

## Численное решение задачи о стационарном обтекании конуса реальным газом

А. М. Блохин<sup>1,2</sup>, Э. А. БИБЕРДОРФ<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет, Россия

<sup>2</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск Россия

\*Контактный e-mail: [biberdorf@ngs.ru](mailto:biberdorf@ngs.ru)

Подробно описан алгоритм для численного решения задачи об обтекании кругового конуса газом Ван-дер-Ваальса. Приведены некоторые результаты численных экспериментов.

*Ключевые слова:* круговой конус, газ Ван-дер-Ваальса, краевая задача, численный алгоритм.

### Введение

Известно [1–3], что модель газа Ван-дер-Ваальса достаточно хорошо описывает жидкое, газообразное и двухфазное состояния реального вещества. Здесь “двухфазное состояние” понимается в термодинамическом смысле: это состояние, в котором пар и жидкость находятся в равновесии (газообразная и жидкая фаза сосуществуют вместе). Термин “двухфазное состояние” следует отличать от “двухфазных течений”. Для последних жидкая и, например, твердая фазы описываются, как правило, различными уравнениями. В нашем случае система уравнений одна и та же для обеих фаз. Появление же областей двухфазных состояний происходит только за счет уравнения состояния Ван-дер-Ваальса.

Настоящая работа посвящена описанию численного алгоритма нахождения стационарных решений уравнений газовой динамики, описывающих течение газа Ван-дер-Ваальса около кругового конуса. Заметим, что задача об обтекании конуса равномерным потоком реального вещества имеет большое практическое значение для авиации и ракетной техники. Более подробно вопрос о практической значимости этой задачи обсуждается в [4, 5].

Следует отметить, что по сравнению с политропным газом для случая газа Ван-дер-Ваальса практическая реализация численного алгоритма нахождения стационарных течений сплошной среды около конуса значительно усложняется.

# 1. Обтекание кругового конуса сверхзвуковым потоком газа. Предварительные замечания

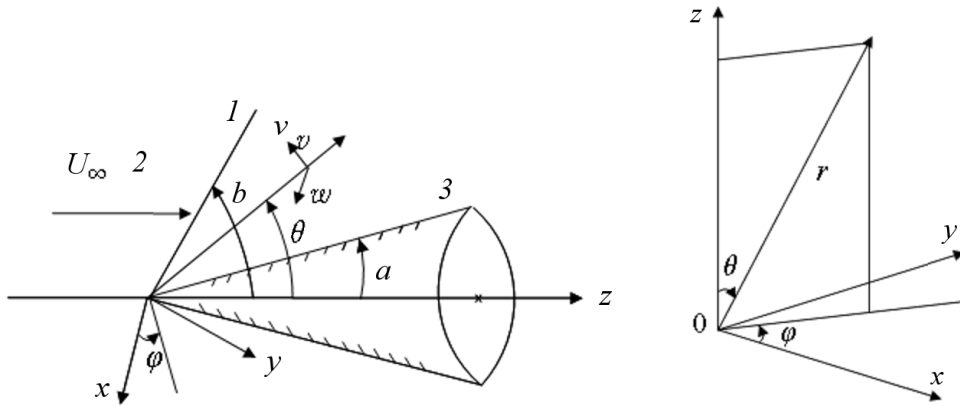
Как известно (см., например, [4, 5]), уравнения газовой динамики, записанные в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  (см. рисунок):

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + V \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{v^2 + w^2}{r} &= 0, \\ \frac{dv}{dt} + \frac{V}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{uv - w^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} &= 0, \\ \frac{dw}{dt} + \frac{V}{\sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{wR}{r} &= 0, \\ \frac{dp}{dt} + \rho c^2 \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(v \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right\} &= 0, \\ \frac{dS}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

имеют точное решение, которое соответствует стационарному обтеканию бесконечного кругового конуса равномерным потоком газа. Здесь  $u, v, w$  — компоненты вектора скорости газа в сферической системе координат;  $t$  — время,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность газа;  $V = \frac{1}{\rho}$  — удельный объем,  $S$  — энтропия;  $p = f(\rho, S)$  — уравнение состояния газа;  $c^2 = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho, S) > 0$  — квадрат скорости звука [6];  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{w}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ ;  $R = u + v \operatorname{ctg} \theta$ .

Структура этого решения такова. При  $0 < a < \theta < b < \pi/2$  ( $\theta = a$  — уравнение поверхности конуса,  $\theta = b$  — уравнение фронта ударной волны)

$$\begin{aligned} u &= \hat{u}(\theta), \quad v = \hat{v}(\theta), \quad w \equiv 0, \\ p &= \hat{p}(\theta), \quad S = \hat{S} = \operatorname{const}, \\ \hat{p} &= f(\hat{\rho}, \hat{S}), \quad c^2 = \hat{c}^2 = \frac{\partial f}{\partial \hat{\rho}}(\hat{\rho}, \hat{S}), \quad \hat{V} = \frac{1}{\hat{\rho}}, \end{aligned}$$



Обтекание конуса равномерным потоком вещества:  
1 — ударная волна, 2 — набегающий поток, 3 — круговой конус

причем в силу (1) функции  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{p}$ ,  $\hat{V}$  удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений [4]:

$$\begin{aligned}\hat{u}'(\theta) &= \hat{v}(\theta), \\ \hat{v}'(\theta) + \hat{u}(\theta) &= \frac{\hat{R}(\theta)}{M_\theta^2(\theta) - 1}, \\ \hat{p}'(\theta) &= -\hat{\rho}(\theta)\hat{v}(\theta)\frac{\hat{R}(\theta)}{M_\theta^2(\theta) - 1}, \\ \hat{V}'(\theta) &= \frac{\hat{\rho}(\theta)\hat{v}(\theta)}{\hat{c}^2(\theta)}\frac{\hat{R}(\theta)}{M_\theta^2(\theta) - 1},\end{aligned}\quad (2)$$

где

$$M_\theta^2(\theta) = \frac{\hat{v}^2(\theta)}{\hat{c}^2(\theta)}, \quad \hat{R} = \hat{u} + \hat{v}\operatorname{ctg}\theta.$$

