ОБ АЛГОРИТМЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННОЙ МОДЕЛИ МЕЛКОЙ ВОДЫ[*†]

В. Б. Барахнин, Г. С. Хакимзянов
Институт вычислительных технологий СО РАН
Новосибирск, Россия

Рассматривается конечно-разностный алгоритм для моделирования поверхностных волн в рамках одной нелинейно-дисперсионной модели. Отличительной чертой алгоритма является выделение в исходных уравнениях эллиптической и гиперболической частей. Для решения полученного эллиптического уравнения построена конечно-разностная схема с самосопряженным и положительно определенным оператором, оценены границы спектра этого оператора.

1. Введение

Двумерные (плановые) модели мелкой воды находят широкое применение при моделировании движений жидкости со свободной поверхностью. В последнее время неуклонно возрастает интерес к разработке алгоритмов расчета таких течений на криволинейных сетках, приспосабливающихся к сложной форме берега и зависящих от решения. Эти сетки позволяют получать результаты достаточной точности даже при небольшом числе узлов с существенной экономией компьютерной памяти и времени счета. Высокая точность достигается благодаря увеличению концентрации узлов сетки в зонах расположения особенностей исследуемого явления. Кроме того, такие сетки имеют преимущества по сравнению с равномерными ввиду более простой реализации краевых условий на границах, имеющих сложную форму. Распространение поверхностных волн представляет собой существенно нестационарный процесс, поэтому адаптивные сетки, отслеживающие особенности решения, должны быть подвижными. К сожалению, в расчетах по моделям мелкой воды адаптивные сетки применяются до сих пор весьма редко.

В численных исследованиях наиболее часто используемой приближенной моделью является модель мелкой воды первого приближения. Недостатком модели является то, что она дает достоверные результаты лишь для волн малой амплитуды. Работы [9, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 24] посвящены исследованию нелинейно-дисперсионных моделей и алгоритмов,

---

[†] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №97-01-00819.

основанных на этих моделях. Из множества нелинейно-дисперсионных моделей (см., напр., [1, 2, 6, 18, 20, 22]) особый интерес вызывает модель Железняка—Пелиновского, так как при ее получении не используется предположение о малости амплитуды волн. Эта модель представляет собой систему нелинейных уравнений относительно возвышения свободной поверхности и скорости. Получается она путем разложения основных гидродинамических функций в ряд по параметру дисперсии $\beta = (h_0/L)^2$ и параметру нелинейности $\alpha = a_0/h_0$, подстановкой этого разложения в трехмерные уравнения, описывающие потенциальные течения жидкости со свободной границей, и последующим отбрасыванием членов порядка $O(\beta^2)$ с сохранением членов порядка $O(\alpha^m\beta)$ (см., напр., [10]). Здесь L — характерный размер по горизонтали, h_0, a_0 — соответственно характерные глубина и амплитуда. Вывод, изучение и применение этой модели даны в [5, 7, 8]. Ее одномерный аналог получен также в работе [23].

Численная реализация многих нелинейно-дисперсионных моделей осложняется наличием в соответствующих уравнениях производных высокого порядка искомых функций, например смешанных производных по времени и пространственным переменным. Поэтому в настоящее время при построении разностных схем для нелинейно-дисперсионных уравнений предпочтение отдается алгоритмам, основанным на решении эллиптических и гиперболических уравнений, получаемых тем или иным способом из исходных дифференциальных уравнений. Эта идея применялась, например, в работах [9, 12, 16, 21]. Численная реализация таких алгоритмов сводится к тому, что на каждом временно́м шаге сначала решают эллиптические уравнения, а потом — неоднородную гиперболическую систему с правой частью, зависящей только от производных по пространственным переменным. Такой подход позволяет строить эффективные алгоритмы, так как для решения эллиптических и гиперболических уравнений имеются хорошо зарекомендовавшие себя численные методы.

В настоящей работе для модели Железняка—Пелиновского введена новая зависимая переменная — ускорение, так что возникает система уравнений относительно скорости и возвышения, причем правая часть этой системы не зависит от производных по времени и третьих производных от основных функций (в одномерном случае указанный подход описан нами в [16]). Для численного решения полученных уравнений на подвижных адаптивных сетках, подстраивающихся под сложную геометрию области и особенности решения, разработан конечно-разностный метод второго порядка точности с автоматически настраиваемой аппроксимационной вязкостью. Задача Неймана для эллиптического уравнения решается с помощью конечно-разностной схемы типа “косой крест"с самосопряженным и положительно определенным оператором.

2. Математическая постановка

Рассматривается течение идеальной несжимаемой жидкости в ограниченном бассейне конечной глубины. Декартова система координат Ox^1x^2z выбирается так, что уравнение свободной поверхности покоящейся жидкости имеет вид $z = 0$, при этом $z = -h(x^1, x^2)$ — функция, описывающая рельеф дна. Двумерные (плановые) течения жидкости со свободной поверхностью в рамках нелинейно-дисперсионной модели Железняка—Пелиновского описываются следующей системой уравнений для безразмерных переменных:

$$H_t + \operatorname{div}(H\mathbf{u}) = 0,$$
$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla\eta = \mathbf{D}, \tag{1.1}$$

где

$$\mathbf{D} = \frac{1}{H}\nabla\left(\frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2\right) - \nabla h\left(\frac{H}{2}R_1 + R_2\right),$$

$$R_1 = (\operatorname{div}\mathbf{u})_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\operatorname{div}\mathbf{u} - (\operatorname{div}\mathbf{u})^2, \quad R_2 = \mathbf{u}_t\cdot\nabla h + (\mathbf{u}\cdot\nabla)(\mathbf{u}\cdot\nabla h),$$

$\Omega = \Omega(t)$ — меняющаяся, вообще говоря, со временем односвязная ограниченная область в плоскости декартовых координат $x^1,\ x^2,\quad u_\alpha(x^1, x^2, t)$ — декартовы компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$ $(\alpha = 1, 2)$, $\eta(x^1, x^2, t)$ — возвышение поверхности над невозмущенным уровнем, $H = \eta + h$ — полная глубина. Обезразмеривание проводилось по формулам

$$\tilde{x}^\alpha = x^\alpha h_0, \quad \tilde{\eta} = \eta h_0, \quad \tilde{H} = Hh_0, \quad \tilde{u}_\alpha = u_\alpha\sqrt{gh_0}, \quad \tilde{t} = t\sqrt{h_0/g},$$

где h_0 — характерная глубина, g — ускорение свободного падения, символом “$\sim$"обозначены размерные величины.

С целью выделения эллиптической части преобразуем уравнения движения, заметив, что

$$\operatorname{div}[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}] = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\operatorname{div}\mathbf{u} + \big(\operatorname{div}\mathbf{u}\big)^2 - 2\,\det\Big(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\Big),$$

где

$$\det\Big(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\Big) = \frac{\partial u_1}{\partial x^1}\frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial u_1}{\partial x^2}\frac{\partial u_2}{\partial x^1}.$$

С учетом этого

$$R_1 = \operatorname{div}\mathbf{d} - 2(\operatorname{div}\mathbf{u})^2 + 2\,\det\Big(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\Big), \quad R_2 = \mathbf{d}\cdot\nabla h + \mathbf{u}\cdot\big((\mathbf{u}\cdot\nabla)\nabla h\big). \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{d}$ — ускорение частиц жидкости, $\quad \mathbf{d} = \mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$.

