

Математические модели гидроразрыва пласта

Д. В. ЕСИПОВ, Д. С. КУРАНАКОВ, В. Н. ЛАПИН, С. Г. ЧЁРНЫЙ
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: esipov@ict.sbras.ru, kuranakov@ict.sbras.ru,
lapin@ict.sbras.ru, cher@ict.nsc.ru

Есипов Д.В., Куранakov Д.С., Лапин В.Н., Черный С.Г. Математические модели гидроразрыва пласта // Вычисл. технологии. 2014. Т. 19, № 2. С. 33–61.

Проведён обзор математических моделей процесса гидроразрыва пласта. Рассмотрены наиболее широко используемые одно-, двух- и трёхмерные модели. Наряду со ставшими уже классическими в рассмотрение включены также и современные модели гидроразрыва. Моделирование гидроразрыва имеет ряд существенных особенностей, так как уравнения, которые описывают процессы, протекающие в ходе гидроразрыва, нелинейны и сильно взаимосвязаны. Эти факторы накладывают существенные ограничения на учёт влияния разнообразных технологических параметров, поэтому часть процессов в моделях обычно описывается упрощенно. Проведён обзор преимуществ и недостатков модельных подходов. Рассмотрены основные результаты, полученные при использовании представленных моделей.

Ключевые слова: гидроразрыв пласта, математическая модель, напряжённо-деформированное состояние породы, течение неньютоновской жидкости, критерии распространения трещины, коэффициенты интенсивности напряжений, нелинейная проблема.

Esipov D.V., Kuranakov D.S., Lapin V.N., Cherny S.G. Mathematical models of hydraulic fracturing // Comput. Technologies. 2014. Vol. 19, No. 2. P. 33–61.

A review of mathematical models for hydraulic fracturing is presented. Widely used one-, two- and three-dimensional models are considered. Both classical and modern models of hydraulic fracturing are described. Modeling of hydraulic fracturing has a number of significant peculiarities since the equations that describe the processes of hydraulic fracturing are non-linear and strongly interrelated. Analysis of the influence of technological parameters becomes difficult because of these peculiarities. Therefore, some of the processes are usually described simplistically. Advantages and disadvantages of simulation approaches are discussed in the review. The major results obtained by using the described models are included into the article.

Key words: hydraulic fracturing, mathematical model, stress-strain state of the rock, non-Newtonian fluid flow, fracture propagation criteria, stress intensity factors, nonlinear problem.

Введение

Для повышения отдачи нефтеносного пласта применяется технология формирования в нём трещины гидроразрыва, подробно описанная в [1]. Данная технология заключается в подаче в перфорированную скважину под высоким давлением жидкости гидроразрыва. Под действием давления жидкости в области перфораций около скважины ини-

цируется зародышевая трещина. Затем жидкость, надавливая на берега зародышевой трещины, заставляет её распространяться в нетронутый массив породы, как показано на рис. 1. Для закрепления раскрытия трещины через определённое время от начала подачи жидкости гидроразрыва в неё добавляются твёрдые частицы — пропант. После прекращения закачки смеси жидкости с твёрдыми частицами и фильтрационной утечки жидкости в породу раскрытие трещины происходит с учётом распределения вдоль неё пропанта. При этом пропускная способность закреплённой трещины существенно зависит как от её формы, так и от распределения пропанта.

Моделирование процесса гидроразрыва пласта — роста трещины с учётом потерь жидкости гидроразрыва на фильтрацию в пористую среду — и определение влияния примеси твёрдых частиц в жидкости на динамику раскрытия трещины и её конечную форму позволяют прогнозировать геометрию трещины и оптимизировать всю технологию данного процесса. Однако в наиболее общей постановке модель процесса гидроразрыва чрезвычайно сложна. Она объединяет в себе описание таких процессов, как течение смеси неньютоновской жидкости и твёрдых частиц внутри трещины, перенос и осаждение твёрдых частиц, фильтрация жидкости в породу через поверхность трещины, деформация породы в окрестности скважины и трещины, наконец, распространение трещины. Уравнения, описывающие перечисленные процессы, нелинейны, сильно взаимосвязаны и имеют разного рода особенности. Их совместное решение в двумерных, а особенно в трёхмерных задачах остаётся актуальной проблемой в силу плохой сходимости численных алгоритмов. Поэтому при создании модели приходится искать