На твердой поверхности конуса ( $\theta = a$ ) выполняется условие непротекания

$$\hat{v}(a) = 0, \quad (3)$$

а при  $\theta = b$  выполняются условия Рэнкина — Гюгонио [4, 5] на фронте ударной волны

$$\begin{aligned}\hat{u}(b) &= U_\infty \cos b, \\ [\hat{v}(b) + U_\infty \sin b]^2 + (\hat{p}(b) - \hat{p}_\infty)(\hat{V}(b) - \hat{V}_\infty) &= 0, \\ E(\hat{V}(b), \hat{p}(b)) - E(V_\infty, p_\infty) + (\hat{V}(b) - \hat{V}_\infty)\frac{\hat{p}(b) + \hat{p}_\infty}{2} &= 0 \quad \text{— адиабата Гюгонио,} \\ \hat{\rho}(b)\hat{v}(b) &= -\hat{\rho}_\infty U_\infty \sin b = -j, \quad j > 0 \quad \text{— поток газа через разрыв,}\end{aligned}\quad (4)$$

при этом

$$\begin{aligned}U_\infty \sin b &> \hat{c}_\infty, \\ \hat{S} &> S_\infty, \quad \hat{p}(b) > \hat{p}_\infty, \quad \hat{\rho}(b) > \hat{\rho}_\infty, \quad \hat{V}(b) < \hat{V}_\infty.\end{aligned}$$

Здесь  $\hat{p}_\infty$  — давление в набегающем потоке (знак  $\infty$  здесь и далее означает параметры набегающего потока),  $\hat{p}_\infty = f(\hat{\rho}_\infty, \hat{S}_\infty)$ ,  $\hat{V}_\infty = \frac{1}{\hat{\rho}_\infty}$ ,  $\hat{c}_\infty^2 = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\hat{\rho}_\infty, \hat{S}_\infty)$  — квадрат скорости звука в набегающем потоке газа.

**Замечание 1.** В качестве замыкающих соотношений используются уравнения состояния газа [6]

$$p = f(\rho, S), \quad e = E(V, p), \quad (5)$$

где  $e$  — внутренняя энергия газа, а также первый закон термодинамики [6, 7]

$$TdS = de + pdV, \quad (6)$$

где  $T$  — температура газа. Если  $p = p(V, T)$ ,  $e = e(V, T)$ ,  $S = S(V, T)$ , то из условия интегрируемости соотношения (6) мы приходим к ограничению

$$\frac{\partial e}{\partial V} = T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{p}{T} \right). \quad (7)$$

Кроме того,

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{c_V}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial e}{\partial V} + p \right), \quad (8)$$

где  $c_V = \frac{\partial e}{\partial T}$  — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

**Замечание 2.** Вместо функций  $\hat{u}(\theta), \hat{v}(\theta), \hat{p}(\theta), \hat{V}(\theta)$  рассмотрим их безразмерные аналоги  $\hat{u}(\theta)/U_\infty, \hat{v}(\theta)/U_\infty, \hat{p}(\theta)/\hat{p}_\infty, \hat{V}(\theta)/\hat{V}_\infty$ , обозначать которые далее будем по-старому. Кроме того, в системе (1) сделаем замену независимой переменной  $\theta$ :

$$s = \theta - a, \quad 0 \leq s \leq \delta, \quad \delta = b - a.$$

Агрегат  $M_\theta^2$  удобно преобразовать следующим образом:

$$M_\theta^2 = \hat{v}^2(s) \frac{U_\infty^2}{\hat{c}^2(s)} = \hat{v}^2(s) M_\infty^2 \frac{\hat{c}_\infty^2}{\hat{c}^2(s)}, \quad (9)$$

где  $M_\infty^2 = \frac{U_\infty^2}{\hat{c}_\infty^2}$  — квадрат числа Маха в набегающем потоке.

После дополнительной замены

$$\hat{u}(s) = \tilde{u}(s) + \cos(s + a), \quad \hat{v}(s) = \tilde{v}(s) - \sin(s + a) \quad (10)$$

система (1) примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}'(s) &= \tilde{v}(s), \quad \tilde{v}'(s) + \tilde{u}(s) = \frac{\tilde{R}(s)}{M_\theta^2 - 1}, \\ \hat{V}(s) \hat{p}'(s) &= -\hat{v}(s) \frac{U_\infty^2}{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty} \frac{\tilde{R}(s)}{M_\theta^2 - 1}, \quad \hat{V}'(s) = \frac{\hat{V}(s) \hat{v}(s) U_\infty^2}{\hat{c}^2(s)} \frac{\tilde{R}(s)}{M_\theta^2 - 1}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\tilde{R}(s) = \tilde{u}(s) + \tilde{v}(s) \operatorname{ctg}(s + a),$$

а краевое условие (3) и часть краевых условий (1) изменятся так:

$$\tilde{v}(0) = \sin(a), \quad \tilde{u}(\delta) = 0, \quad (12)$$

$$\hat{p}(\delta) = 1 + \tilde{M}_\infty^2 \sin^2(b)k, \quad \tilde{M}_\infty^2 = \frac{M_\infty^2 \hat{c}_\infty^2}{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty},$$

$$\hat{V}(\delta) = 1 - k, \quad k = \frac{\tilde{v}(\delta)}{\sin(b)} \quad (0 < k < 1). \quad (13)$$

Следуя [1, 2, 8], рассмотрим газ Ван-дер-Ваальса, характеризующийся уравнением состояния:

$$p = \frac{RT}{V - V_0} - \frac{A}{V^2}, \quad V > V_0. \quad (14)$$

Здесь  $R$  — газовая постоянная,  $V_0, A > 0$  — некоторые постоянные.

Из (7), (14) следует представление для внутренней энергии

$$e(V, T) = F(T) - \frac{A}{V}. \quad (15)$$

**Замечание 3.** Обратим внимание, что при этом функция  $E(V, p)$  (см. (5)) находится по формуле

$$E(V, p) = F\left((V - V_0)\frac{p + A/V^2}{R}\right) - \frac{A}{V}. \quad (16)$$

Из (8), (14), (15) получаем выражение для энтропии

$$S = R \ln(V - V_0) + \int_{T_0}^T \frac{F'(\xi)}{\xi} d\xi + \tilde{S}_0, \quad (17)$$

где  $F(T)$  — некоторая функция,  $T_0 > 0$ ,  $\tilde{S}_0$  — некоторые постоянные. Функция  $f$  (см. (5)) определяется из соотношений (14), (17) исключением температуры  $T$ . Из этих же представлений могут быть последовательно получены производные при постоянной энтропии  $S$ :

$$f_V = \frac{\partial f}{\partial V} = \frac{RT_V}{V - V_0} + \frac{2A}{V^3} - \frac{RT}{(V - V_0)^2}, \quad T_V = \frac{\partial T}{\partial V} = -\frac{RT}{(V - V_0)c_V}, \quad (18)$$