Переписав уравнения движения системы (1.1) в виде $\mathbf{d} = \mathbf{D} - \nabla\eta$, получим

$$\mathbf{d} = \frac{1}{H}\nabla\left(\frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2\right) - \nabla h\left(\frac{H}{2}R_1 + R_2\right) - \nabla\eta.$$

С учетом равенства

$$-\nabla\eta = -\nabla H + \nabla h = -\frac{1}{H}\nabla\left(\frac{H^2}{2}\right) + \nabla h$$

имеем

$$H\mathbf{d} = \nabla\varphi - \nabla h\psi, \tag{1.3}$$

где

$$\varphi = \frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2 - \frac{H^2}{2}, \quad \psi = \frac{H^2}{2}R_1 + HR_2 - H.$$

Тем самым

$$R_1 = \frac{12\varphi - 6H\psi}{H^3}, \quad R_2 = \frac{-6\varphi + 4H\psi + H^2}{H^2}.$$

Используя равенства (1.2) и (1.3), мы получим систему уравнений для неизвестных φ и ψ:

$$\operatorname{div}\Big(\frac{\nabla\varphi}{H} - \frac{\nabla h\psi}{H}\Big) - 2(\operatorname{div}\mathbf{u})^2 + 2\,\det\Big(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\Big) = \frac{12\varphi - 6H\psi}{H^3},$$

$$\Big(\frac{\nabla\varphi}{H} - \frac{\psi\nabla h}{H}\Big)\cdot\nabla h + \mathbf{u}\cdot\big((\mathbf{u}\cdot\nabla)\nabla h\big) = \frac{-6\varphi + 4H\psi + H^2}{H^2}. \tag{1.4}$$

Из второго уравнения системы (1.4) следует, что

$$\psi = \frac{H\,\nabla h\cdot\nabla\varphi + 6\varphi + H^2\mathbf{u}\cdot\big((\mathbf{u}\cdot\nabla)\nabla h\big) - H^2}{Hr},$$

где $r = (\nabla h)^2 + 4$. Подставляя выражение для ψ в первое уравнение системы (1.4), после очевидных преобразований получим уравнение для φ:

$$\operatorname{div}\Big(\frac{\nabla\varphi}{H} - \frac{\nabla h}{H}\,\frac{\nabla h\cdot\nabla\varphi}{r}\Big) - \Big(6\operatorname{div}\Big(\frac{\nabla h}{H^2 r}\Big) + \frac{12}{H^3}\,\frac{r-3}{r}\Big)\varphi = F, \tag{1.5}$$

где

$$F = \operatorname{div}\Big(\frac{\big(\mathbf{u}\cdot\big((\mathbf{u}\cdot\nabla)\nabla h\big) - 1\big)\nabla h}{r}\Big) - \frac{6}{H}\,\frac{\mathbf{u}\cdot\big((\mathbf{u}\cdot\nabla)\nabla h\big) - 1}{r} + 2(\operatorname{div}\mathbf{u})^2 - 2\,\det\Big(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\Big).$$

Предполагая, что $H(x^1, x^2, t) \geq H_0 > 0$, нетрудно показать, что уравнение (1.5) является эллиптическим.

С учетом (1.3) уравнения системы (1.1) запишутся в виде

$$\begin{gathered} H_t + \operatorname{div}(H\mathbf{u}) = 0, \\ \mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{H}(\nabla\varphi - \nabla h\psi). \end{gathered} \tag{1.6}$$

Итак, решение системы (1.1) свелось к решению эллиптического уравнения (1.5) и системы (1.6), правая часть которой не содержит производных по времени.

Уравнения (1.6) можно записать и в дивергентной форме:

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{F}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial\mathbf{F}^2}{\partial x^2} = \mathbf{G}, \quad x = (x^1, x^2) \in \Omega. \tag{1.7}$$

Здесь

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} H \\ Hu_1 \\ Hu_2 \end{pmatrix},\ \mathbf{F}^1 = \begin{pmatrix} Hu_1 \\ Hu_1^2 \\ Hu_1u_2 \end{pmatrix},\ \mathbf{F}^2 = \begin{pmatrix} Hu_2 \\ Hu_1u_2 \\ Hu_2^2 \end{pmatrix},\ \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{x^1} - \psi h_{x^1} \\ \varphi_{x^2} - \psi h_{x^2} \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемые уравнения дополняются начальными и краевыми условиями. Например, на непроницаемых неподвижных участках Γ_0 имеем

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\Big|_{\Gamma_0} = 0, \tag{1.8}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе.

Для уравнения (1.5) также необходимы краевые условия. Легко показать, что

$$\mathbf{d}\cdot\mathbf{n}\Big|_{\Gamma_0} = \varkappa(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}), \tag{1.9}$$

где $\varkappa$ — знакоопределенная кривизна границы. Знак кривизны определяется следующим образом. Параметризуем границу области так, чтобы при движении в направлении возрастания параметра область оставалась слева. Будем считать кривизну положительной или отрицательной в зависимости от того, вращается ли касательный вектор **l** при указанном движении по часовой или против часовой стрелки соответственно.

Из формул (1.3) и (1.9) имеем следующее краевое условие на функцию φ:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\frac{\partial h}{\partial n}\;\frac{H\,\nabla h\cdot\nabla\varphi+6\varphi}{Hr}\right)\bigg|_{\Gamma_0}=\frac{\partial h}{\partial n}\;\frac{H\mathbf{u}\cdot\big((\mathbf{u}\cdot\nabla)\nabla h\big)-H}{r}+\varkappa H\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}). \tag{1.10}$$

В частном случае, когда функция h, описывающая рельеф дна, удовлетворяет на Γ_0 равенству $\nabla h=-|\nabla h|\mathbf{n}$, для уравнения (1.5) возникает третья краевая задача с граничным условием

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{3|\nabla h|}{2H}\varphi\right)\bigg|_{\Gamma_0}=\frac{H}{4}\Big(|\nabla h|\big(-(\mathbf{u}\cdot\nabla)(\mathbf{u}\cdot\nabla h)+1\big)+4\varkappa\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\Big).$$

Если же дно плоское и горизонтальное, $h\equiv 1$, то краевое условие (1.10) запишется в виде условия Неймана

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_0}=\varkappa H\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}). \tag{1.11}$$

Уравнение (1.5) примет в этом случае более простой вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\Big(\frac{1}{H}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\Big)+\frac{\partial}{\partial x^2}\Big(\frac{1}{H}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\Big)-\frac{3}{H^3}\varphi=F, \tag{1.12}$$

где

$$F=2(\operatorname{div}\mathbf{u})^2-2\,\det\Big(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\Big)+\frac{3}{2H}.$$

3. Постановка задачи в криволинейных координатах

Пусть преобразование координат

$$t=\tau,\quad x^\alpha=x^\alpha(q^1,q^2,\tau),\quad \alpha=1,2 \tag{2.1}$$

является достаточно гладким, взаимно-однозначным и невырожденным (для определенности, с положительным якобианом), причем область $\Omega(t)$ при этом преобразовании является образом единичного квадрата $Q=(0;1)\times(0;1)$. В новых координатах система (1.7) имеет вид

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{F}^1}{\partial q^1}+\frac{\partial\mathbf{F}^2}{\partial q^2}=\mathbf{G},\quad q=(q^1,q^2)\in Q, \tag{2.2}$$