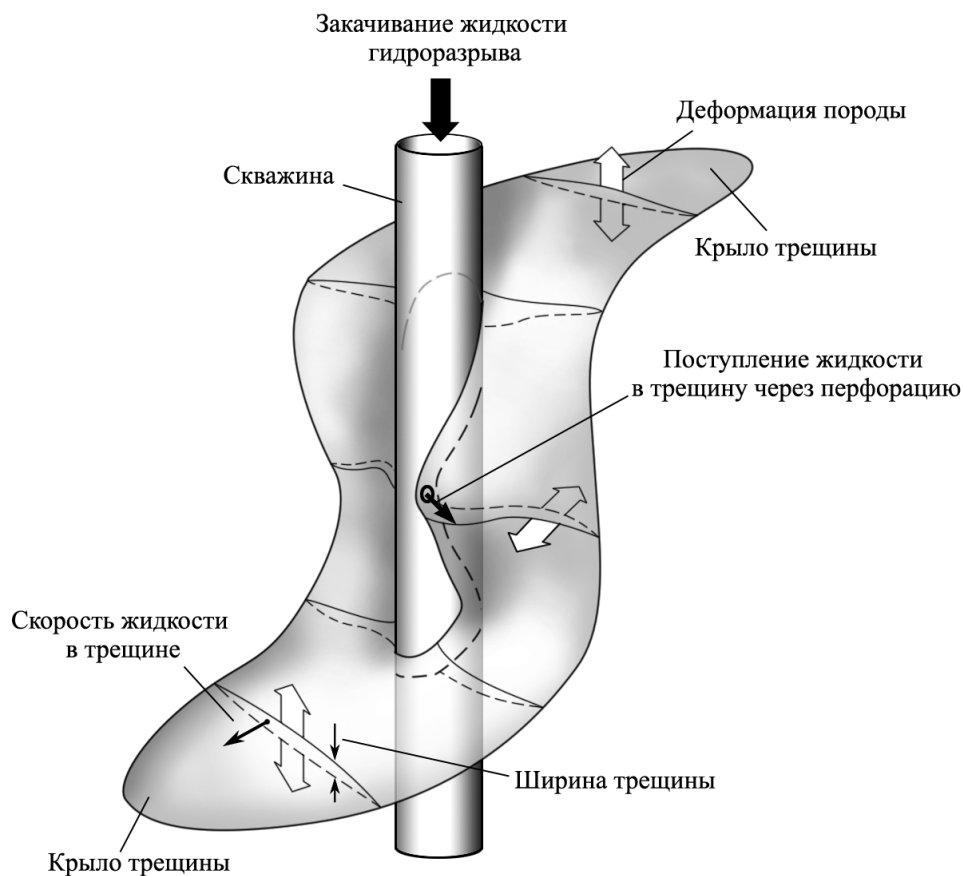


Рис. 1. Схематичная картина процесса гидроразрыва пласта

компромисс между вычислительной сложностью алгоритмов и детальностью описания каждого процесса. Развитие вычислительной техники позволяет совершенствовать модели, однако её современный уровень пока не позволяет отказаться от приближённого описания процессов или пренебрежения какими-либо из них. В наибольшей мере вычислительную сложность снижают упрощения при описании процессов деформации и разрушения породы, что существенно связано с трёхмерностью этого процесса в общем случае. Такие упрощения позволяют уменьшать размерность всей задачи.

По детальности описания деформации породы все модели гидроразрыва пласта можно разделить на четыре группы, характеризующиеся размерностью уравнений, описывающих деформацию породы под действием давления жидкости гидроразрыва. В одномерных моделях эти уравнения могут быть сведены либо к алгебраическому соотношению, связывающему избыточное давление в трещине с её шириной, либо к интегральному соотношению между данными величинами. В двумерных моделях деформация породы рассматривается в приближении плоского деформированного состояния породы, что увеличивает размерность подмодели упругости на единицу. Очевидно, что в случае псевдотрёхмерных и “полностью” трёхмерных моделей никакие существенные упрощения в подмодели упругости невозможны. Однако ввиду представления трещины как плоского разреза псевдотрёхмерные модели выделяются в отдельную группу.

В обзор включены ставшие уже классическими как в русско-, так и в англоязычной литературе одномерные модели, получившие свои названия по первым буквам фамилий авторов, последовательно их развивавших: модель KGD (Khristianovich, Geertsma, de Klerk), модель PKN (Perkins, Kern, Nordgren), радиальная модель и их современные улучшенные модификации. Основными путями совершенствования этих моделей является учёт 1) фильтрационных утечек жидкости гидроразрыва через стенки трещины в породу и 2) переноса и осаждения в трещине пропанта (примеси твёрдых частиц, необходимых для расклинивания трещины). Одномерные модели имеют два существенных недостатка: 1 — трещина в них рассматривается как плоский разрез и 2 — трещина распространяется только в продольном направлении. Несмотря на простоту этих моделей и их неспособность предсказывать результаты реальных гидроразрывов на достаточном уровне точности, они позволяют описывать взаимное влияние процессов фильтрации, течения жидкости, переноса пропанта, деформации и разрушения. Это делает их фундаментом для развития моделей каждого из процессов и оценки их влияния на качество описания поведения всей трещины.

Дальнейшее совершенствование моделей гидроразрыва направлено на устранение указанных недостатков. Рассмотрение искривления траектории трещины в горизонтальной плоскости позволило разработать двумерные модели гидроразрыва, а учёт наряду с продольным и вертикального распространения трещины привёл к созданию псевдотрёхмерных моделей. Известно, что учёт искривления траектории трещины от момента инициации последней до её выхода на магистральное направление распространения поперёк действия наименьших напряжений залегания очень важен с практической точки зрения [2]. Отметим также, что в псевдотрёхмерных моделях трещина остаётся плоской, а следовательно, распространяется только в одной плоскости. В обзоре рассмотрены и “полностью” трёхмерные модели, не получившие пока широкого применения, в силу высокой вычислительной трудоёмкости. Следует учесть, что ввиду сложности начальной геометрической конфигурации перфорированной скважины “полностью” трёхмерные модели гидроразрыва должны включать в себя подпроблему инициации зародышевых трещин, также представляющую практический интерес [2].

За последние три десятилетия в зарубежной печати появились несколько обзоров [3–9]. Однако все эти публикации в основном сосредоточены на рассмотрении классических моделей. В связи с развитием вычислительной техники, а следовательно, и численных методов в последнее время появилось немало новых подходов к моделированию процесса гидроразрыва. Одна из задач представленного обзора — отразить особенности современных подходов к моделированию данного процесса.

1. Одномерные модели

Одномерные модели характеризуются плоским симметричным представлением трещины гидроразрыва. Однако в зависимости от геометрической концепции, используемой в этих моделях, они могут быть отнесены к двум группам.

Первая группа состоит из моделей, описывающих прямолинейное распространение трещины, исходящее из линейного источника, как показано на рис. 2. Этот тип гидроразрыва может быть достигнут закачкой жидкости через большой отперфорированный интервал скважины, на котором сформировался линейный источник закачки. Следовательно, такие плоские трещины должны локализоваться в вертикальной плоскости, проходящей через ось скважины.

Вторая группа моделей описывает радиально симметричное распространение трещины из точечного источника, как показано на рис. 3. Этот тип гидроразрыва возможен при закачке через узкий окружной слой перфораций, при котором создаётся точечный источник закачки. Если исключить из рассмотрения эффекты силы тяжести, то плоскость распространения трещины в данном случае может располагаться под любым углом относительно оси скважины.