где  $c_V = F'(T)$ , т. е. формула для квадрата скорости звука имеет вид (см. [6, 7])

$$c^2 = f_\rho = -V^2 f_V = \frac{pV^2 + A}{V - V_0} \left(1 + \frac{R}{c_V}\right) - \frac{2A}{V}. \quad (19)$$

Выражение (16) позволяет преобразовать адиабату Гюгонио (1) для газа Ван-дер-Ваальса следующим образом:

$$F\left((V - V_0)\frac{p + A/V^2}{R}\right) + \frac{A}{\hat{V}_\infty} \left(1 - \frac{\hat{V}_\infty}{V}\right) - F\left((\hat{V}_\infty - V_0)\frac{\hat{p}_\infty + A/\hat{V}_\infty^2}{R}\right) + (V - \hat{V}_\infty)\frac{p + \hat{p}_\infty}{2} = 0, \quad (20)$$

т. е.

$$V = W(p; \hat{p}_\infty, \hat{V}_\infty, V_0, A). \quad (21)$$

Из (1) находим

$$\begin{aligned} & \frac{dW}{dp}(p; \hat{p}_\infty, \hat{V}_\infty, V_0, A) = \\ & = -\frac{(\hat{V} - \hat{V}_\infty)/2 + c_V(\hat{T})(\hat{V} - V_0)/R}{(\hat{p} + \hat{p}_\infty)/2 + c_V(\hat{T})(\hat{p} - 2A(\hat{V} - V_0)/\hat{V}^3)/R + A(1 + c_V(\hat{T})/R)/\hat{V}^2}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\hat{T} = (\hat{V} - V_0)(\hat{p} + A/\hat{V}^2)/R$ .

**Замечание 4.** С учетом (1) и замечания 2 третье краевое условие (1) приводится к виду

$$\frac{F\left(\frac{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \Lambda\right) - F\left(\frac{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \Lambda_\infty\right)}{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty} - \frac{\alpha k}{1-k} - k \frac{\hat{p}(\delta) + 1}{2} = 0. \quad (23)$$

Здесь (см. также [9–11])

$$\begin{aligned} \Lambda_\infty &= (1 - \beta)(1 + \alpha), \quad \alpha = \frac{A}{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty^2}, \quad \beta = \frac{V_0}{\hat{V}_\infty}, \quad 0 < \beta < 1, \\ \Lambda &= (1 - \beta - k) \left( \hat{p}(\delta) + \frac{\alpha}{(1-k)^2} \right), \quad 0 < k < 1 - \beta, \\ \hat{c}_\infty^2 &= \hat{p}_\infty \hat{V}_\infty \left( \gamma_\infty \frac{1 + \alpha}{1 - \beta} - 2\alpha \right) \quad (\text{см. (19)}), \\ \tilde{M}_\infty^2 &= M_\infty^2 \left( \gamma_\infty \frac{1 + \alpha}{1 - \beta} - 2\alpha \right), \\ \gamma_\infty &= 1 + R/c_V(\hat{T}_\infty), \quad \hat{T}_\infty = \frac{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \Lambda_\infty. \end{aligned} \quad (24)$$

**Замечание 5.** Условие  $\hat{c}_\infty^2 > 0$  (см. (1)) влечет следующие ограничения на параметры  $\gamma_\infty$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ :

- 1)  $\gamma_\infty \geq 2$ ,  $0 < \beta < 1$ ,  $0 < \alpha$ ;
- 2)  $1 < \gamma_\infty < 2$ ,  $0 < \beta < 1 - \frac{\gamma_\infty}{2}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\gamma_\infty}{2(1-\beta) - \gamma_\infty}$ ;
- 3)  $1 < \gamma_\infty < 2$ ,  $1 - \frac{\gamma_\infty}{2} < \beta < 1$ ,  $0 < \alpha$ .

**Замечание 6.** Следуя [1, 2], введем так называемые критические параметры для газа Ван-дер-Ваальса:

$$p_c = \frac{1}{27} \frac{A}{V_0^2}, \quad V_c = 3V_0, \quad T_c = \frac{8}{27} \frac{A}{RV_0}.$$

Тогда неравенства

$$\hat{T}_\infty \leq T_c, \quad \hat{T} \leq T_c, \quad \hat{T} = \frac{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \Lambda,$$

сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} 1) \quad 0 < \alpha &\leq \frac{\beta(1-\beta)}{\frac{8}{27} - \beta(1-\beta)} \quad (\hat{T}_\infty \geq T_c), \quad 0 < \beta < 1; \\ 2) \quad \alpha > \frac{\beta(1-\beta)}{\frac{8}{27} - \beta(1-\beta)} \quad (\hat{T}_\infty < T_c), \quad 0 < \beta < 1; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\Lambda \leq \frac{8}{27} \frac{\alpha}{\beta} \quad (\hat{T} \leq T_c). \quad (26)$$

Обращаясь вновь к [1, 2], напомним, что параметр  $T_c$  характеризует собой ту изотерму, выше которой газ Ван-дер-Ваальса не переходит в жидкость.

**Замечание 7.** С учетом (19), а также замечаний 2 и 4 имеем:

$$\begin{aligned} \widehat{c}^2(s) &= \widehat{p}_\infty \widehat{V}_\infty C(s), \\ C(s) &= \frac{\widehat{p}(s) \widehat{V}^2(s) + \alpha}{\widehat{V}(s) - \beta} \left( 1 + \frac{R}{c_V(\widehat{T}(s))} \right) - \frac{2\alpha}{\widehat{V}(s)}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\widehat{T}(s) = \frac{\widehat{p}_\infty \widehat{V}_\infty}{R} \widehat{\Lambda}(s), \quad \widehat{\Lambda}(s) = (\widehat{V}(s) - \beta)(\widehat{p}(s) + \alpha/\widehat{V}^2(s)), \quad \widehat{\Lambda}(\delta) = \Lambda.$$

Принимая во внимание (1), перепишем формулу (9):

$$M_\theta^2(s) = \widetilde{M}_\infty^2 \widehat{v}^2(s)/C(s). \quad (28)$$

Кроме того,

$$\frac{U_\infty^2}{\widehat{p}_\infty \widehat{V}_\infty} = \widetilde{M}_\infty^2, \quad \frac{U_\infty^2}{\widehat{c}^2(s)} = \widetilde{M}_\infty^2/C(s) \quad (\text{см. (1)}). \quad (29)$$