где

$$\mathbf{V}=\begin{pmatrix}HJ\\ Hu_1J\\ Hu_2J\end{pmatrix},\quad \mathbf{F}^\alpha=\begin{pmatrix}Hv^\alpha J\\ Hu_1v^\alpha J\\ Hu_2v^\alpha J\end{pmatrix},\quad \mathbf{G}=\begin{pmatrix}0\\ \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial q^1}-\psi\frac{\partial h}{\partial q^1}\Big)\frac{\partial x^2}{\partial q^2}-\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial q^2}-\psi\frac{\partial h}{\partial q^2}\Big)\frac{\partial x^2}{\partial q^1}\\ -\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial q^1}-\psi\frac{\partial h}{\partial q^1}\Big)\frac{\partial x^1}{\partial q^2}+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial q^2}-\psi\frac{\partial h}{\partial q^2}\Big)\frac{\partial x^1}{\partial q^1}\end{pmatrix},$$

J — якобиан преобразования (2.1), $v^\alpha=\dfrac{dq^\alpha}{dt}$ — контравариантные компоненты вектора скорости:

$$v^\alpha=\left(u_1-\frac{\partial x^1}{\partial t}\right)\frac{\partial q^\alpha}{\partial x^1}+\left(u_2-\frac{\partial x^2}{\partial t}\right)\frac{\partial q^\alpha}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^\beta}=\frac{(-1)^{\alpha+\beta}}{J}\frac{\partial x^{3-\beta}}{\partial q^{3-\alpha}}.$$

Нам потребуется также недивергентная форма записи уравнений (2.2):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathcal{A}^1 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^1} + \mathcal{A}^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^2} = \mathbf{f}, \tag{2.3}$$

где

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} H \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^\alpha = \begin{pmatrix} v^\alpha & H\dfrac{\partial q^\alpha}{\partial x^1} & H\dfrac{\partial q^\alpha}{\partial x^2} \\ 0 & v^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & v^\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \frac{1}{HJ}\mathbf{G}.$$

Наконец, уравнение (1.5) для расчета φ записывается в криволинейных координатах следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial q^1}\Big(k_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial q^2}\Big) + \frac{\partial}{\partial q^2}\Big(k_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial q^2}\Big) - k_0\varphi = FJ, \tag{2.4}$$

здесь

$$k_{\alpha\beta} = \frac{J}{H}\left(\bar{g}^{\alpha\beta} - \frac{\bar{g}^{\alpha\gamma}\bar{g}^{\beta\delta}}{r}\frac{\partial h}{\partial q^\gamma}\frac{\partial h}{\partial q^\delta}\right), \quad k_0 = 6\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(\frac{J\bar{g}^{\alpha\beta}}{H^2 r}\frac{\partial h}{\partial q^\beta}\right) + \frac{12J}{H^3}\,\frac{r-3}{r},$$

$$F = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(\frac{s}{r}\,J\bar{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial h}{\partial q^\beta}\right) - \frac{6s}{Hr} + \frac{2}{J^2}\frac{\partial}{\partial q^\alpha}J\left(v^\alpha - \frac{\partial q^\alpha}{\partial t}\right) - \frac{2}{J}\,\det\Big(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial q}\Big),$$

$$r = \bar{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial h}{\partial q^\alpha}\frac{\partial h}{\partial q^\beta} + 4, \quad s = u_\beta\left(v^\alpha - \frac{\partial q^\alpha}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(\frac{\partial h}{\partial q^\gamma}\frac{\partial q^\gamma}{\partial x^\beta}\right) - 1, \quad \bar{g}^{\alpha\beta} = \frac{(-1)^{\alpha+\beta}}{J^2}g_{3-\alpha,\,3-\beta},$$

$g_{\alpha\beta}$ — ковариантные компоненты метрического тензора; во всех формулах по повторяющимся индексам ведется суммирование.

В криволинейных координатах условие непротекания (1.8) примет вид

$$v^\alpha\,\Big|_{q^\alpha=0} = v^\alpha\,\Big|_{q^\alpha=1} = 0.$$

Отсюда сразу следует, что

$$\mathbf{F}^\alpha\,\Big|_{q^\alpha=0} = \mathbf{F}^\alpha\,\Big|_{q^\alpha=1} = 0.$$

4. Конечно-разностный алгоритм

Для численного решения уравнений (2.2), (2.4) замыкание области Q (квадрат $\overline{Q}$) покрывается прямоугольной сеткой $\overline{Q}_h$ с количеством узлов N_α по направлению оси Oq^α и шагами $h_\alpha = 1/(N_\alpha - 1)$.

Алгоритм расчета на произвольном шаге по времени с номером n состоит в следующем. Сначала решается конечно-разностное уравнение для нахождения функции φ, аппроксимирующее уравнение эллиптического типа (2.4), причем φ вычисляется в целочисленных узлах сетки. Для решения системы (2.2) нами использовалась явная конечно-разностная схема предиктор—корректор с автоматически настраиваемой аппроксимационной вязкостью. На шаге предиктор этой схемы аппроксимируется недивергентная форма системы (2.2), то есть система (2.3), правая часть которой содержит уже найденные значения φ и ψ. После этого вновь численно решается уравнение (2.4) с использованием величин $H,\ u_1,\ u_2,$

вычисленных на предикторе. Значения φ ищутся в узлах сетки и используются в правой части уравнений шага корректор, аппроксимирующих дивергентную систему (2.2).

Схема предиктор—корректор описана в нашей работе [15], поэтому здесь мы опишем лишь схему, использованную для численного решения эллиптического уравнения (2.4). Конечно-разностное уравнение получено на основе интегроинтерполяционного метода.

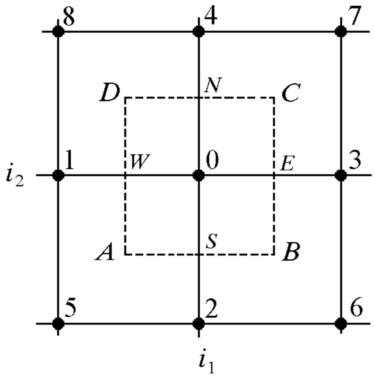

Рис. 1. Контур интегрирования и шаблон разностной схемы.

Проинтегрируем уравнение (2.4) по прямоугольнику $ABCD$ (рис. 1), стороны которого параллельны координатным осям вычислительной области Q и делят расстояния между соседними узлами пополам. Имеем

$$\int\limits_{(BC)}\left(k_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial q^1}+k_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial q^2}\right)dq^2-\int\limits_{(AD)}\left(k_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial q^1}+k_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial q^2}\right)dq^2+\int\limits_{(DC)}\left(k_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial q^1}+k_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial q^2}\right)dq^1-$$

$$-\int\limits_{(AB)}\left(k_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial q^1}+k_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial q^2}\right)dq^1-\iint\limits_{ABCD}k_0\,\varphi\,dq^1dq^2=\iint\limits_{ABCD}FJ\,dq^1dq^2. \tag{3.1}$$

Коэффициенты $k_{\alpha\beta}$ вычисляются в центрах ячеек сетки — в точках $q_{i_1+1/2,\,i_2+1/2}$. Для подсчета интегралов в (3.1) по сторонам прямоугольника $ABCD$ применяется формула трапеций. Тогда из (3.1) получим следующее разностное уравнение во внутреннем узле q_{i_1,i_2}:

$$\Lambda\varphi_{i_1,\,i_2}\equiv(\overline{D}_{q^1}F_1+\overline{D}_{q^2}F_2-k_0)\varphi_{i_1,\,i_2}=(FJ)_{i_1,\,i_2}, \tag{3.2}$$

