moscow: Fizmatlit, 2008. (in Russ.)
- [4] **Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А., Ерасов В.С., Яковлев Н.О.** Моделирование и разработка трехслойных композиционных материалов с сотовым наполнителем // Вест. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2014. № 5(56). С. 66–81.
Dimitrienko, Yu.I., Fedonyuk, N.N., Gubareva, E.A., Sbornichikov, S.V., Prozorovskiy, A.A., Erasov, V.S., Yakovlev, N.O. Modeling and development of three-layer sandwich composite materials with honeycomb core // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Natural Sciences. 2014. No. 5(56). P. 66–81.
- [5] **Boyce, M.C., Arruda, E.M.** An experimental and analytical investigation of the large strain compressive and tensile response of glassy polymers // Polymer Engineering & Science. 2004. Vol. 30, iss. 20. P. 1288–1298. doi: 10.1002/pen.760302005.
- [6] **Одинокова О.А., Одинокоев А.В.** Термомеханические методы в технологии производства и проектировании изделий из пластмасс. РАН, 2008. 89 с. Адрес доступа: http://pnu.edu.ru/media/filer_public/2013/04/10/2-25_odinokova-odinokov.pdf (время доступа: 01 ноября 2015).
Odinokova, O.A., Odinokov, A.V. Thermo-mechanical methods in production technology and design of plastic products. Moscow: RAN, 2008. 89 p. Available at: http://pnu.edu.ru/media/filer_public/2013/04/10/2-25_odinokova-odinokov.pdf (date of visit: 01 nov. 2015). (in Russ.)
- [7] **Lagace, P.A.** Nonlinear stress-strain behavior of graphite/epoxy laminates // AIAA Journal. 1985. Vol. 23, No. 10. P. 1583–1589. doi: 10.2514/3.9127.
- [8] **Sendeckyj, G.P., Richardson, M.D., Pappas, J.E.** Fracture behavior of thornel 300/5208 graphite/epoxy laminate. Part I: Unnotched laminates // Composite Reliability. American Society for Testing and Materials. 1973. STP580. P. 528–546.
- [9] **Vasiliev, V.V., Morozov, E.V.** Advanced mechanics of composite materials. Amsterdam: Elsevier, 2007. 491 p.
- [10] **Тимошенко С.П.** Курс сопротивления материалов. М.; Л.: Гостехиздат. 1931. 571 с.
Timoshenko, S.P. Strength of materials. Part 1: Elementary theory and problems. New York: Van Nostrand, 1955. 442 p.
- [11] **Амбарцумян С.А.** Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 317 с.
Ambartsumyan, S.A. Theory of materials heteroresistant to tension and compression. Moscow: Nauka, 1982. 317 p. (in Russ.)
- [12] **Амбарцумян С.А.** Сопротивление материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Ереван: РАУ, 2004. 187 с.

- Ambartsumyan, S.A.** Strength of materials heteroresistant to tension and compression. Erevan: RAU. 2004, 187 p. (in Russ.)
- [13] **Амбарцумян С.А., Гнуни В.Ц.** Об изгибе нелинейно-упругой балки с учетом разносопротивляемости и разнопрочности материала к растяжению и сжатию // Докл. НАН РА. Механика. 2005. № 1. Адрес доступа: http://elib.sci.am/2005_1/07/07r.htm (время доступа: 01 ноября 2015).
- Ambartsumian, S.A., Gnuni, V.Ts.** The flexion of non-linear elastic beam taking into consideration the material resistance to the tension and compression in different ways // Reports of NAS RA. Mechanics. 2005. No. 1. Available at: http://elib.sci.am/2005_1/07/07r.htm (date of visit: 01 nov 2015). (in Russ.)
- [14] **Абрамов А.В., Березовская М.Е., Войкина О.В., Черенева А.С.** Обработка экспериментальных данных по определению механических свойств конструкционных материалов // Научный электронный журнал “Новости материаловедения. Наука и техника”. 2014. № 1. Адрес доступа: <http://www.materialsnews.ru/plugins/content/journal/uploads/articles/pdf/62.pdf>
- Abramov, A.V., Berezovskaya, M.E., Voikina, O.V., Chereneva, A.S.** The processing of experimental data for determination of mechanical properties of structural materials // Scientific and Technical Journal “News of material science & technology”. 2014. No. 1. Available at: <http://www.materialsnews.ru/plugins/content/journal/uploads/articles/pdf/62.pdf> (in Russ.)
- [15] **Адамов А.А.** Численная обработка экспериментальных данных, полученных с использованием современных испытательных машин, для идентификации реологических моделей // Вычисл. механика сплошных сред. 2013. Т. 6, № 2. С. 131–139.
- Adamov, A.A.** Primary processing of experimental data of modern testing machine for identification of rheological models // Computational Continuum Mechanics. 2013. Vol. 6, No. 2. P. 131–139. (in Russ.)
- [16] **Вареник К.А.** Аппроксимация диаграммы деформирования древесины // Вест. Новгород. гос. ун-та. Техн. науки. 2013. № 75(1). С. 60–64.
- Varenik, K.A.** Approximation of the wood deformation diagram // Vestnik NovSU. Engineering sciences. 2013. No. 75(1). P. 60–64. (in Russ.)
- [17] **Лоусон Ч., Хенсон Р.** Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986. 232 с.
- Lawson, C.L., Hanson, R.J.** Solving least squares problems. SIAM, 1995. 337 p.
- [18] **Бабенко К.И.** Основы численного анализа. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002. 847 с.
- Babenko, K.I.** Basics of numerical analysis. Moscow; Izhevsk: NITs “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika”, 2002. 847 p. (in Russ.)
- [19] **Семисалов Б.В.** Нелокальный алгоритм поиска решений уравнения Пуассона и его приложения // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2014. Т. 54, № 7. С. 1110–1135.
- Semisalov, B.V.** Non-local algorithm of finding solution to the Poisson equation and its applications // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 2014. Vol. 54, No. 7. P. 1110–1135. (in Russ.)
- [20] **Голушко С.К., Идимешев С.В., Семисалов Б.В.** Методы решения краевых задач механики композитных пластин и оболочек: Учеб. пособие. Новосибирск: КТИ ВТ СО РАН, 2014. 131 с.
- Golushko, S.K., Idimeshev, S.V., Semisalov, B.V.** Methods for solving boundary-value problems in mechanics of composite plates and shells: Uchebnoe posobie. Novosibirsk: KTI VT SO RAN, 2014. 131 p. (in Russ.)