**Замечание 8.** В дальнейшем нам предстоит проверка реализуемости условий абсолютной или нейтральной устойчивости ударных волн (см. [8, 9]) в задаче об обтекании конуса газом Ван-дер-Ваальса. В терминах агрегата

$$\begin{aligned} \Delta &= j^2 \frac{dW}{dp}(\widehat{p}; \widehat{p}_\infty, \widehat{V}_\infty, V_0, A) = \\ &= \widetilde{M}_\infty^2 \sin^2(b) \frac{\frac{k}{2} - c_V(\widehat{T}) \frac{1 - \beta - k}{R}}{\frac{\widehat{p}(\delta) + 1}{2} + c_V(\widehat{T}) \frac{\widehat{p}(\delta) - 2\alpha(1 - \beta - k)/(1 - k)^3}{R} + \alpha \frac{1 + c_V(\widehat{T})/R}{(1 - k)^2}} \end{aligned} \quad (30)$$

головная ударная волна, например, нейтрально устойчива, если

$$\frac{1 - M_\theta^2(\delta)(2 - k)/(1 - k)}{1 + M_\theta^2(\delta)k/(1 - k)} < \Delta < 1 + 2|M_{\theta(\delta)}|. \quad (31)$$

Формула (30) получена с помощью (22). Кроме того,

$$\begin{aligned} M_\theta^2(\delta) &= \widetilde{M}_\infty^2 \widehat{v}^2(\delta)/C(\delta) \quad (\text{см. (28)}), \\ C(\delta) &= \frac{\widehat{p}(\delta)(1 - k)^2 + \alpha}{1 - \beta - k} \left( 1 + \frac{R}{c_V(\widehat{T})} \right) - \frac{2\alpha}{1 - k} \quad (\text{см. (27)}), \\ \widehat{v}(\delta) &= \sin(b)(k - 1) \quad (\text{см. (10), (4)}), \\ \widehat{T} &= \frac{\widehat{p}_\infty \widehat{V}_\infty}{R} \Lambda \quad (\text{см. замечание 6}). \end{aligned}$$

Следуя [8], положим

$$F(T) = c_V^* T(1 + A_1 T/2), \quad (32)$$

где  $c_V^*$ ,  $A > 0$  — некоторые размерные параметры. Тогда [9–11]

$$\begin{aligned} \frac{c_V(\widehat{T}(s))}{R} &= \frac{1}{\gamma^* - 1} (1 + \alpha_1 \widehat{\Lambda}(s)), \quad \gamma^* - 1 = \frac{R}{c_V^*}, \\ \alpha_1 &= \frac{d - 1}{(1 - \beta)(1 + \alpha)}, \quad d = \frac{\gamma^* - 1}{\gamma_\infty - 1}, \quad \gamma^* > \gamma_\infty > 1, \\ \frac{c_V(\widehat{T})}{R} &= \frac{1}{\gamma^* - 1} (1 + \alpha_1 \Lambda), \\ \frac{F(\widehat{T}) - F(\widehat{T}_\infty)}{\widehat{p}_\infty \widehat{V}_\infty} &= \frac{\Lambda(1 + \alpha_1 \Lambda/2) - (1 - \beta)(1 + \alpha)(1 + \alpha_1(1 - \beta)(1 + \alpha)/2)}{\gamma^* - 1}. \end{aligned} \quad (33)$$

С учетом формул (17), (32) для скачка энтропии на ударной волне получаем следующее выражение [9–11]:

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{S} - \widehat{S}_\infty}{R} &= Q(a, b) = \\ &= \ln \left( \frac{1 - \beta - k}{1 - \beta} \right) + \frac{\ln(\Lambda/(1 - \beta)(1 + \alpha))}{\gamma^* - 1} + \frac{\alpha_1(\Lambda - (1 - \beta)(1 + \alpha))}{\gamma^* - 1}. \end{aligned} \quad (34)$$

**Замечание 9.** Сопоставляя неравенства из замечания 5 и неравенства (25), получаем область задания параметров  $\gamma_\infty, \gamma^*, \alpha, \beta$ :

I)  $\gamma_\infty \geq 2$ ,  $0 < \beta < 1$ ,  $\alpha > 0$  ( $\widehat{c}_\infty^2 > 0$ ),  $\gamma^* > \gamma_\infty$ , при этом

$$0 < \alpha \leq \frac{\beta(1 - \beta)}{\frac{8}{27} - \beta(1 - \beta)} \quad (\widehat{T}_\infty \geq T_c), \quad \alpha > \frac{\beta(1 - \beta)}{\frac{8}{27} - \beta(1 - \beta)} \quad (\widehat{T}_\infty < T_c);$$

II)  $1 < \gamma_\infty < 2$ ,  $1 - \frac{\gamma_\infty}{2} \leq \beta < 1$ ,  $\alpha > 0$  ( $\widehat{c}_\infty^2 > 0$ ),  $\gamma^* > \gamma_\infty$ , при этом

$$0 < \alpha \leq \frac{\beta(1 - \beta)}{\frac{8}{27} - \beta(1 - \beta)} \quad (\widehat{T}_\infty \geq T_c), \quad \alpha > \frac{\beta(1 - \beta)}{\frac{8}{27} - \beta(1 - \beta)} \quad (\widehat{T}_\infty < T_c);$$

III)  $1 < \gamma_\infty < 2$ ,  $0 < \beta < 1 - \frac{\gamma_\infty}{2}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\gamma_\infty}{2(1 - \beta) - \gamma_\infty}$  ( $\widehat{c}_\infty^2 > 0$ ),  $\gamma^* > \gamma_\infty$ , при этом

$$\begin{aligned} 0 < \alpha &\leq \frac{\beta(1 - \beta)}{\frac{8}{27} - \beta(1 - \beta)} \quad (\widehat{T}_\infty \geq T_c), \\ \frac{\beta(1 - \beta)}{\frac{8}{27} - \beta(1 - \beta)} &< \alpha < \frac{\gamma_\infty}{2(1 - \beta) - \gamma_\infty} \quad (\widehat{T}_\infty < T_c). \end{aligned}$$

**Замечание 10.** Для проведения численных расчетов удобно преобразовать уравнения системы (1). В терминах новых функций

$$\begin{aligned} W(s) &= \sin(s + a)\tilde{u}(s) + \cos(s + a)\tilde{v}(s), \\ U(s) &= \cos(s + a)\tilde{u}(s) - \sin(s + a)\tilde{v}(s) \end{aligned} \quad (35)$$