где правая часть аппроксимируется с помощью центральных разностей. Здесь

$$D_{q^1}f(q_{i_1+1/2,\,i_2+1/2})=\frac{f_{i_1+1,\,i_2+1}+f_{i_1+1,\,i_2}-f_{i_1,\,i_2+1}-f_{i_1,\,i_2}}{2h_1},$$

$$D_{q^2}f(q_{i_1+1/2,\,i_2+1/2})=\frac{f_{i_1+1,\,i_2+1}+f_{i_1,\,i_2+1}-f_{i_1+1,\,i_2}-f_{i_1,\,i_2}}{2h_2},$$

$$F_1f(q_{i_1+1/2,\,i_2+1/2})=\big(k_{11}D_{q^1}f+k_{12}D_{q^2}f\big)(q_{i_1+1/2,\,i_2+1/2}),$$

$$F_2f(q_{i_1+1/2,\,i_2+1/2})=\big(k_{12}D_{q^1}f+k_{22}D_{q^2}f\big)(q_{i_1+1/2,\,i_2+1/2}),$$

$$\overline{D}_{q^1}F_1(q_{i_1,\,i_2})=\frac{D_{q^1}F_1(N)+D_{q^1}F_1(S)}{2},\qquad\overline{D}_{q^2}F_2(q_{i_1,\,i_2})=\frac{D_{q^2}F_2(E)+D_{q^2}F_2(W)}{2}.$$

Далее будем рассматривать случай плоского горизонтального дна, $h\equiv 1$.

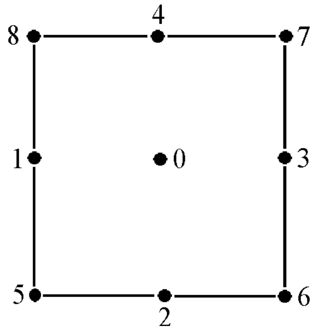

Рис. 2. Нумерация типов узлов.

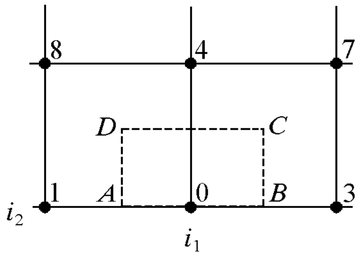

Рис. 3. Контур интегрирования и шаблон на нижней границе.

Опишем аппроксимацию граничного условия Неймана (1.11). Заметим, что на нижней границе вычислительной области $\mathbf{n} = \dfrac{1}{\sqrt{g_{11}}}\bigl(x^2_{q^1},\ -x^1_{q^1}\bigr)$. На этой границе выполняется равенство

$$k_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial q^1} + k_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial q^2} = \frac{1}{H}\Bigl(- x^2_{q^1}\bigl(\frac{\partial\varphi}{\partial q^1}\frac{x^2_{q^2}}{J} - \frac{\partial\varphi}{\partial q^2}\frac{x^2_{q^1}}{J}\bigr) + x^1_{q^1}\bigl(- \frac{\partial\varphi}{\partial q^1}\frac{x^1_{q^2}}{J} + \frac{\partial\varphi}{\partial q^2}\frac{x^1_{q^1}}{J}\bigr)\Bigr) =$$

$$= \frac{1}{H}\Bigl(- x^2_{q^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1} + x^1_{q^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\Bigr) = -\frac{\sqrt{g_{11}}}{H}\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \sqrt{g_{11}}\varkappa_1\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}), \tag{3.3}$$

где, согласно формуле подсчета кривизны [11],

$$\varkappa_1 = \frac{x^2_{q^1q^1}x^1_{q^1} - x^1_{q^1q^1}x^2_{q^1}}{g_{11}^{3/2}}.$$

На верхней границе области Q также имеет место равенство вида (3.3). Наконец, для левой и правой границы области Q получим следующую формулу:

$$k_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial q^1} + k_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial q^2} = \sqrt{g_{22}}\varkappa_2\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}), \tag{3.4}$$

где

$$\varkappa_2 = \frac{x^1_{q^2q^2}x^2_{q^2} - x^2_{q^2q^2}x^1_{q^2}}{g_{22}^{3/2}}.$$

Приведем конечно-разностные уравнения в граничных узлах, разбив множество узлов на типы в зависимости от положения узла на сетке (рис. 2). Шаблон и контур интегрирования для узлов, принадлежащих нижней границе (тип 2), изображены на рис. 3. Рассматривая интегралы вида (3.1) и используя равенства (3.3) и (3.4), получим следующие разностные уравнения (черта над оператором F_α означает, что берется среднее арифметическое значений оператора в двух соседних ячейках; k_0 берется из центров ближайших ячеек).

Тип 1:

$$\Lambda\varphi_{1,i_2} \equiv \frac{2}{h_1}\overline{F_1}\varphi(E) + D_{q^2}F_2\varphi(E) - k_0\varphi_{1,i_2} = (FJ)_{1,i_2} + \bigl(\frac{2}{h_1}\sqrt{g_{22}}\varkappa_2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\bigr)_{1,i_2}. \tag{3.5}$$

Тип 2:

$$\Lambda\varphi_{i_1,1} \equiv D_{q^1}F_1\varphi(N) + \frac{2}{h_2}\overline{F_2}\varphi(N) - k_0\varphi_{i_1,1} = (FJ)_{i_1,1} + \big(\frac{2}{h_2}\sqrt{g_{11}}\varkappa_1(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\big)_{i_1,1}. \tag{3.6}$$

Тип 3:

$$\Lambda\varphi_{N_1,i_2} \equiv -\frac{2}{h_1}\overline{F_1}\varphi(W) + D_{q^2}F_2\varphi(W) - k_0\varphi_{N_1,i_2} = (FJ)_{N_1,i_2} - \big(\frac{2}{h_1}\sqrt{g_{22}}\varkappa_2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\big)_{N_1,i_2}. \tag{3.7}$$

Тип 4:

$$\Lambda\varphi_{i_1,N_2} \equiv D_{q^1}F_1\varphi(S) - \frac{2}{h_2}\overline{F_2}\varphi(S) - k_0\varphi_{i_1,N_2} = (FJ)_{i_1,N_2} - \big(\frac{2}{h_2}\sqrt{g_{11}}\varkappa_1(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\big)_{i_1,N_2}. \tag{3.8}$$

Тип 5:

$$\Lambda\varphi_{1,1} \equiv \frac{2}{h_1}F_1\varphi(C) + \frac{2}{h_2}F_2\varphi(C) - k_0\varphi_{1,1} =$$
$$= (FJ)_{1,1} + \big(\frac{2}{h_1}\sqrt{g_{22}}\varkappa_2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\big)_{1,1} + \big(\frac{2}{h_2}\sqrt{g_{11}}\varkappa_1(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\big)_{1,1}. \tag{3.9}$$

Тип 6:

$$\Lambda\varphi_{N_1,1} \equiv -\frac{2}{h_1}F_1\varphi(D) + \frac{2}{h_2}F_2\varphi(D) - k_0\varphi_{N_1,1} =$$
$$= (FJ)_{N_1,1} - \big(\frac{2}{h_1}\sqrt{g_{22}}\varkappa_2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\big)_{N_1,1} + \big(\frac{2}{h_2}\sqrt{g_{11}}\varkappa_1(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\big)_{N_1,1}. \tag{3.10}$$

Тип 7:

$$\Lambda\varphi_{N_1,N_2} \equiv -\frac{2}{h_1}F_1\varphi(A) - \frac{2}{h_2}F_2\varphi(A) - k_0\varphi_{N_1,N_2} =$$
$$= (FJ)_{N_1,N_2} - \big(\frac{2}{h_1}\sqrt{g_{22}}\varkappa_2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\big)_{N_1,N_2} - \big(\frac{2}{h_2}\sqrt{g_{11}}\varkappa_1(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\big)_{N_1,N_2}. \tag{3.11}$$