Отличительными особенностями моделей первой группы являются следующие [1, 4, 6, 7, 9]: 1 — наличие в задаче вертикальной плоскости симметрии, перпендикулярной

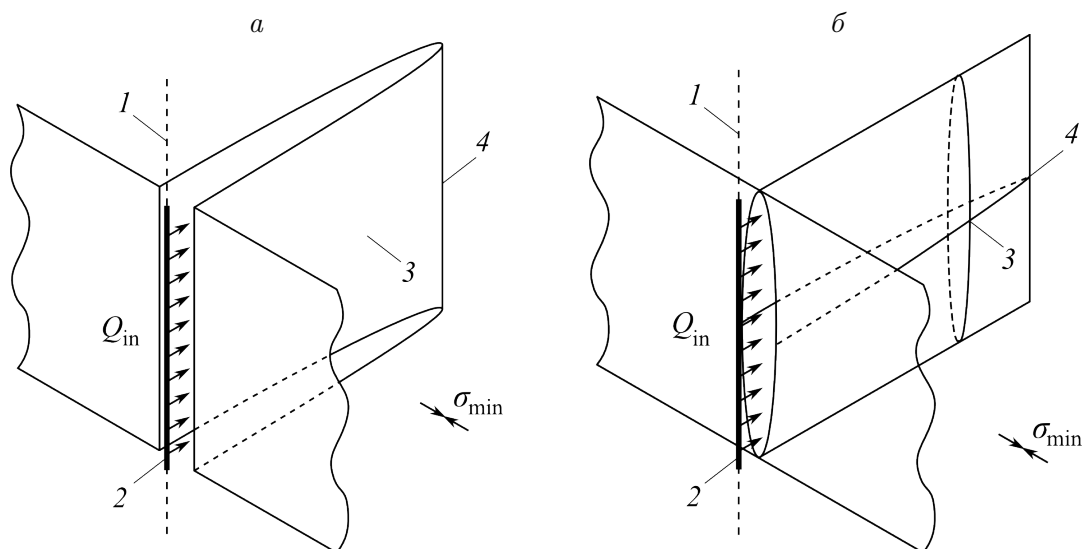


Рис. 2. Одно крыло трещины гидроразрыва в представлении KGD-модели (а) и PKN-модели (б) с прямолинейным распространением трещины из линейного источника: 1 — вертикальная ось скважины, 2 — линейный источник жидкости, 3 — плоское крыло трещины, 4 — кончик трещины

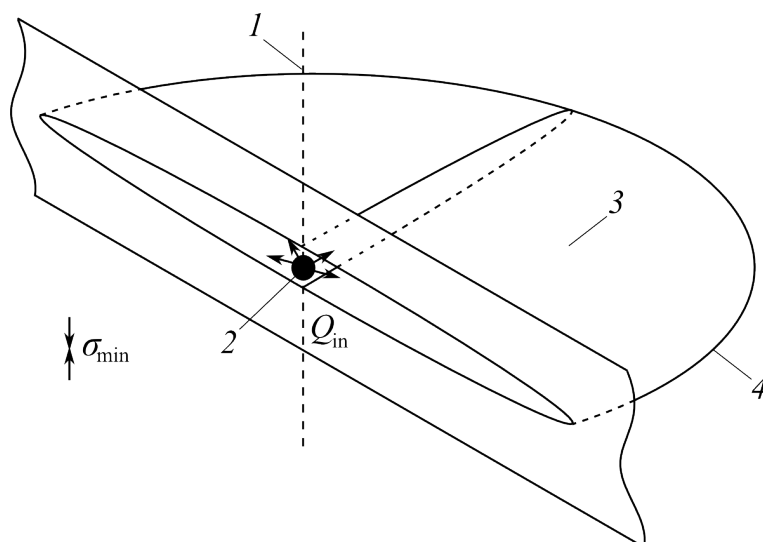


Рис. 3. Модель с радиально симметричным распространением трещины из точечного источника: 1 — ось скважины, 2 — точечный источник жидкости, 3 — плоскость распространения трещины, 4 — кончик трещины

направлению действия наименьших главных напряжений σ_{\min} залегания, вдоль которой распространяется трещина постоянной высоты; 2 — предположение о том, что течение жидкости гидроразрыва квазиодномерно вдоль длины трещины (причём учитывается переменность сечений трещины вдоль длины); 3 — трещина гидроразрыва состоит из двух разнонаправленных симметричных относительно скважины крыльев, что позволяет рассматривать только одно крыло трещины.

Модели второй группы также имеют отличительные особенности [1, 4, 6, 7, 9]: 1 — наличие в задаче горизонтальной плоскости симметрии, перпендикулярной направлению действия наименьших главных напряжений залегания σ_{\min} , вдоль которой трещина распространяется, 2 — наличие осевой симметрии в горизонтальной плоскости.

В обеих группах моделей утечка жидкости в породу описывается законом Картера [10] или простейшими уравнениями фильтрации в пористой среде [11–18], а деформация породы — однородной изотропной моделью упругости, которая сводится к простейшему алгебраическому соотношению, связывающему избыточное давление в трещине с её шириной в РКН-моделях, и интегральному соотношению между ними же в KGD-моделях.

1.1. Модель Христиановича — Гиртсма — де Клерка (KGD)

Основные принципы этой модели, в том числе геометрическая концепция, показанная на рис. 4, предложены Христиановичем и Желтовым в 1955 г. в работе [19] и затем развиты Гиртсма и де Клерком в [20]. Такая геометрическая концепция справедлива при допущении, что высота трещины значительно превышает её общую длину $2L$ и влиянием верхней и нижней границ можно пренебречь. Это позволяет считать горизонтальные сечения трещины одинаковыми и при описании деформации породы и её разрушения использовать двумерную постановку задачи упругости. Из квазистатического приближения и предположения об отсутствии сдвиговых напряжений на берегах прямолинейной трещины следует интегральное соотношение между её раскрытием W