- [21] **Горнов А.Ю.** Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009. 279 с.
Gornov, A.Y. Computing technology for solving optimal control problems. Novosibirsk: Nauka, 2009. 279 p. (in Russ.)
- [22] **Голушко С.К., Идимешев С.В., Шапеев В.П.** Разработка и применение метода коллокаций и наименьших невязок к задачам механики анизотропных слоистых пластин // Вычисл. технологии, 2014. Т. 19, № 5. С. 24–36.
Golushko, S.K., Idimeshev, S.V., Shapeev, V.P. Development and application of collocations and least residuals method to the solution of problems in mechanics of anisotropic laminated plates // Computational Technologies. 2014. Vol. 19. No. 5. P. 24–36. (in Russ.)

Поступила в редакцию 30 сентября 2015 г.

Nonlinear deformation of carbon fiber reinforced plastics: experiment, model, and simulation

AMELINA, EVGENIYA V.¹, GOLUSHKO, SERGEY K.^{1,2}, ERASOV, VLADIMIR S.³,
IDIMESHEV, SEMEN V.¹, NEMIROVSKI, YURII V.⁴, SEMISALOV, BORIS V.¹,
YURCHENKO, ANDREY V.², YAKOVLEV, NIKOLAY O.³,

¹Design and Technology Institute of Digital Techniques SB RAS, Novosibirsk, Russia

²Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

³All-Russian Scientific Research Institute of Aviation Materials, State Research Center of the Russian Federation, Moscow, Russia

⁴Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

*Corresponding author: Golushko, Sergey K., e-mail: golushkosk@kti.sbras.ru

The current study focuses on modeling of the nonlinear behavior for carbon fiber reinforced plastics (CFRP), which are one of the most promising classes of advanced composite materials.

A complete procedure of developing mathematical models for a nonlinear elastic flexural deformation of polymeric matrixes and CFRPs has been proposed and implemented. It takes into account the SD effect, i. e. the difference between the tensile and compression strengths.

The mathematical tools for the analysis and processing of big data sets containing the results of mechanical tests were offered. They also can be used to eliminate the most significant artifacts of these tests. The tools considered here are based on both qualitative and regression analysis using the method of least-squares and the methods without saturation.

Mathematical relations describing nonlinear elastic three-point bending of isotropic and reinforced beams with the SD effect were derived. An algorithm for numerical solution of the corresponding boundary value problem was proposed. A comparison of the results of computer simulations with experimental data obtained using mechanical testing has been done.

The developed approach and the constructed mathematical models have shown that they are efficient for the computer simulation of a three-point bending of CFRP and polymeric beams. Simulation results are in good agreement with the results of

mechanical testing. It has been established and it is shown that it is necessary to take into account the nonlinear properties and especially the SD effect of polymeric matrixes and CFRPs when simulating and designing the structures made from CFRP.

Keywords: composite, CFRP, polymeric matrix, bending, nonlinear deformation, SD effect, mechanical test, mathematical model.

Acknowledgements. The authors express their deep appreciation to Academician Vyacheslav M. Bouznic, the Advisor of the General Director of FSUE “VIAM” SRC RF, who has initiated these studies and has provided comprehensive support at all stages of this work. This research was partly supported by RFBR grant No. 13-01-12032.

Received 30 September 2015