Тип 8:

$$\Lambda\varphi_{1,N_2} \equiv \frac{2}{h_1}F_1\varphi(B) - \frac{2}{h_2}F_2\varphi(B) - k_0\varphi_{1,N_2} =$$
$$= (FJ)_{1,N_2} + \big(\frac{2}{h_1}\sqrt{g_{22}}\varkappa_2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\big)_{1,N_2} - \big(\frac{2}{h_2}\sqrt{g_{11}}\varkappa_1(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\big)_{1,N_2}. \tag{3.12}$$

Таким образом, формулы (3.2), (3.5)—(3.12) полностью определяют оператор Λ и систему конечно-разностных уравнений

$$\Lambda\varphi_{i_1,i_2} = P_{i_1,i_2}, \quad i_\alpha = 1, ..., N_\alpha. \tag{3.13}$$

Коэффициенты этих уравнений приведены в [3]. Нетрудно убедиться, что для оператора Лапласа, аппроксимируемого на квадратной сетке, описанная схема переходит в схему “косой крест".

Докажем самосопряженность и положительную определенность оператора $A = -\Lambda$. Оператор A действует из M-пространства сеточных функций, заданных на сетке $\overline{Q}_h$, в M. Введем в M скалярное произведение:

$$(\varphi,\psi) = h_1h_2\sum_{i_1=2}^{N_1-1}\sum_{i_2=2}^{N_2-1}(\varphi\psi)_{i_1,i_2} + \frac{1}{2}h_1h_2\sum_{i_2=2}^{N_2-1}(\varphi\psi)_{1,i_2}+$$

$$+\frac{1}{2}h_1h_2\sum_{i_1=2}^{N_1-1}(\varphi\psi)_{i_1,1}+\frac{1}{2}h_1h_2\sum_{i_2=2}^{N_2-1}(\varphi\psi)_{N_1,i_2}+\frac{1}{2}h_1h_2\sum_{i_1=2}^{N_1-1}(\varphi\psi)_{i_1,N_2}+$$

$$+\frac{1}{4}h_1h_2(\varphi\psi)_{1,1}+\frac{1}{4}h_1h_2(\varphi\psi)_{N_1,1}+\frac{1}{4}h_1h_2(\varphi\psi)_{N_1,N_2}+\frac{1}{4}h_1h_2(\varphi\psi)_{1,N_2}.$$

Пусть $f \in M$. Определим $\tilde{f} \in M$ так: $\tilde{f}_{i_1,i_2} = f_{i_1,i_2}(k_0)_{i_1,i_2}$. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Для любых функций φ, ψ из пространства M имеет место равенство*

$$(A\varphi,\psi)=h_1h_2\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\big(F_1\varphi D_{q^1}\psi+F_2\varphi D_{q^2}\psi\big)(q_{i_1+1/2,i_2+1/2})+(\tilde{\varphi},\psi). \tag{3.14}$$

Доказательство. Преобразуем слагаемые, входящие в выражение $(A\varphi,\psi)$. Преобразование зависит от типа узла, к которому относится соответствующее слагаемое.

Рассматривая выражение (3.2), используемое в узлах типа 0 и взятое со знаком "$-$", подробно запишем преобразование тех слагаемых скалярного произведения, в которые входит сомножитель $\overline{D}_{q^1}F_1\varphi$:

$$-h_1h_2\sum_{i_1=2}^{N_1-1}\sum_{i_2=2}^{N_2-1}(\overline{D}_{q^1}F_1\varphi\ \psi)_{i_1,i_2}=\frac{h_1h_2}{2h_1}\sum_{i_1=2}^{N_1-1}\sum_{i_2=2}^{N_2-1}\big(-F_1\varphi(q_{i_1+1/2,i_2+1/2})\psi_{i_1,i_2}+$$

$$+F_1\varphi(q_{i_1-1/2,i_2+1/2})\psi_{i_1,i_2}-F_1\varphi(q_{i_1+1/2,i_2-1/2})\psi_{i_1,i_2}+F_1\varphi(q_{i_1-1/2,i_2-1/2})\psi_{i_1,i_2}\big)=$$

$$=\frac{h_1h_2}{2h_1}\Big(-\sum_{i_1=2}^{N_1-1}\sum_{i_2=2}^{N_2-1}F_1\varphi(q_{i_1+1/2,i_2+1/2})\psi_{i_1,i_2}+\sum_{i_1'=1}^{N_1-2}\sum_{i_2=2}^{N_2-1}F_1\varphi(q_{i_1'+1/2,i_2+1/2})\psi_{i_1'+1,i_2}-$$

$$-\sum_{i_1=2}^{N_1-1}\sum_{i_2'=1}^{N_2-2}F_1\varphi(q_{i_1+1/2,i_2'+1/2})\psi_{i_1,i_2'+1}+\sum_{i_1'=1}^{N_1-2}\sum_{i_2'=1}^{N_2-2}F_1\varphi(q_{i_1'+1/2,i_2'+1/2})\psi_{i_1'+1,i_2'+1}\Big)=$$

$$=h_1h_2\sum_{i_1=2}^{N_1-2}\sum_{i_2=2}^{N_2-2}\big(F_1\varphi D_{q^1}\psi\big)(q_{i_1+1/2,i_2+1/2})+\frac{h_1h_2}{2h_1}\Big(\sum_{i_2=2}^{N_2-2}F_1\varphi(q_{1+1/2,i_2+1/2})\big(\psi_{1+1,i_2+1}+\psi_{1+1,i_2}\big)+$$

$$+\sum_{i_1=2}^{N_1-2}F_1\varphi(q_{i_1+1/2,1+1/2})\big(\psi_{i_1+1,1+1}-\psi_{i_1,1+1}\big)+\sum_{i_2=2}^{N_2-2}F_1\varphi(q_{N_1-1/2,i_2+1/2})\big(-\psi_{N_1-1,i_2+1}-\psi_{N_1-1,i_2}\big)+$$

$$+\sum_{i_1=2}^{N_1-2}F_1\varphi(q_{i_1+1/2,N_2-1/2})\big(\psi_{i_1+1,N_2-1}-\psi_{i_1,N_2-1}\big)+F_1\varphi(q_{1+1/2,1+1/2})\psi_{1+1,1+1}-$$

$$-F_1\varphi(q_{N_1-1/2,1+1/2})\psi_{N_1-1,1+1}-F_1\varphi(q_{N_1-1/2,N_2-1/2})\psi_{N_1-1,N_2-1}+F_1\varphi(q_{1+1/2,N_2-1/2})\psi_{1+1,N_2-1}\Big).$$

Осуществив аналогичные преобразования для выражения

$$-h_1h_2\sum_{i_1=2}^{N_1-1}\sum_{i_2=2}^{N_2-1}(\overline{D}_{q^2}F_2\varphi\ \psi)_{i_1,i_2},$$

полностью определим вклад узлов типа 0 в скалярное произведение $(A\varphi,\psi)$.