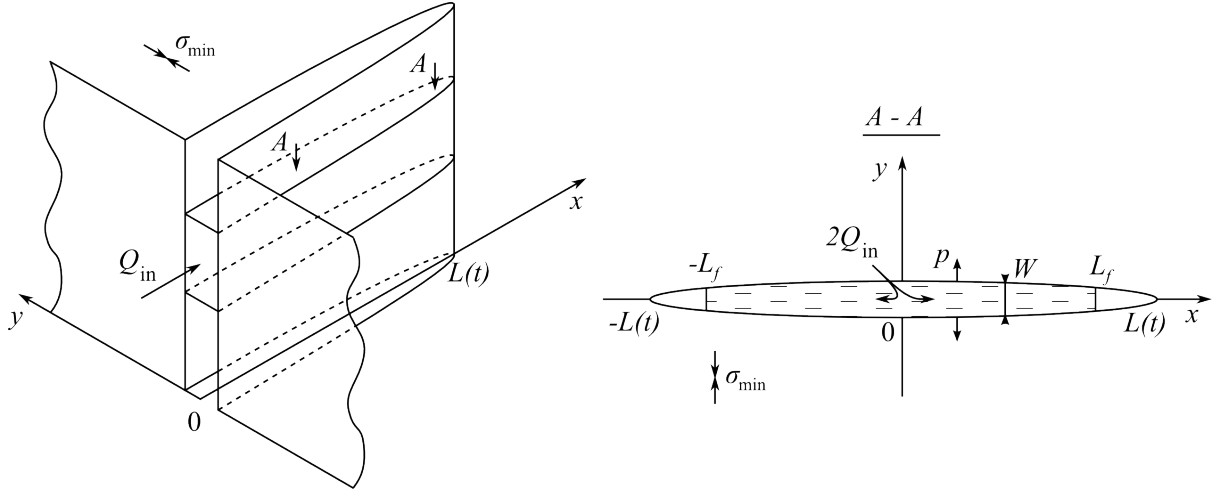


Рис. 4. Геометрическая концепция KGD-модели

и избыточным давлением жидкости

$$p_{\text{net}} = p - \sigma_{\text{min}} \quad (1)$$

в ней (см. подробнее [21])

$$W(x) = \frac{4}{\pi E'} \int_0^L p_{\text{net}}(\xi) \ln \left| \frac{\sqrt{(L^2 - x^2)} + \sqrt{(L^2 - \xi^2)}}{\sqrt{(L^2 - x^2)} - \sqrt{(L^2 - \xi^2)}} \right| d\xi. \quad (2)$$

Здесь E' — плоский модуль напряжений, связанный с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν , характеризующими упругие свойства породы, формулой

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad (3)$$

$L = L(t)$ — положение кончика крыла трещины, определяемое из известного критерия хрупкого распространения трещины [22] (о теории хрупкого распространения трещин см. подробнее в [23])

$$K_I = 2\sqrt{\frac{L}{\pi}} \int_0^L \frac{p_{\text{net}}(\xi)}{\sqrt{L^2 - \xi^2}} d\xi = K_{Ic}, \quad (4)$$

где K_I — коэффициент интенсивности напряжений для плоской трещины, нагруженной переменным давлением, K_{Ic} — его критическое значение (трещиностойкость), характеризующее типом породы. Условие (4) задаёт профиль раскрытия крыла трещины около кончика

$$W(x) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{K_{Ic}}{E'} \sqrt{L-x} + O\left((L-x)^{\frac{3}{2}}\right), \quad x \rightarrow L. \quad (5)$$

В работах [19, 20, 24, 25] полагается отсутствие трещиностойкости породы, тогда критерий распространения трещины аналогично (5) задаёт плавное смыкание берегов трещины в кончике [26], т. е.

$$\left. \frac{\partial W(x)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (6)$$

Отметим, что KGD-модели с иными критериями распространения, например с пластическим [27], не получили распространения.

Движение жидкости гидроразрыва в трещине описывается в одномерном приближении при пренебрежении инерцией, сжимаемостью жидкости и потерей импульса при её оттоке в породу. Областью течения жидкости считается интервал от нуля до фронта жидкости $L_f(t)$, положение которого в зависимости от варианта модели может как совпадать, так и не совпадать с положением кончика трещины $L(t)$. В последнем случае говорят об отставании фронта жидкости. Уравнение количества движения следует из решения задачи о течении ньютоновской жидкости между двумя параллельными плоскостями, разнесёнными на расстояние W (см. подробнее [28])

$$\frac{\partial p_{\text{net}}}{\partial x} = -\frac{12\mu}{W^2}u, \quad (7)$$

где μ — коэффициент динамической вязкости жидкости гидроразрыва, $u(x, t)$ — средняя скорость жидкости вдоль крыла трещины. Если ввести локальный расход жидкости через сечение x единичной высоты трещины $Q = Q(x, t)$, то уравнение (7) можно переписать как

$$\frac{\partial p_{\text{net}}}{\partial x} = -\frac{12\mu}{W^3}Q. \quad (8)$$

Уравнение неразрывности записывается в виде (см. подробнее [29])

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + Q_L = 0. \quad (9)$$

Здесь Q_L — величина утечки жидкости гидроразрыва через берега трещины в породу. В [19] и в ряде дальнейших работ [22, 25, 30–32] полагается её отсутствие: $Q_L(x, t) = 0$. В большинстве современных работ [20, 33] считается, что утечка Q_L подчиняется эмпирическому закону Картера [10]

$$Q_L(x, t) = \frac{2C_L}{\sqrt{t - t_{\text{exp}}(x)}}, \quad (10)$$

где C_L — коэффициент утечки, характеризующийся проницаемостью породы, $t_{\text{exp}}(x)$ — момент времени, в который фронт жидкости L_f прошёл точку x , т. е.

$$t_{\text{exp}}[L_f(t')] = t', \quad 0 \leq t' \leq t. \quad (11)$$

Другими словами, $t_{\text{exp}}(x)$ есть обратная к $L_f(t)$ функция. Если отставание фронта жидкости от кончика трещины отсутствует $L_f = L$, то $t_{\text{exp}}(x)$ есть обратная к $L(t)$ функция.

К системе уравнений (8) и (9) добавляются краевые условия. На скважине задаётся расход жидкости гидроразрыва в крыло трещины

$$Q(0, t) = Q_{\text{in}}(t). \quad (12)$$

Как правило, считается [19, 20, 24, 25, 30, 33], что жидкость занимает весь объём крыла трещины вплоть до её кончика. Тогда краевое условие в кончике крыла имеет вид

$$Q(L, t) = 0. \quad (13)$$

Из (12) и (13), используя уравнение (9) при предположении о постоянстве расхода Q_{in} закачиваемой в скважину жидкости, может быть получено известное уравнение баланса жидкости

$$Q_{in}t = \int_0^{L_f(t)} W(x, t)dx + \int_0^t \int_0^{L_f(\tau)} Q_L(x, \tau)dx d\tau. \quad (14)$$

Однако при такой постановке, учитывая $W(L) = 0$, следует, что давление жидкости гидроразрыва в кончике крыла трещины обращается в бесконечность [34]. Чтобы избежать этого, в ряде работ, посвящённых вычислительной реализации модели (см., например, [31]), предполагается наличие отставания фронта жидкости L_f от кончика трещины

$$L - L_f > 0. \quad (15)$$

Тогда положение фронта жидкости в крыле трещины L_f определяется из соотношения

$$Q(L_f, t) = 0, \quad (16)$$

а краевое условие на фронте жидкости принимает вид

$$p_{net}(L_f, t) = -\sigma_{min}. \quad (17)$$

Условие (17) задаёт нулевое полное давление на фронте жидкости. Заметим, что давление p_{net} на участке от L_f до L также полагается равным $-\sigma_{min}$. Из (12) и (16), используя уравнение (9), получим уравнение баланса жидкости (14) с учётом замены L_f на L .