первые два уравнения системы (1) принимают следующий вид (см. (27), (28), (29)):

$$W'(s) = \frac{\text{ctg}(s+a)}{M_\theta^2 - 1} W(s), \quad 0 < s < \delta, \quad W(\delta) = \cos(b) \sin(b)k, \quad (36)$$

$$U'(s) + \text{tg}(s+a)W'(s) = 0, \quad 0 < s < \delta. \quad (37)$$

При этом из равенств (10) и (35) следует

$$\begin{aligned} U(s) &= -\text{tg}(s+a)W(s) + \frac{\tilde{u}(s)}{\cos(s+a)}, \\ \hat{v}(s) &= \tilde{v}(s) - \sin(s+a), \\ \tilde{v}(s) &= \frac{W(s)}{\cos(s+a)} - \text{tg}(s+a)\tilde{u}(s). \end{aligned} \quad (38)$$

Интегрируя равенства (36), (37), получаем

$$W(s) = W(l) \exp \left\{ \int_s^l \frac{\text{ctg}(\tau+a)}{1 - M_\theta^2(\tau)} d\tau \right\}, \quad 0 < s, \quad l < \delta, \quad (39)$$

$$\tilde{u}(s) = \frac{\cos(s+a)}{\cos(l+a)} \tilde{u}(l) - \cos(s+a) \int_s^l \frac{W(\tau)}{\cos^2(\tau+a)} d\tau, \quad 0 < s, \quad l < \delta. \quad (40)$$

Третье уравнение системы (1) можно переписать как (см. (13), (29))

$$\begin{aligned} \hat{p}'(s) &= -\tilde{M}_\infty^2 \hat{\rho}(s) \left\{ \frac{\tilde{u}^2(s) + \tilde{v}^2(s)}{2} + U(s) \right\}', \quad 0 < s < \delta, \\ \hat{p}(\delta) &= 1 + \tilde{M}_\infty^2 \sin^2(b)k. \end{aligned} \quad (41)$$

Наконец, четвертое уравнение системы (1) удобно представить в виде

$$\hat{\rho}'(s) = \frac{\hat{p}'(s)}{C(s)}, \quad 0 < s < \delta, \quad \hat{\rho}(\delta) = \frac{1}{1-k}. \quad (42)$$

## 2. Краткое описание вычислительного алгоритма.

### Некоторые результаты численных расчетов

Опишем последовательность операций, необходимых для численного анализа стационарных решений задачи об обтекании конуса газом Ван-дер-Ваальса.

Алгоритм позволяет определить, является ли заданный угол  $b$  углом наклона ударной волны, и, если является, то вычислить характеристики течения за ударной волной. Если угол  $b$  не является углом наклона ударной волны с необходимой точностью, то для его уточнения можно применить, например, метод бисекций.

1. Задаем угол полураствора конуса  $a$ , предполагаемый угол ударной волны  $b$ , угол  $\delta = b - a$ , параметры набегающего потока:  $M_\infty > 1$ ,  $\alpha, \beta, \gamma^*, \gamma_\infty$ , параметры дискретизации  $N, h$ :  $Nh = \delta$ , число итераций по нелинейности  $K$ .

2. Вводим сеточные функции:

$$\begin{aligned} W(s) &= W(ih) = W_i, \quad \tilde{u}(s) = \tilde{u}_i, \quad \tilde{v}(s) = \tilde{v}_i, \\ \hat{p}(s) &= \hat{p}_i, \quad \hat{\rho}(s) = \hat{\rho}_i, \quad \hat{V}(s) = \hat{V}_i \quad \text{и т. д.,} \quad i = \overline{0, N}. \end{aligned}$$

3. Находим нули функции  $Q(k)$  (см. (23), (33)):

$$\begin{aligned} Q(k) &= \Lambda \left( 1 + \frac{\alpha_1}{2} \Lambda \right) - (1 - \beta)(1 + \alpha) \left( 1 + \frac{\alpha_1}{2} (1 - \beta)(1 + \alpha) \right) - \\ &\quad - (\gamma^* - 1)k \left( \frac{\alpha}{1 - k} + \frac{\hat{p}(\delta) + 1}{2} \right), \end{aligned} \quad (43)$$

где (см. раздел 1):

$$\begin{aligned} \Lambda &= (1 - \beta - k)(\hat{p}(\delta) + \alpha/(1 - k)^2), \quad \hat{p}(\delta) = 1 + \tilde{M}_\infty^2 \sin^2(b)k, \\ \tilde{M}_\infty^2 &= M_\infty^2 \left( \gamma_\infty \frac{1 + \alpha}{1 - \beta} - 2\alpha \right). \end{aligned}$$

При этом  $0 < k < 1 - \beta$ ,  $0 < \beta < 1$ .

4. Присваиваем значения неизвестных функций на границе  $s = \delta$ :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_N &= 1/(1 - k), \quad \hat{V} = 1 - k, \\ \hat{p}_N &= 1 + \tilde{M}_\infty^2 \sin^2(b)^2 k, \\ W_N &= \cos(b) \sin(b)k, \\ \hat{v}_N &= \sin(b)(k - 1), \\ \tilde{u}_N &= 0, \quad \tilde{v}_N = \frac{W_N}{\cos(\delta)}, \\ U_N &= -\text{tg}(\delta)W_N, \\ \hat{\Lambda}_N &= (1 - \beta - k) \left( \hat{p}_N + \frac{\alpha}{(1 - k)^2} \right), \\ C_N &= \frac{\hat{p}_N(1 - k)^2 + \alpha}{1 - \beta - k} \left( 1 + \frac{\gamma^* - 1}{1 + \alpha_1 \hat{\Lambda}_N} \right) - 2 \frac{\alpha}{1 - k}, \\ (M_\theta^2)_N &= \frac{\tilde{M}_\infty^2 \hat{v}_N^2}{C_N}. \end{aligned}$$

5. Для  $i = \overline{N, 1}$  присваиваем значения сеточным функциям по правилу

$$(\cdot)_{i-1}^{(0)} = (\cdot)_i.$$

Далее осуществляем итерации при  $n = \overline{0, K - 1}$ , основанные на формулах (39)–(42):

$$W_{i-1}^{(n+1)} = W_i \exp \left\{ \frac{h}{2} \left[ \frac{\text{ctg}(a + ih)}{1 - M_\theta^2(ih)} + \frac{\text{ctg}(a + (i - 1)h)}{1 - M_\theta^2((i - 1)h)} \right] \right\}, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i-1}^{(n+1)} &= \frac{\cos(a + (i-1)h)}{\cos(a + ih)} \tilde{u}_i - \\ &- \cos(a + (i-1)h) \frac{h}{2} \left[ \frac{W_i}{\cos^2(a + ih)} + \frac{W_{i-1}^{(n+1)}}{\cos^2(a + (i-1)h)} \right], \end{aligned} \quad (45)$$

$$\hat{p}_i - \hat{p}_{i-1}^{(n+1)} = -\frac{\hat{\rho}_i + \hat{\rho}_{i-1}^{(n+1)}}{2} \left[ \frac{\tilde{u}_i^2 + \tilde{v}_i^2}{2} + U_i - \frac{(\tilde{u}_{i-1}^{(n+1)})^2 + (\tilde{v}_{i-1}^{(n+1)})^2}{2} - U_{i-1}^{(n+1)} \right] \tilde{M}_\infty^2, \quad (46)$$

$$\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i-1}^{(n+1)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{c_i} + \frac{1}{c_{i-1}^{(n)}} \right] (\hat{p}_i - \hat{p}_{i-1}^{(n+1)}), \quad (47)$$