Тип 0:

$$h_1h_2\sum_{i_1=2}^{N_1-1}\sum_{i_2=2}^{N_2-1}(A\varphi\ \psi)_{i_1,i_2}=h_1h_2\sum_{i_1=2}^{N_1-2}\sum_{i_2=2}^{N_2-2}\big(F_1\varphi D_{q^1}\psi+F_2\varphi D_{q^2}\psi\big)(q_{i_1+1/2,i_2+1/2})+$$

$$+\frac{h_1h_2}{2h_1}\Big(\sum_{i_2=2}^{N_2-2}F_1\varphi(q_{1+1/2,i_2+1/2})\big(\psi_{1+1,i_2+1}+\psi_{1+1,i_2}\big)+\sum_{i_1=2}^{N_1-2}F_1\varphi(q_{i_1+1/2,1+1/2})\big(\psi_{i_1+1,1+1}-\psi_{i_1,1+1}\big)+$$

$$+\sum_{i_2=2}^{N_2-2}F_1\varphi(q_{N_1-1/2,i_2+1/2})\big(-\psi_{N_1-1,i_2+1}-\psi_{N_1-1,i_2}\big)+$$

$$+\sum_{i_1=2}^{N_1-2}F_1\varphi(q_{i_1+1/2,N_2-1/2})\big(\psi_{i_1+1,N_2-1}-\psi_{i_1,N_2-1}\big)+$$

$$+F_1\varphi(q_{1+1/2,1+1/2})\psi_{1+1,1+1}-F_1\varphi(q_{N_1-1/2,1+1/2})\psi_{N_1-1,1+1}-$$

$$-F_1\varphi(q_{N_1-1/2,N_2-1/2})\psi_{N_1-1,N_2-1}+F_1\varphi(q_{1+1/2,N_2-1/2})\psi_{1+1,N_2-1}\Big)+$$

$$+\frac{h_1h_2}{2h_2}\Big(\sum_{i_2=2}^{N_2-2}F_2\varphi(q_{1+1/2,i_2+1/2})\big(\psi_{1+1,i_2+1}-\psi_{1+1,i_2}\big)+\sum_{i_1=2}^{N_1-2}F_2\varphi(q_{i_1+1/2,1+1/2})\big(\psi_{i_1+1,1+1}+\psi_{i_1,1+1}\big)+$$

$$+\sum_{i_2=2}^{N_2-2}F_2\varphi(q_{N_1-1/2,i_2+1/2})\big(\psi_{N_1-1,i_2+1}-\psi_{N_1-1,i_2}\big)+$$

$$+\sum_{i_1=2}^{N_1-2}F_2\varphi(q_{i_1+1/2,N_2-1/2})\big(-\psi_{i_1+1,N_2-1}-\psi_{i_1,N_2-1}\big)+$$

$$+F_2\varphi(q_{1+1/2,1+1/2})\psi_{1+1,1+1}+F_2\varphi(q_{N_1-1/2,1+1/2})\psi_{N_1-1,1+1}-F_2\varphi(q_{N_1-1/2,N_2-1/2})\psi_{N_1-1,N_2-1}-$$

$$-F_2\varphi(q_{1+1/2,N_2-1/2})\psi_{1+1,N_2-1}\Big)+h_1h_2\sum_{i_1=2}^{N_1-1}\sum_{i_2=2}^{N_2-1}(\tilde\varphi\ \psi)_{i_1,i_2}. \tag{3.15}$$

Для других типов узлов будем иметь следующие равенства.
Тип 1:

$$\frac{h_1h_2}{2}\sum_{i_2=2}^{N_2-1}(A\varphi\ \psi)_{1,i_2}=\frac{h_1h_2}{2h_1}\Big(\sum_{i_2=2}^{N_2-2}F_1\varphi(q_{1+1/2,i_2+1/2})\big(-\psi_{1,i_2+1}-\psi_{1,i_2}\big)-F_1\varphi(q_{1+1/2,1+1/2})\psi_{1,1+1}-$$

$$-F_1\varphi(q_{1+1/2,N_2-1/2})\psi_{1,N_2-1}\Big)+\frac{h_1h_2}{2h_2}\Big(\sum_{i_2=2}^{N_2-2}F_2\varphi(q_{1+1/2,i_2+1/2})\big(\psi_{1,i_2+1}-\psi_{1,i_2}\big)+$$

$$+F_2\varphi(q_{1+1/2,1+1/2})\psi_{1,1+1}-F_2\varphi(q_{1+1/2,N_2-1/2})\psi_{1,N_2-1}\Big)+\frac{h_1h_2}{2}\sum_{i_2=2}^{N_2-1}(\tilde\varphi\ \psi)_{1,i_2}. \tag{3.16}$$

Тип 2:

$$\frac{h_1h_2}{2}\sum_{i_1=2}^{N_1-1}(A\varphi\ \psi)_{i_1,1}=\frac{h_1h_2}{2h_1}\Big(\sum_{i_1=2}^{N_1-2}F_1\varphi(q_{i_1+1/2,1+1/2})\big(\psi_{i_1+1,1}-\psi_{i_1,1}\big)+F_1\varphi(q_{1+1/2,1+1/2})\psi_{1+1,1}-$$

$$-F_1\varphi(q_{N_1-1/2,1+1/2})\psi_{N_1-1,1}\Big) + \frac{h_1h_2}{2h_2}\Big(\sum_{i_1=2}^{N_1-2} F_2\varphi(q_{i_1+1/2,1+1/2})\big(-\psi_{i_1+1,1} - \psi_{i_1,1}\big) -$$

$$-F_2\varphi(q_{1+1/2,1+1/2})\psi_{1+1,1} - F_2\varphi(q_{N_1-1/2,1+1/2})\psi_{N_1-1,1}\Big) + \frac{h_1h_2}{2}\sum_{i_1=2}^{N_1-1}(\tilde{\varphi}\ \psi)_{i_1,1}. \qquad (3.17)$$

Тип 3:

$$\frac{h_1h_2}{2}\sum_{i_2=2}^{N_2-1}(A\varphi\ \psi)_{N_1,i_2} =$$

$$= \frac{h_1h_2}{2h_1}\Big(\sum_{i_2=2}^{N_2-2} F_1\varphi(q_{N_1-1/2,i_2+1/2})\big(\psi_{N_1,i_2+1} + \psi_{N_1,i_2}\big) + F_1\varphi(q_{N_1-1/2,1+1/2})\psi_{N_1,1+1} +$$

$$+F_1\varphi(q_{N_1-1/2,N_2-1/2})\psi_{N_1,N_2-1}\Big) + \frac{h_1h_2}{2h_2}\Big(\sum_{i_2=2}^{N_2-2} F_2\varphi(q_{N_1-1/2,i_2+1/2})\big(\psi_{N_1,i_2+1} - \psi_{N_1,i_2}\big) +$$

$$+F_2\varphi(q_{N_1-1/2,1+1/2})\psi_{N_1,1+1} - F_2\varphi(q_{N_1-1/2,N_2-1/2})\psi_{N_1,N_2-1}\Big) + \frac{h_1h_2}{2}\sum_{i_2=2}^{N_2-1}(\tilde{\varphi}\ \psi)_{N_1,i_2}. \qquad (3.18)$$