Для замыкания поставленной задачи задаются начальные данные

$$\begin{aligned} L(0) &= L_0, & L_f(0) &= L_0, \\ W(x, 0) &= W_0, & 0 \leq x \leq L_0, \end{aligned} \quad (18)$$

где L_0 и W_0 — раскрытие и длина некоторой зародышевой трещины, необходимой для начала развития трещины. В работах [33, 35, 36] показано, что влияние конкретных значений этих параметров на распространение одномерных и двумерных трещин незначительно.

Обобщенная KGD-модель без отставания фронта жидкости от кончика трещины описывается интегральным соотношением (2), условием (4) или (5), уравнениями (8) и (9), двумя из трёх краевыми условиями (12), (13) и (14) и начальными данными (18). Заметим, что при этом считается $K_{Ic} > 0$. Обобщенная KGD-модель с отставанием фронта жидкости от кончика трещины описывается интегральным соотношением (2), условием (4) или (5), уравнениями (8) и (9), тремя краевыми условиями (12), (16) и (17) и начальными данными (18). В отсутствие трещиностойкости породы условие (4) или (5) в модели заменяется на более простое условие (6).

При значительных упрощениях в [19] впервые были получены кривые раскрытия трещины вдоль её длины. Установлено, что давление в скважине с течением времени резко уменьшается (рис. 5, а). На рис. 5, б приведено обезразмеренное раскрытие трещины Ω при отсутствии утечек ($Q_L = 0$)

$$\Omega(\xi) = \frac{W(\xi)}{W(0)}, \quad \xi = \frac{x}{L}. \quad (19)$$

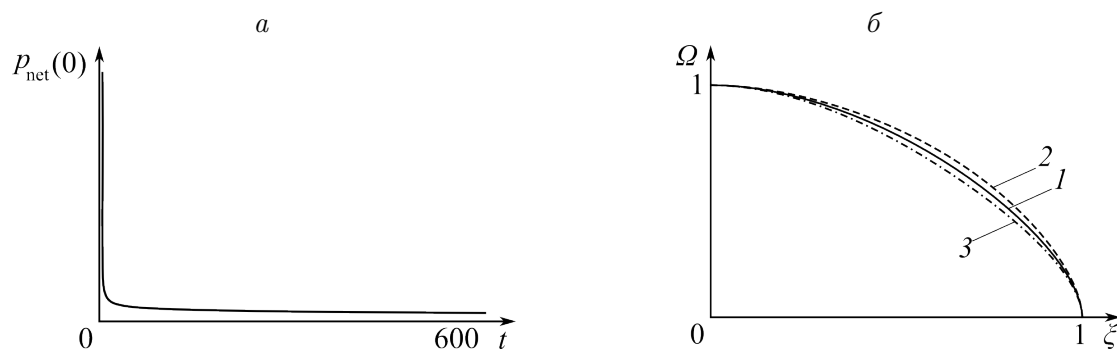


Рис. 5. Поведение избыточного давления $p_{\text{net}}(0)$ (а) и безразмерное раскрытие трещины Ω (б) в зависимости от расхода: $Q_{\text{in}} = 1$ (1), 10 (2), 100 (3)

В работе [30] было установлено, что при отсутствии утечки (10) весь процесс гидроразрыва оказывается равновесным, т. е. в каждый момент времени определён параметрами состояния независимо от предыстории. В [33] получено, что при больших временах развития трещины её поведение в основном определяется величиной утечки жидкости гидроразрыва в породе.

KGD-модель включает в себя механику трещиностойкости породы (4). В [33] показано, что при больших временах трещиностойкость влияет исключительно на профиль раскрытия крыла трещины около её кончика. Концепция отставания жидкости от кончика трещины является важным элементом механики последнего (15). В работах [34, 37–39] это явление рассмотрено отдельно и установлено, что наличие отставания фронта жидкости от кончика трещины влияет только на профиль раскрытия крыла трещины около её кончика при достаточно больших длинах L .

Отметим, что в [24] было предложено более реалистичное представление жидкости гидроразрыва как неньютоновской со степенной реологией (псевдопластическая жидкость). В таком случае уравнение количества движения (8) принимает вид

$$\frac{\partial p_{\text{net}}}{\partial x} = -\frac{2^{n+1}(2n+1)^n}{n^n} \frac{\mu}{W^{2n+1}} Q^n, \quad (20)$$

где n — показатель степени в уравнении связи напряжений со скоростями деформации, μ — мера консистенции жидкости, имеющая физический смысл, аналогичный вязкости ньютоновской жидкости, но отличающаяся от неё размерностью: $\text{Па} \cdot \text{с}^n$ вместо $\text{Па} \cdot \text{с}$. В такой постановке без запаздывания фронта жидкости (15) в [25] были найдены автомодельные решения и получено, что увеличение показателя n приводит к увеличению скорости распространения трещины гидроразрыва.

Ряд работ по изучению KGD-модели, посвящён поиску автомодельных решений, допускаемых моделью при разнообразных предположениях (см., например, [32]).