а также

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_{i-1}^{(n+1)} &= \hat{V}_{i-1}^{(n)} (1 - \beta \hat{\rho}_{i-1}^{(n)}) (\hat{p}_{i-1}^{(n)} + \alpha \hat{\rho}_{i-1}^{(n)}), \\ C_{i-1}^{(n+1)} &= \hat{V}_{i-1}^{(n)} \frac{\hat{p}_{i-1}^{(n)} + \alpha (\hat{\rho}_{i-1}^{(n)})^2}{1 - \beta \hat{\rho}_{i-1}^{(n)}} \left( 1 + \frac{\gamma^* - 1}{1 + \alpha_1 \hat{\Lambda}_{i-1}^{(n)}} \right) - 2\alpha \hat{\rho}_{i-1}^{(n)}. \end{aligned}$$

В последних двух формулах можно использовать текущие итерационные значения  $\hat{p}_{i-1}^{(n+1)}$ ,  $\hat{\rho}_{i-1}^{(n+1)}$ ,  $\hat{\Lambda}_{i-1}^{(n+1)}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_{i-1}^{(n+1)} &= \hat{V}_{i-1}^{(n)} (1 - \beta \hat{\rho}_{i-1}^{(n+1)}) (\hat{p}_{i-1}^{(n+1)} + \alpha \hat{\rho}_{i-1}^{(n+1)}), \\ C_{i-1}^{(n+1)} &= \hat{V}_{i-1}^{(n)} \frac{\hat{p}_{i-1}^{(n+1)} + \alpha (\hat{\rho}_{i-1}^{(n+1)})^2}{1 - \beta \hat{\rho}_{i-1}^{(n+1)}} \left( 1 + \frac{\gamma^* - 1}{1 + \alpha_1 \hat{\Lambda}_{i-1}^{(n+1)}} \right) - 2\alpha \hat{\rho}_{i-1}^{(n+1)}. \end{aligned}$$

Присваиваем итоговые значения сеточным функциям:

$$(\cdot)_{i-1} = (\cdot)_{i-1}^{(K)}.$$

6. Вычислив сеточные функции при  $i = 0$ , проверяем выполнение краевого условия (см. раздел 1):

$$\tilde{v}_0 - \sin(a) = 0. \quad (48)$$

При невыполнении условия (48) вычислительный процесс начинается снова с переопределения параметров (первый шаг алгоритма). Если краевое условие (48) выполняется с определенной точностью, то для проверки условий абсолютной или нейтральной устойчивости (см. раздел 1 и [9–11]) вычисляется агрегат

$$\mathcal{N} = \Delta - \frac{1 - M_\theta^2(\delta)(2 - k)/(1 - k)}{1 + M_\theta^2(\delta)k/(1 - k)}, \quad \mathcal{F} = 1 + 2 |M_\theta(\delta)| - \Delta,$$

где величина  $\Delta$  вычисляется по формуле (1). В таком случае головная ударная волна для газа Ван-дер-Ваальса, присоединенная к конусу, абсолютно устойчива, если

$$\Delta + 1 > 0, \quad \mathcal{N} < 0; \quad (49)$$

ударная волна нейтрально устойчива, если

$$\mathcal{N} > 0, \quad \mathcal{F} > 0. \quad (50)$$

Кроме того, вычисляем величины

$$\begin{aligned}\tilde{M}_\infty^2 \frac{(\tilde{u}(0) + \cos(a))^2}{C(0)} &= M_r^2(0) = M^2(0), \\ \tilde{M}_\infty^2 \frac{\cos^2(b) + \sin^2(b)(1-k)^2}{C(\delta)} &= M^2(\delta).\end{aligned}\quad (51)$$

Здесь  $M(\delta)$  — число Маха после ударной волны,  $M(0)$  — число Маха на конусе.

**Замечание 11.** Для контроля за точностью численных расчетов будем вычислять на каждом шаге выражение

$$Q(a, b, s) = \ln \left( \frac{\widehat{V}(s) - \beta}{1 - \beta} \right) + \frac{1}{\gamma^* - 1} \left\{ \ln \left( \frac{\widehat{\Lambda}(s)}{(1 - \beta)(1 + \alpha)} \right) + \alpha_1 \left( \widehat{\Lambda}(s) - (1 - \beta)(1 + \alpha) \right) \right\},$$

которое должно равняться постоянной  $Q(a, b, s) \equiv Q(a, b)$  (см. (34)). Также будем вычислять величину (см. (26), (27))

$$\chi(a, b, s) = \widehat{\Lambda}(s) - \frac{8}{27} \frac{\alpha}{\beta}.$$

Программная реализация описанного численного алгоритма позволила произвести расчеты для самых различных значений  $\alpha, \beta, \gamma_\infty, \gamma^*$ , принадлежащих областям I–III. Как и для политропного газа (см. [4, 5]), в основном реализуется ситуация, когда мы