Тип 4:

$$\frac{h_1h_2}{2}\sum_{i_1=2}^{N_1-1}(A\varphi\ \psi)_{i_1,N_2} =$$

$$= \frac{h_1h_2}{2h_1}\Big(\sum_{i_1=2}^{N_1-2} F_1\varphi(q_{i_1+1/2,N_2-1/2})\big(\psi_{i_1+1,N_2} - \psi_{i_1,N_2}\big) - F_1\varphi(q_{N_1-1/2,N_2-1/2})\psi_{N_1-1,N_2} +$$

$$+F_1\varphi(q_{1+1/2,N_2-1/2})\psi_{1+1,N_2}\Big) + \frac{h_1h_2}{2h_2}\Big(\sum_{i_1=2}^{N_1-2} F_2\varphi(q_{i_1+1/2,N_2-1/2})\big(\psi_{i_1+1,N_2} + \psi_{i_1,N_2}\big) +$$

$$+F_2\varphi(q_{N_1-1/2,N_2-1/2})\psi_{N_1-1,N_2} + F_2\varphi(q_{1+1/2,N_2-1/2})\psi_{1+1,N_2}\Big) + \frac{h_1h_2}{2}\sum_{i_1=2}^{N_1-1}(\tilde{\varphi}\ \psi)_{i_1,N_2}. \qquad (3.19)$$

Тип 5:

$$\frac{h_1h_2}{4}(A\varphi\ \psi)_{1,1} = -\frac{h_1h_2}{2h_1}F_1\varphi(q_{1+1/2,1+1/2})\psi_{1,1} - \frac{h_1h_2}{2h_2}F_2\varphi(q_{1+1/2,1+1/2})\psi_{1,1} + \frac{h_1h_2}{4}(\tilde{\varphi}\ \psi)_{1,1}. \qquad (3.20)$$

Тип 6:

$$\frac{h_1h_2}{4}(A\varphi\ \psi)_{N_1,1} = \frac{h_1h_2}{2h_1}F_1\varphi(q_{N_1-1/2,1+1/2})\psi_{N_1,1} - \frac{h_1h_2}{2h_2}F_2\varphi(q_{N_1-1/2,1+1/2})\psi_{N_1,1} + \frac{h_1h_2}{4}(\tilde{\varphi}\ \psi)_{N_1,1}. \qquad (3.21)$$

Тип 7:

$$\frac{h_1h_2}{4}(A\varphi\ \psi)_{N_1,N_2} =$$

$$= \frac{h_1h_2}{2h_1}F_1\varphi(q_{N_1-1/2,N_2-1/2})\psi_{N_1,N_2} + \frac{h_1h_2}{2h_2}F_2\varphi(q_{N_1-1/2,N_2-1/2})\psi_{N_1,N_2} + \frac{h_1h_2}{4}(\tilde{\varphi}\ \psi)_{N_1,N_2}. \qquad (3.22)$$

Тип 8:

$$\frac{h_1h_2}{4}(A\varphi\ \psi)_{1,N_2}=$$
$$=-\frac{h_1h_2}{2h_1}F_1\varphi(q_{1+1/2,N_2-1/2})\psi_{1,N_2}+\frac{h_1h_2}{2h_2}F_2\varphi(q_{1+1/2,N_2-1/2})\psi_{1,N_2}+\frac{h_1h_2}{4}(\tilde{\varphi}\ \psi)_{1,N_2}. \qquad (3.23)$$

Складывая равенства (3.15)–(3.23) и приводя подобные слагаемые в правой части, получим требуемое равенство (3.14).

Лемма 3.2. *Для любых функций φ, ψ из пространства M имеет место равенство*

$$\big(F_1\varphi D_{q^1}\psi+F_2\varphi D_{q^2}\psi\big)(q_{i_1+1/2,i_2+1/2})=\big(F_1\psi D_{q^1}\varphi+F_2\psi D_{q^2}\varphi\big)(q_{i_1+1/2,i_2+1/2}).$$

Доказательство. Из определения операторов F_α имеем

$$\big(F_1\varphi D_{q^1}\psi+F_2\varphi D_{q^2}\psi\big)(q_{i_1+1/2,i_2+1/2})=$$
$$=\big((k_{11}D_{q^1}\varphi+k_{12}D_{q^2}\varphi)D_{q^1}\psi+(k_{12}D_{q^1}\varphi+k_{22}D_{q^2}\varphi)D_{q^2}\psi\big)(q_{i_1+1/2,i_2+1/2})=$$
$$=\big((k_{11}D_{q^1}\psi+k_{12}D_{q^2}\psi)D_{q^1}\varphi+(k_{12}D_{q^1}\psi+k_{22}D_{q^2}\psi)D_{q^2}\varphi\big)(q_{i_1+1/2,i_2+1/2})=$$
$$=\big(F_1\psi D_{q^1}\varphi+F_2\psi D_{q^2}\varphi\big)(q_{i_1+1/2,i_2+1/2}).$$

Теорема 3.1. *Оператор A является самосопряженным и положительно определенным в пространстве M, причем имеет место оценка*

$$d_1\ (\varphi,\varphi)\le(A\varphi,\varphi)\le(c_2l+d_2)(\varphi,\varphi),$$

где

$$d_1=\min_{q\in\overline{Q}}\frac{3J}{H^3},\quad d_2=\max_{q\in\overline{Q}}\frac{3J}{H^3},\quad l=\max\left(\frac{4}{h_1^2},\ \frac{4}{h_2^2}\right),$$
$$c_2=\max_{q\in\overline{Q}}\frac{k_{11}+k_{22}+\sqrt{(k_{11}-k_{22})^2+4k_{12}^2}}{2}.$$

Доказательство. Согласно леммам 3.1 и 3.2

$$(A\varphi,\psi)=h_1h_2\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\big(F_1\varphi D_{q^1}\psi+F_2\varphi D_{q^2}\psi\big)(q_{i_1+1/2,i_2+1/2})+(\tilde{\varphi},\psi)=$$
$$=h_1h_2\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\big(F_1\psi D_{q^1}\varphi+F_2\psi D_{q^2}\varphi\big)(q_{i_1+1/2,i_2+1/2})+(\tilde{\psi},\varphi)=(A\psi,\varphi),$$

что доказывает самосопряженность оператора.

Рассмотрим в области Q дифференциальный оператор

$$L=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial q^\beta}\right).$$

Нетрудно показать, что для произвольных $\zeta_1,\ \zeta_2$ имеет место оценка

$$c_1(\zeta_1^2+\zeta_2^2)\le\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}k_{\alpha\beta}\zeta_\alpha\zeta_\beta\le c_2(\zeta_1^2+\zeta_2^2),$$

где $c_1 = \min\limits_{q\in\overline{Q}} \dfrac{k_{11}+k_{22}-\sqrt{D}}{2}$, $\quad c_2 = \max\limits_{q\in\overline{Q}} \dfrac{k_{11}+k_{22}+\sqrt{D}}{2}$, $\quad D=(k_{11}-k_{22})^2+4k_{12}^2$. Если в $\overline{Q}$ выполняются неравенства $k_{11}>0$, $\quad k_{11}k_{22}>k_{12}^2$, то L является равномерно эллиптическим оператором и выполняется неравенство $c_1>0$.