1.2. Модель Перкинса — Керна — Нордгрена (РКН)

Перкинс и Керн в работе [40] предложили иную концепцию гидроразрыва, отличающуюся от предложенной в KGD-модели. Предполагается, что трещина гидроразрыва имеет постоянную высоту H , значительно меньшую общей длины трещины $2L$,

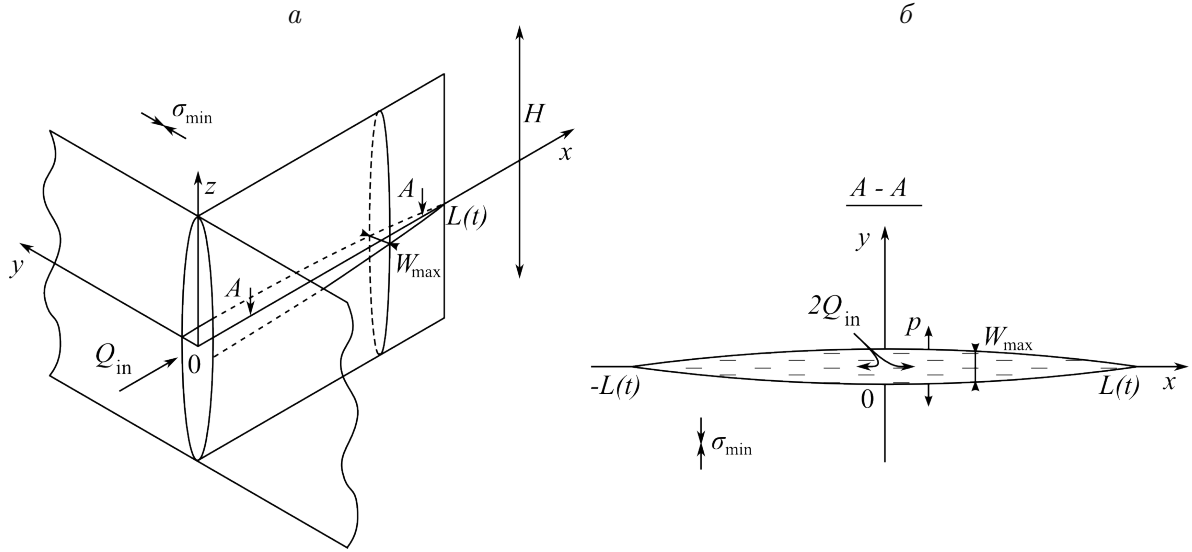


Рис. 6. Геометрическая концепция РКН-модели: в вертикальных плоскостях $x = \text{const}$, перпендикулярных к плоскости трещины (а), в условиях плоской деформации сечения трещины принимают эллиптическую форму (б)

как показано на рис. 6. При таком допущении изменение параметров трещины вдоль её длины незначительно и деформацию породы можно рассматривать в каждом вертикальном сечении $x = \text{const}$ изолированно, как плоское деформированное состояние. Тогда, предполагая постоянство избыточного давления p_{net} внутри каждого вертикального сечения $x = \text{const}$ трещины, получим эллиптический профиль раскрытия трещины в этом сечении [41]

$$W(z) = \frac{4}{E'} p_{\text{net}} \sqrt{\frac{H^2}{4} - z^2}. \quad (21)$$

В силу указанного предположения для каждого сечения выполняется соотношение (21), из которого следует следующая связь между максимальным раскрытием трещины W_{max} и избыточным давлением p_{net} в сечении $x = \text{const}$:

$$W_{\text{max}}(x) = \frac{2H}{E'} p_{\text{net}}(x). \quad (22)$$

Кроме того, решение задачи о стационарном течении ньютоновской жидкости в цилиндрической трубе с эллиптическим сечением, имеющим оси H и W_{max} , дает соотношение [28]

$$\frac{\partial p_{\text{net}}}{\partial x} = -\frac{64\mu}{\pi} \left(\frac{1}{W_{\text{max}} H^3} + \frac{1}{W_{\text{max}}^3 H} \right) Q_{\text{in}}, \quad (23)$$

где Q_{in} — не зависящий от времени расход жидкости через поперечное сечение трубы. В силу малости ширины W_{max} по сравнению с H первое слагаемое в скобках (23) отбрасывается

$$\frac{\partial p_{\text{net}}}{\partial x} = -\frac{64\mu}{\pi W_{\text{max}}^3 H} Q_{\text{in}} \quad (24)$$

и полученное уравнение (24) вместе с (22) образуют модель Перкинса — Керна [40].

Подстановка W_{\max} из (22) в (24) даёт в случае отсутствия зависимости от времени обыкновенное дифференциальное уравнение

$$p_{\text{net}}^3 \frac{\partial p_{\text{net}}}{\partial x} = -\frac{8\mu Q_{\text{in}}(E')^3}{\pi H^4}. \quad (25)$$

К (25) добавляется граничное условие на кончике крыла трещины L

$$p_{\text{net}}(L) = 0, \quad (26)$$

которое согласно (22) определяет смыкание берегов трещины в кончике. Интегрированием (25) от кончика трещины к скважине получим зависимость избыточного давления от координаты x

$$p_{\text{net}}(x) = \frac{2}{H} \left[\frac{2\mu Q_{\text{in}}(E')^3}{\pi} (L-x) \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (27)$$

Из (22) с учётом (27) следует зависимость максимальной ширины эллиптического сечения трещины от расстояния до скважины

$$W_{\max}(x) = 4 \left[\frac{2\mu Q_{\text{in}}}{\pi E'} (L-x) \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (28)$$

Таким образом, в модели Перкинса — Керна форма профиля раскрытия трещины не зависит от времени и весь процесс гидроразрыва является равновесным.

Недостатками модели Перкинса — Керна [40] являются отсутствие в ней учёта утечек жидкости в породу через стенки трещины и невозможность описывать изменение объёма трещины и определять её длину. Они были исключены Нордгреном [42] добавлением к уравнениям Перкинса — Керна нестационарного уравнения неразрывности течения несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \tilde{Q}_L = 0, \quad (29)$$

где A — площадь поперечного сечения трещины $x = \text{const}$

$$A = \frac{1}{4} \pi H W_{\max}. \quad (30)$$

Здесь Q — объёмный расход жидкости через это сечение, \tilde{Q}_L — объёмный расход жидкости в породу на единицу длины трещины. Последний подчиняется закону Картера (10)

$$\tilde{Q}_L = H Q_L. \quad (31)$$

Отметим, что при рассмотрении случая с нулевыми утечками модель РКН не переходит в модель Перкинса — Керна, так как расход жидкости вдоль длины трещины варьируется из-за присутствия в уравнении (29) слагаемого $\frac{dA}{dt}$. Уравнение количества движения в модели РКН следует из (24) заменой в нём постоянного расхода Q_{in} на локальный $Q(x, t)$

$$\frac{\partial p_{\text{net}}}{\partial x} = -\frac{64\mu}{\pi W_{\max}^3 H} Q. \quad (32)$$