Т а б л и ц а 1. Область I

№ 1	$M_\infty = 1.5, a = 3^\circ, \alpha = 5,$ $\beta = 0.7, \gamma_\infty = 2, \gamma^* = 2.2$		№ 2	$M_\infty = 1.5, a = 3^\circ, \alpha = 4,$ $\beta = 1/3, \gamma_\infty = 1.8, \gamma^* = 1.9$	
$\tilde{T}_\infty < T_c$	$b = 43.0645^\circ$	$b = 88.6582^\circ$	$\tilde{T}_\infty < T_c$	$b = 42.4043^\circ$	$b = 89.4512^\circ$
	$k = 0.0079$	$k = 0.1030$		$k = 0.0077$	$k = 0.2101$
	$M(\delta) = 1.4212$	$M(\delta) = 0.7380$		$M(\delta) = 1.4650$	$M(\delta) = 0.7366$
	$M(0) = 1.3571$	$M(0) = 0.7123$		$M(0) = 1.4339$	$M(0) = 0.7235$
	$\Delta = -0.0298$	$\Delta = -0.0071$		$\Delta = -0.1355$	$\Delta = -0.0306$
	$\mathcal{N} = -1.0086$	$\mathcal{N} = -0.9908$		$\mathcal{N} = -1.0412$	$\mathcal{N} = -0.9390$
	$\chi(\delta) = -0.2344$	$\chi(\delta) = 0.6741$		$\chi(\delta) = -0.1661$	$\chi(\delta) = 1.3388$
$\chi(0) = -0.1789$	$\chi(0) = 0.7271$	$\chi(0) = -0.1188$	$\chi(0) = 1.3756$		
$Q = 0.0181$	$Q = 0.0363$	$Q = 0.0052$	$Q = 0.0195$		
№ 3	$M_\infty = 1.5, a = 3^\circ, \alpha = 8,$ $\beta = 1/3, \gamma_\infty = 2, \gamma^* = 2.2$		№ 4	$M_\infty = 1.5, a = 3^\circ, \alpha = 9,$ $\beta = 1/3, \gamma_\infty = 2, \gamma^* = 2.2$	
$\tilde{T}_\infty < T_c$	$b = 42.4590^\circ$	$b = 89.4043^\circ$	$\tilde{T}_\infty < T_c$	$b = 42.4668^\circ$	$b = 89.3965^\circ$
	$k = 0.0078$	$k = 0.2009$		$k = 0.0078$	$k = 0.1997$
	$M(\delta) = 1.4620$	$M(\delta) = 0.7384$		$M(\delta) = 1.4615$	$M(\delta) = 0.7387$
	$M(0) = 1.4286$	$M(0) = 0.7250$		$M(0) = 1.4279$	$M(0) = 0.7252$
	$\Delta = -0.0858$	$\Delta = -0.0198$		$\Delta = -0.0786$	$\Delta = -0.0182$
	$\mathcal{N} = -1.0260$	$\mathcal{N} = -0.9623$		$\mathcal{N} = -1.0238$	$\mathcal{N} = -0.9656$
	$\chi(\delta) = -1.0123$	$\chi(\delta) = 1.5058$		$\chi(\delta) = -1.2239$	$\chi(\delta) = 1.5461$
$\chi(0) = -0.9281$	$\chi(0) = 1.5699$	$\chi(0) = -1.1304$	$\chi(0) = 1.6172$		
$Q = 0.0046$	$Q = 0.01$	$Q = 0.0045$	$Q = 0.0152$		

Т а б л и ц а 2. Область II

№ 1	$M_\infty = 1.5, a = 3^\circ, \alpha = 4,$ $\beta = 0.7, \gamma_\infty = 1.3, \gamma^* = 1.5$		№ 2	$M_\infty = 1.5, a = 3^\circ, \alpha = 4,$ $\beta = 1/3, \gamma_\infty = 1.8, \gamma^* = 1.9$	
$\tilde{T}_\infty < T_c$	$b = 42.8652^\circ$	$b = 88.9160^\circ$	$\tilde{T}_\infty < T_c$	$b = 42.3809^\circ$	$b = 89.4797^\circ$
	$k = 0.0078$	$k = 0.1232$		$k = 0.0075$	$k = 0.2151$
	$M(\delta) = 1.4368$	$M(\delta) = 0.7130$		$M(\delta) = 1.4667$	$M(\delta) = 0.7301$
	$M(0) = 1.3807$	$M(0) = 0.6910$		$M(0) = 1.4364$	$M(0) = 0.7172$
	$\Delta = -0.0667$	$\Delta = -0.0157$		$\Delta = -0.1728$	$\Delta = -0.0390$
	$\mathcal{N} = -1.0194$	$\mathcal{N} = -0.9806$		$\mathcal{N} = -1.0527$	$\mathcal{N} = -0.9233$
	$\chi(\delta) = -0.1660$	$\chi(\delta) = 0.0732$		$\chi(\delta) = -0.1782$	$\chi(\delta) = 1.0300$
	$\chi(0) = -0.1523$	$\chi(0) = 0.0837$		$\chi(0) = -0.1404$	$\chi(0) = 1.0582$
	$Q = 0.0336$	$Q = 0.0347$		$Q = 0.0050$	$Q = 0.0169$
№ 3	$M_\infty = 1.5, a = 3^\circ, \alpha = 8,$ $\beta = 1/3, \gamma_\infty = 1.8, \gamma^* = 1.9$		№ 4	$M_\infty = 1.5, a = 3^\circ, \alpha = 9,$ $\beta = 1/3, \gamma_\infty = 1.8, \gamma^* = 1.9$	
$\tilde{T}_\infty < T_c$	$b = 42.4512^\circ$	$b = 89.4195^\circ$	$\tilde{T}_\infty < T_c$	$b = 42.4590^\circ$	$b = 89.4102^\circ$
	$k = 0.0077$	$k = 0.2030$		$k = 0.0077$	$k = 0.2013$
	$M(\delta) = 1.4629$	$M(\delta) = 0.7328$		$M(\delta) = 1.4624$	$M(\delta) = 0.7332$
	$M(0) = 1.4294$	$M(0) = 0.7195$		$M(0) = 1.4286$	$M(0) = 0.7198$
	$\Delta = -0.1139$	$\Delta = -0.0263$		$\Delta = -0.1049$	$\Delta = -0.0243$
	$\mathcal{N} = -1.0344$	$\mathcal{N} = -0.9510$		$\mathcal{N} = -1.0317$	$\mathcal{N} = -0.9551$
	$\chi(\delta) = -1.0339$	$\chi(\delta) = 0.9496$		$\chi(\delta) = -1.2482$	$\chi(\delta) = 0.9276$
	$\chi(0) = -0.9662$	$\chi(0) = 0.9988$		$\chi(0) = -1.1733$	$\chi(0) = 0.9820$
	$Q = 0.0043$	$Q = 0.0127$		$Q = 0.0042$	$Q = 0.0122$

имеем два режима обтекания конуса газом Ван-дер-Ваальса — с сильной ударной волной ( $M(s) < 1, 0 \leq s \leq \delta$ ) и со слабой ударной волной ( $M(s) > 1, 0 \leq s \leq \delta$ ). Здесь (см. также (51))

$$M(s) = \tilde{M}_\infty \sqrt{\frac{(\tilde{u}(s) + \cos(s+a))^2 + (\tilde{v}(s) - \sin(s+a))^2}{C(s)}}. \quad (52)$$

По мнению авторов, наиболее интересным является случай, когда для набегающего потока вещества справедливо неравенство (см. раздел 1)

$$\hat{T}_\infty < T_c. \quad (53)$$

В табл. 1, 2 приведены численные результаты, отвечающие этому случаю. Выполнение неравенства (53) может означать (см. [1–3]), что вещество в набегающем потоке может находиться не только в жидком или газообразном, но и в двухфазном состоянии. Судя по табл. 1, 2, для режимов, соответствующих слабым ударным волнам (первая колонка), возможна ситуация, когда вещество после ударной волны также может находиться в двухфазном состоянии. Для режима с сильной ударной волной (вторая колонка) вещество находится только в газообразном состоянии. Для всех примеров, приведенных в табл. 1, 2, ударные волны абсолютно устойчивы. Кроме того, знак параметра  $Q = Q(a, b)$  (см. (34)) указывает на то, что  $\hat{S} > \hat{S}_\infty$ .