Используя определения операторов F_α, имеем

$$(A\varphi,\varphi) = h_1h_2\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\big(F_1\varphi D_{q^1}\varphi + F_2\varphi D_{q^2}\varphi\big)(q_{i_1+1/2,i_2+1/2}) + (\tilde{\varphi},\varphi) =$$

$$= h_1h_2\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\Big((k_{11}D_{q^1}\varphi+k_{12}D_{q^2}\varphi)D_{q^1}\varphi+(k_{12}D_{q^1}\varphi+k_{22}D_{q^2}\varphi)D_{q^2}\varphi\Big)(q_{i_1+1/2,i_2+1/2})+(\tilde{\varphi},\varphi),$$

откуда следует, что

$$c_1h_1h_2\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\Big((D_{q^1}\varphi)^2+(D_{q^2}\varphi)^2\Big)(q_{i_1+1/2,i_2+1/2}) + d_1(\varphi,\varphi) \le (A\varphi,\varphi) \le$$

$$\le c_2h_1h_2\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\Big((D_{q^1}\varphi)^2+(D_{q^2}\varphi)^2\Big)(q_{i_1+1/2,i_2+1/2}) + d_2(\varphi,\varphi). \tag{3.24}$$

Рассмотрим в области Q следующую задачу Неймана:

$$-\Delta\varphi = 0, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_\Gamma = 0.$$

Аппроксимируем эту задачу на прямоугольной сетке с шагами h_1 и h_2 с помощью конечно-разностного оператора B, получаемого из оператора A путем замены коэффициентов на постоянные: $k_{11}=k_{22}=1,\ k_{12}=0,\ k_0=0$. Очевидно,

$$(B\varphi,\varphi) = h_1h_2\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\Big((D_{q^1}\varphi)^2+(D_{q^2}\varphi)^2\Big)(q_{i_1+1/2,i_2+1/2}).$$

Собственные значения оператора B имеют вид

$$\lambda_{n_1,n_2} = \frac{1}{h_1^2}(1-\cos\pi h_1n_1)(1+\cos\pi h_2n_2) + \frac{1}{h_2^2}(1+\cos\pi h_1n_1)(1-\cos\pi h_2n_2),$$

где $n_\alpha = 0,\ \ldots,\ N_\alpha-1$, при этом

$$\lambda_{\min}=0, \quad \lambda_{\max} = l = \max\left(\frac{4}{h_1^2},\ \frac{4}{h_2^2}\right),$$

то есть

$$0 \le (B\varphi,\varphi) \le l\ (\varphi,\varphi).$$

Таким образом, мы можем записать неравенство (3.24) в виде

$$c_1(B\varphi,\varphi)+d_1(\varphi,\varphi) \le (A\varphi,\varphi) \le c_2(B\varphi,\varphi)+d_2(\varphi,\varphi)$$

и, окончательно,

$$d_1\ (\varphi,\varphi) \le (A\varphi,\varphi) \le (c_2 l + d_2)(\varphi,\varphi),$$

что и требовалось доказать.

Разработанный алгоритм был применен для численного исследования процесса взаимодействия уединенной волны с плоской вертикальной стенкой, расположенной под некоторым углом к фронту волны, а также для моделирование течения, возникающего при разрушении дамбы, перегораживающей водоем [3]. Полученные результаты сравнивались с результатами расчетов по модели мелкой воды первого приближения и по модели потенциальных течений [4, 13, 15]. На основании проведенного сравнения можно сделать вывод о том, что разработанный алгоритм решения нелинейно-дисперсионных уравнений в достаточной мере продемонстрировал свою работоспособность, надежность и экономичность.

Список литературы

[1] Алешков Ю. З. *Теория взаимодействия волн с преградами.* ЛГУ, Л., 1990.

[2] Базденков С. В., Морозов Н. И., Погуцце О. Р. Дисперсионные эффекты в двумерной гидродинамике. *Докл. АН СССР*, **293**, 1987, 819–822.

[3] Барахнин В. Б., Хакимзянов Г. С. Численная реализация условий непротекания для одной нелинейно-дисперсионной модели мелкой воды. *Актуальные проблемы современной математики*, НИИ МИОО НГУ, Новосибирск, **3**, 1997, 3–13.

[4] Барахнин В. Б., Хакимзянов Г. С., Чубаров Л. Б., Шкуропацкий Д. А. Некоторые проблемы численного моделирования волновых режимов в огражденных акваториях. В *“Вычислительные технологии”*, ИВТ СО РАН, Новосибирск, **1**, №2, 1996, 3–25.

[5] Вольцингер Н. Е., Клеванный К. А., Пелиновский Е. Н. *Длинноволновая динамика прибрежной зоны.* Гидрометеоиздат, Л., 1989.

[6] Дорфман А. А., Яговдик Г. И. Уравнения приближенной нелинейно-дисперсионной теории длинных гравитационных волн, возбуждаемых перемещениями дна и распространяющихся в бассейне переменной глубины. *Числен. методы мех. сплошной среды*, **8**, №1, 1977, 36–48.

[7] Железняк М. И. Воздействие длинных волн на сплошные вертикальные преграды. В *“Накат цунами на берег”*, ИПФ АН СССР, Горький, 1985, 122–139.

[8] Железняк М. И., Пелиновский Е. Н. Физико-математические модели наката цунами на берег. *Там же*, 8–33.

[9] Марчук Ан. Г., Чубаров Л. Б., Шокин Ю. И. *Численное моделирование волн цунами.* Наука, Новосибирск, 1983.

[10] Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. *Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.* Наука, Новосибирск, 1985.

[11] Погорелов А. В. *Дифференциальная геометрия.* Наука, М., 1974.

[12] Федотова З. И. О свойствах разностных схем для длинноволновых приближений уравнений гидродинамики. В *“Вычислительные технологии”*, ИВТ СО РАН, Новосибирск, **2**, №7, 1993, 237–249.

[13] Хакимзянов Г. С. О численном моделировании на адаптивных сетках трехмерных течений жидкости с поверхностными волнами. В *“Тр. Всесоюзн. совещ. по числ. мет. волн. гидродин”*, Ростов-на-Дону, 1990, ВЦ СО АН СССР, Красноярск, 1991, 103–108.

[14] Шокин Ю. И., Чубаров Л. Б., Марчук Ан. Г., Симонов К. В. *Вычислительный эксперимент в проблеме цунами.* Наука, Новосибирск, 1989.

[15] Barakhnin V. B., Khakimzyanov G. S. Adaptive-grid numerical solution of one-dimensional and two-dimensional problems for the shallow-water equations. In *“Advanced Mathematics: Comput. and Appl. Proc. of AMCA-95”*, Novosibirsk, 1995, 144–153.

[16] Barakhnin V. B., Khakimzyanov G. S. On the application of adaptive grids to the numerical solution of one-dimensional problems in the shallow-water theory. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **10**, №5, 1995, 373–391.

[17] Eilbek J. C., McGuire G. R. Numerical study of the regularized long-wave equations, I. Numerical methods. *J. Comput. Phys.* **19**, №1, 1975, 43–57.

[18] Ertekin R. C., Webster W. C., Wehausen J. V. Waves caused by a moving disturbance in a shallow channal of finite width. *J. Fluid Mech.*, **169**, 1986, 275–292.

[19] Fedotova Z. I., Pashkova V. Yu. On the numerical modelling of the dynamics of weakly nonlinear waves with dispersion. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **10**, №5, 1995, 407–424.

[20] Green A. E., Naghdi P. M. A derivation of propagation in water of variable depth *J. Fluid Mech.*, **71**, 1976, 237–246.

[21] Kompaniets L. A. Analysis of difference algorithms for nonlinear dispersive shallow water models. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **11**, №3, 1996, 205–221.

[22] Peregrine D. H. Long waves on a beach. *J. Fluid Mech.*, **27**, pt. 4, 1967, 815–827.

[23] Seabra-Santos F. T., Renouard D. P., Temperville A. M. Numerical and experimental study of the transformation of a solitary wave over a shelf or isolated obstacle. *J. Fluid Mech.*, **176**, 1987, 117–134.

[24] Shokin Yu. I., Khakimzyanov G. S., Chubarov L. B. New potentialities of computational experiment in tsunami problem. In *“Proc. of the Int. Tsunami Symp., TSUNAMI’93”*, Wakayama, Japan, August 23–25, 1993, 277–284.

Поступила в редакцию 15 сентября 1996 г.