Об одной возможной вероятностной интерпретации интервальной величины*

Е. М. Бронштейн[1]

Предложена естественная вероятностная интерпретация понятия интервальной величины. Показано, что эта интерпретация приводит к противоречию при использовании операций сложения и умножения интервальных величин.

Ключевые слова: интервальная величина, сложение и умножение интервальных величин, равномерное распределение

Принятие решений обычно осуществляется в условиях неопределённости. В этой связи разрабатываются различные методы формального описания данного фактора. Традиционным инструментом такого типа является теория вероятностей, которая развивается уже несколько столетий. Для решения реальных задач теория вероятностей требует значительной (обычно недоступной) априорной информации. В середине XX в. появились иные подходы к описанию неопределённости, базирующиеся на менее обширной информации. К таковым относятся теория нечётких множеств и интервальный анализ. Логичным является вопрос: не являются ли данные теории некоторыми упрощёнными вариантами теории вероятностей? Для этого базовым понятиям указанных теорий необходимо сопоставить те или иные объекты теории вероятностей. В настоящем сообщении предложена одна из возможных (как представляется, весьма естественная) теоретико-вероятностная интерпретация базовых понятий интервального анализа; терминология интервального анализа следует монографии [1].

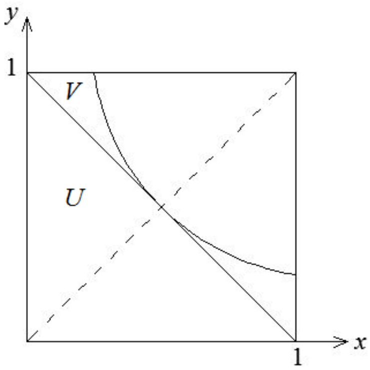
Формально [1] интервальной величиной называется упорядоченная пара $\lfloor a,\boldsymbol{a}\rceil$, где a — переменная, $\boldsymbol{a}$=$[\underline{a},\overline{a}]$($\underline{a}\leq\overline{a}$) — интервал возможных изменений переменной a. Предполагается, что все точки интервала $[\underline{a},\overline{a}]$ равноправны. Поэтому логичной представляется интерпретация интервальной величины $\lfloor a,\boldsymbol{a}\rceil$ как случайной величины, равномерно распределённой на данном интервале (т. е. с постоянной плотностью $1/(\underline{a}-\overline{a})$ при $\underline{a}<\overline{a}$).

В интервальном анализе определены алгебраические операции над интервальными величинами. Так, для интервальных величин $\lfloor a,\boldsymbol{a}\rceil$, $\lfloor b,\boldsymbol{b}\rceil$ ($\boldsymbol{b}$=$[\underline{b},\overline{b}]$($\underline{b}\leq\overline{b}$)), когда реально могут реализовываться любые элементы из прямого произведения $[\underline{a},\overline{a}]\times[\underline{b},\overline{b}]$ (независимые или несвязанные интервальные величины в терминологии [1] — не путать с независимостью случайных величин), интервал возможных изменений суммы интервальных величин имеет вид $[\underline{a}+\underline{b},\overline{a}+\overline{b}]$, произведения (при $\underline{a},\underline{b}\geq 0$) — $[\underline{a}\cdot\underline{b},\overline{a}\cdot\overline{b}]$.

Рассмотрим две несвязанные интервальные величины с интервалами возможных изменений $[0,1]$ и $[0,1]$. При предложенной вероятностной интерпретации этим величинам соответствуют равномерно распределённые случайные величины X,Y. Естественно полагать, что сумма и произведение интервальных величин, которые также являются

[1] *Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия*
Контактный e-mail: bro-efim@yandex.ru

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00005).



интервальными, допускают такую же интерпретацию. Тогда сумма $X+Y$ должна иметь равномерное распределение на отрезке $[0,2]$, а произведение XY — на отрезке $[0,1]$.

При независимости случайных величин X, Y сумма $X+Y$ не распределена равномерно. В частности, данный вопрос рассмотрен в [2]. Таким образом, можно попытаться найти такое вероятностное распределение двумерной случайной величины (X, Y) (с зависимыми компонентами), для которого распределены равномерно случайные величины $X+Y,\ XY$.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение. Не существует вероятностного распределения двумерной случайной величины (X, Y), определённой на квадрате $[0,1]^2$, для которой случайные величины $X+Y,\ XY$ распределены равномерно.

Доказательство. Пусть, напротив, такое распределение существует. Рассмотрим события $U = \{X+Y \le 2\sqrt{a}\},\ V = \{XY \le a\}$ при $a \in]0,1[$. В силу предполагаемой равномерности распределений их вероятности равны $\mathsf{P}(U) = \sqrt{a}$, $\mathsf{P}(V) = a$, откуда $\mathsf{P}(U) > \mathsf{P}(V)$.

На рисунке (см. выше) множества $U,\ V$изображены при $a = 0.5$. Выпуклая кривая $xy = a$ имеет единственную общую точку $(\sqrt{a},\ \sqrt{a})$ с прямой $x+y = 2\sqrt{a}$ (касательной), откуда следует, что $U \subseteq V$, а это противоречит предыдущему, поскольку вероятность является монотонным функционалом на множестве событий.

Предложение доказано.

Замечание. В предложении не предполагалась равномерность распределений маргинальных случайных величин X, Y.

Таким образом, рассмотренная естественная теоретико-вероятностная интерпретация интервальных величин несовместима с алгебраическими операциями, т. е. с этой точки зрения интервальный анализ является самостоятельным инструментом описания неопределённостей.

Автор благодарен С.П. Шарому за знакомство с основами интервального анализа и полезные дискуссии.

Список литературы

[1] Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. [Электронный ресурс] URL: http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf (дата обращения 10.09.2014).

[2] Шарый С.П. Интервальный анализ или методы Монте-Карло? // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12, № 1. С. 103–115.

Поступила в редакцию 26 апреля 2014 г.,
с доработки — 14 сентября 2014 г.

On one possible probabilistic interpretation of interval value

Bronshtein Efim M.[1]

Purpose is to check the hypothesis: “The interval analysis is equivalent to some special brunch of probability theory”. In particular, we associate with an interval variable the random value uniformly distributed on the appropriately defined interval.
Methodology. Addition and multiplication of interval variables are the standard operations in interval analysis. Natural sequence of our hypothesis is the same interpretation of the sum and product of interval variables. We consider the two-dimensional random value defined on the square $[0, 1]^2$ such that sum and product of martingale variables are uniformly distributed on intervals [0,1] and [0,2] respectively.
Findings. We have shown that the distribution with prescribed properties doesn't exist.
Originality/value. It means that our hypothesis isn't true, and interval analysis is in some sense independent of the probability theory.
Keywords: interval value, addition and multiplication of interval values, uniform distribution.

Received 26 April 2014
Received in revised form 14 September 2014

[1] *Ufa State Aviation Technical University, 450000, Ufa, Russia*
Corresponding author: e-mail: bro-efim@yandex.ru