В заключение еще раз подчеркнем, что введение безразмерных параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma_\infty$ ,  $\gamma^*$  (см. раздел 1) обеспечило достаточно простое обращение с уравнением состояния для газа Ван-дер-Ваальса. Это обстоятельство в свою очередь позволило сконструировать удобный и относительно простой численный алгоритм для нахождения приближенных стационарных решений, отвечающих обтеканию кругового конуса реальным веществом.

## Список литературы / References

- [1] **Тер Хаар Д., Вергеланд Г.** Элементарная термодинамика. М.: Мир, 1968. 220 с.  
**Ter Haar, D., Wergeland, H.** Elements of Thermodynamics. L.: Addison-Wesley, 1960. 220 p.
- [2] **Кубо Р.** Термодинамика. М.: Мир, 1970. 304 с.  
**Kubo, R.** Thermodynamics. Amsterdam: North-Holland Publ., 1968. 300 p.
- [3] **Матвеев А.Н.** Молекулярная физика. М.: Оникс; Мир и образование, 2006. 360 с.  
**Matveev, A.N.** Molecular Physics. Moscow: Oniks; Mir i obrazovanie, 2006. 360 p. (in Russ.)
- [4] **Булах Б.М.** Нелинейные конические течения газа. М.: Наука, 1970. 344 с.  
**Bulakh, B.M.** Nonlinear Conical Gas Flows. Moscow: Nauka, 1970. 344 p. (in Russ.)
- [5] **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.  
**Loutsyanskiy, L.G.** Mechanics of Fluids and Gas. Moscow: Nauka, 1978. 736 p. (in Russ.)
- [6] **Овсянников Л.В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.  
**Ovsyannikov, L.V.** Lectures on Basics of Gas Dynamics. Moscow: Nauka, 1981. 368 p. (in Russ.)
- [7] **Седов Л.Н.** Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.  
**Sedov, L.N.** Mechanics of Continuous Medium. Vol. 1. Moscow: Nauka, 1970. 492 p. (in Russ.)
- [8] **Бай Ши-и.** Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. М.: Иностранная лит-ра, 1962. 410 с.  
**Shih-i Pai.** Introduction to the Theory of Compressible Flow. N.Y.: Van Nostrand, 1959. 386 p.
- [9] **Блохин А.М., Бычков А.С., Мякишев В.О.** О выполнении условия Лопатинского в задаче об обтекании клина нормальным газом и газом Ван-дер-Ваальса. Новосибирск, 2012 (Препр. Ин-т математики СО РАН; № 280).  
**Blokhin, A.M., Bychkov, A.S., Myakishev, V.O.** About the Lopatinsky condition in the problem of the normal gas and van der Waals gas flow around a wedge. Novosibirsk, 2012 (Preprint. Institute of Mathematics SB RAS; No. 280). (in Russ.)
- [10] **Блохин А.М., Бычков А.С., Мякишев В.О.** Численный анализ реализуемости условий нейтральной устойчивости ударных волн в задаче об обтекании клина газом Ван-дер-Ваальса // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 4(52). С. 51–63.  
**Blokhin, A.M., Bychkov, A.S., Myakishev, V.O.** Numerical analysis of feasibility of the neutral stability conditions for shock waves in the problem of a van der waals gas flow past a wedge // J. of Appl. and Industr. Mathematics. 2013. Vol. 7, iss. 2. P. 131–141.
- [11] **Блохин А.М., Ткачев Д.Л.** Анализ реализуемости условий нейтральной устойчивости ударных волн при обтекании клина неидеальным газом // ЖТФ. 2015. Т. 85, вып. 7. С. 20–30.  
**Blokhin, A.M., Tkachev, D.L.** An analysis of realization of neutral stability conditions for shock waves at the nonideal gas flow around a wedge // Technical Physics. (in press).

*Поступила в редакцию 12 декабря 2014 г.,  
с доработки — 30 января 2015 г.*

## Numerical resolution of the problem for a stationary real gas flow over a cone

BLOKHIN, ALEXANDER M.<sup>1,2</sup>, BIBERDORF, ELINA A.<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup>Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090, Russia

<sup>2</sup>Sobolev Institute of Mathematics of the SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

\*Corresponding author: Biberdorf, Elina A., e-mail: [biberdorf@ngs.ru](mailto:biberdorf@ngs.ru)

We consider the model of a van der Waals gas flow that properly describes liquid, gaseous and two-phase states of a real medium. The term “two-phase state” is understood in the thermodynamical sense, i. e., it is a state in which a liquid and its vapor (liquid and gaseous phases) coexist in thermodynamical equilibrium. It should be noted that a two-phase state is not the same as a two-phase flow. For two-phase flows the liquid and, for example, solid phases are described by different equations, whereas in our case (for two-phase states) the liquid and gaseous phases obey the same system of equations. The appearance of regions of two-phase states is modelled solely by the van der Waals equation of state.

In Section 1, taking into account the van der Waals equation of state, we simplify the system of equations and reduce it to a dimensionless form. The resulting problem is a nonstandard boundary value problem. We describe regions of variation of the dimensionless parameters  $\gamma_\infty$ ,  $\gamma^*$ ,  $\alpha$  and  $\beta$  describing certain medium states. We also introduce parameters specifying properties of a shock wave.

In Section 2, we propose an algorithm for solving the obtained system of equations. This algorithm is based on solving a series of Cauchy problems.

In the end of the paper we present the result of numerical simulations for the most interesting cases.

*Keywords:* circular cone, van der Waals gas, boundary value problem, numerical algorithm.

*Received 12 December 2014*

*Received in revised form 30 January 2015*