Таким образом, в нестационарную РКН-модель входят уравнения неразрывности (29) и количества движения (32) для жидкости, а также упругое соотношение между максимальной шириной трещины W_{\max} в сечении $x = \text{const}$ и избыточным давлением в этом сечении p_{net} (22). Подстановка выражения для p_{net} из (22) в (32) даёт связь между локальным расходом Q и максимальной шириной W_{\max}

$$Q = -\frac{\pi E'}{512\mu} \frac{\partial W_{\max}^4}{\partial x}. \quad (33)$$

Заменяя A и Q в (29) выражениями (30) и (33) соответственно, получим дифференциальное уравнение для W_{\max}

$$\frac{\partial W_{\max}}{\partial t} - \frac{E'}{128\mu H} \frac{\partial^2 W_{\max}^4}{\partial x^2} + \frac{4}{\pi} Q_L = 0. \quad (34)$$

Для замыкания уравнения (34) для крыла трещины задаются начальные данные

$$W_{\max}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L', \quad (35)$$

и краевые условия

$$-\frac{\pi E'}{512\mu} \frac{\partial W_{\max}^4}{\partial x} \Big|_{x=0} = Q_{\text{in}}, \quad W_{\max} \Big|_{x=L'} = 0. \quad (36)$$

В (35) и (36) величина $L' > L(t)$ является правой границей области моделирования процесса гидроразрыва.

Следует обратить внимание на то, что система (34)–(36) замкнута. Длина трещины $L(t)$ в ней заменена правой границей области моделирования $L'(t)$ и уравнение для её определения отсутствует. Заметим, что уравнение (34) имеет параболический тип и, следовательно, влияние граничных условий должно распространяться на всю область решения. Следовательно, положение правой границы должно влиять на решение. Однако возмущения от неё очень быстро затухают. Поэтому длина $L(t)$ определяется в процессе решения как минимальная координата, в которой достигается нулевая ширина $W_{\max}(L) = 0$, т. е. расстояние, на котором эти возмущения заметны. Считается, что между кончиком трещины $L(t)$ и точкой L' трещина остается закрытой

$$W(x, t) = 0, \quad L(t) \leq x \leq L'. \quad (37)$$

Благодаря усовершенствованию Нордгрена РКН-модель дала зависимости длины трещины L , ширины трещины W_{\max} и давления p_{net} на скважине от времени развития трещины. В общем случае эти зависимости могут быть получены численно. Если же рассматривать предельные случаи, то можно найти указанные зависимости в явном виде. Для случая больших утечек или больших времен развития гидроразрыва в [42] получены формулы

$$L(t) = \frac{2Q_{\text{in}}}{\pi C_L H} t^{1/2}, \quad (38)$$

$$W_{\max}(0, t) = 8 \left[\frac{\mu Q_{\text{in}}^2}{\pi^3 E' C_L H} \right]^{1/4} t^{1/8}, \quad (39)$$

$$p_{\text{net}}(0, t) = 4 \left[\frac{(E')^3 \mu Q_{\text{in}}^2}{\pi^3 C_L H^5} \right]^{1/4} t^{1/8}. \quad (40)$$

При отсутствии утечки или маленьких временах развития там же получены следующие зависимости:

$$L(t) = 0.68 \left[\frac{4E'Q_{in}^3}{\mu H^4} \right]^{1/5} t^{4/5}, \quad (41)$$

$$W_{\max}(0, t) = 2.5 \left[\frac{8\mu Q_{in}^2}{E'H} \right]^{1/5} t^{1/5}, \quad (42)$$

$$p_{\text{net}}(0, t) = 2.5 \left[\frac{(E')^4 Q_{in}^2}{4H^6} \right]^{1/5} t^{1/5}. \quad (43)$$

Показано, что величина утечки жидкости гидроразрыва в породе определяет в целом поведение трещины гидроразрыва.

Несмотря на то что обе модели РКН и KGD являются одномерными, обратим внимание на существенное отличие, позволяющее разделять РКН- и KGD-подобные модели между собой. В РКН-модели связь раскрытия трещины и давления локальна — раскрытие в каждой точке трещины зависит только от давления в этой точке (22). Это позволяет свести систему уравнений модели к одному дифференциальному уравнению или к системе уравнений. В KGD-, как и в радиальной модели, которая будет описана ниже, эта связь глобальна — раскрытие трещины в каждой точке зависит от распределения давления вдоль всей трещины (2). Это приводит к появлению связанных интегродифференциальных уравнений, которые решаются либо итерационными методами, либо, в частных случаях, аналитически [30, 33].

В РКН-модели трещиностойкость породы не учитывается. Считается, что жидкость гидроразрыва заполняет всю трещину вплоть до кончика. В кончике трещины не возникает сингулярных напряжений. Таким образом, в данной модели механика кончика трещины не рассматривается.

Учёт псевдопластической реологии в модели РКН (как и в модели KGD (20)) оказался весьма сложным [43] и не получил распространения.

1.3. Гибридная РКН—KGD-модель с фильтрационными утечками жидкости в породе

Одним из важных направлений совершенствования моделей гидроразрыва является уточнение расчёта потерь жидкости в породе, так как именно этот процесс определяет объём трещины. Одномерные модели наиболее подходят для разработки новых подходов к описанию данного процесса. В работах [11, 12] рассмотрена одномерная модель гидроразрыва, в которой предложена подмодель потерь жидкости, основанная на описании фильтрации жидкости в породе в поршневом приближении. В качестве базовой принята модель с локальной связью раскрытия трещины с давлением (как в РКН-модели) (22), в которой для описания движения жидкости между двумя пластинами используются уравнения количества движения (8) и неразрывности (9) (как в KGD-модели). Для этого авторы [11, 12] проинтегрировали соотношение (21) по z от $-H/2$ до $H/2$ и получили соотношение между площадью поперечного эллиптического сечения A и избыточным давлением в сечении p_{net}

$$A = \frac{\pi p_{\text{net}} H^2}{2E'}. \quad (44)$$

Затем было введено среднее раскрытие трещины

$$W = \frac{A}{H} \quad (45)$$

и получена связь между избыточным давлением p_{net} и средней шириной

$$W = \frac{\pi H}{2E'} p_{\text{net}}. \quad (46)$$

Видно, что здесь используется не максимальное раскрытие трещины W_{max} , а осреднённое по высоте W

$$W = W_{\text{max}} \frac{\pi}{4}. \quad (47)$$

Далее, считая вертикальное поперечное сечение трещины прямоугольным с шириной W и высотой H , в работах [11, 12] воспользовались уравнениями движения жидкости, полученными для KGD-модели — неразрывности (9) и количества движения (8), характерными для течений между параллельными разнесёнными на расстояние W поверхностями.

Не касаясь вопроса физической обоснованности такой гибридной модели, обратим внимание на усложнения, используемые в ней, и главным образом на одномерное моделирование величины утечек жидкости гидроразрыва в породе.

Закон Картера утечки жидкости (10) заменён поршневым механизмом проникновения жидкости гидроразрыва в породу. Считается, что порода в окрестности трещины пропитывается жидкостью гидроразрыва на глубину Y , как изображено на рис. 7. Движение в зоне проникновения считается одномерным и описывается уравнениями

$$v_r = v_r(t), \quad (48)$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial y} = -\frac{\mu}{k} v_r, \quad (49)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = v_r, \quad (50)$$

где v_r — скорость жидкости в породе по нормали к берегам трещины, p_r — избыточное давление жидкости гидроразрыва в породе, k — проницаемость породы. Для замыкания уравнений (48), (49) и (50) на берегу трещины задаётся условие

$$p_r \Big|_{y=W/2} = p_{\text{net}}, \quad (51)$$

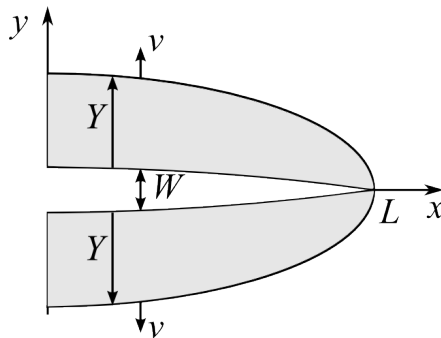


Рис. 7. Зона проникновения жидкости гидроразрыва в породу

а на границе зоны проникновения полагается

$$p_r \Big|_{y=W/2+Y} = 0. \quad (52)$$

Из решения задачи (48)–(52) находится $v_r(t)$ и в (9) полагается $Q_L = 2v_r$. К уравнениям (8), (9) и (46) добавляются граничные условия (12) и (26).

Следует отметить, что эмпирический закон Картера является приближением для предложенного в работах [11, 12] поршневого механизма. Действительно, если пренебречь изменением давления в трещине во времени ($p_{\text{net}} = \text{const}$), то уравнение (49) с граничными условиями (51), (52) даёт связь скорости фильтрации с избыточным давлением

$$v_r = \frac{p_{\text{net}} k}{\mu Y}. \quad (53)$$

Из (50), (53) и условия $Y(t_{\text{exp}}) = 0$ следуют выражения для глубины зоны проникновения

$$Y = \sqrt{\frac{2p_{\text{net}} k}{\mu} t_{\text{exp}}} \quad (54)$$

и скорости потерь

$$v_r = \sqrt{\frac{2p_{\text{net}} k}{\mu} \frac{1}{\sqrt{t - t_{\text{exp}}}}}, \quad (55)$$

при этом (55) соответствует закону Картера (10) со значением эмпирического коэффициента

$$C_L = \sqrt{\frac{2p_{\text{net}} k}{\mu}}. \quad (56)$$

В работах [11, 12] найдены автомодельные решения поставленной задачи при малых и больших утечках жидкости гидроразрыва. В первом случае решение задачи стремится к решению согласно РКН-модели. При больших утечках скорость роста и раскрытие трещины значительно уменьшаются. Отметим, что в [13] модель усовершенствована путём учёта псевдопластической реологии жидкости (20). Показано, что использование жидкости псевдопластической реологии в описанной в данном разделе модели позволяет ускорить распространение трещины гидроразрыва.

1.4. Гибридная РКН–KGD-модель с фильтрационными утечками жидкости гидроразрыва и наличием примеси пропанта

Рассмотренная выше гибридная РКН–KGD-модель с фильтрацией жидкости в пласт в [14, 15] дополнена односкоростным приближением движения жидкости с частицами пропанта, имеющими постоянную по всей длине трещины объёмную концентрацию α , с целью определить влияние примеси частиц в жидкости гидроразрыва на динамику раскрытия трещины и её конечную форму.

Считается, что вследствие просачивания жидкости гидроразрыва в пласт взвешенные частицы подходят к берегам трещины и, коснувшись стенки, “прилипают” к ней, образуя слой пропанта, как показано на рис. 8. Дополнительно к описанным в гибридной РКН–KGD-модели с фильтрационными утечками жидкости в породе величинам

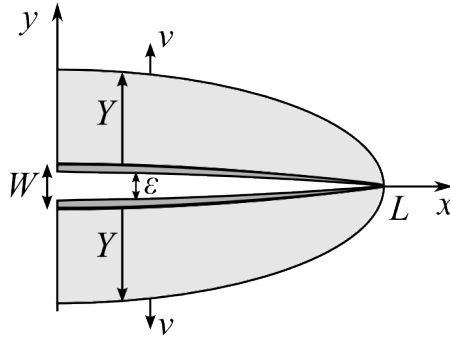


Рис. 8. Зона проникновения жидкости гидроразрыва в породу и тонкий слой пропанта, “прилипшего” к стенкам трещины

вводятся скорость налипания частиц на стенку ω , пористость породы β и скорость жидкости гидроразрыва по нормали из трещины v . Из условия непрерывности потока частиц через границу смесь — слой прилипших частиц следует равенство

$$\alpha(v + \omega) = \omega, \quad (57)$$

дающее соотношение

$$\omega = \frac{\alpha}{1 - \alpha} v. \quad (58)$$

Из условия непрерывности потока жидкости через слой прилипших частиц получим зависимость

$$(1 - \alpha)(v + \omega) = \beta v_r, \quad (59)$$

дающую с учётом (58) соотношение

$$v_r = \frac{1}{\beta} v. \quad (60)$$

В этом случае уравнение неразрывности (9) с учётом осаждения частиц на стенки принимает вид

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + Q_L = 0, \quad (61)$$

где ε — ширина трещины W за вычетом двух толщин прилипших к её стенкам частиц, а величина утечки жидкости гидроразрыва определяется по формуле

$$Q_L = 2(v + \omega). \quad (62)$$

Движение в зоне проникновения, как и в гибридной PKN–KGD-модели, считается с фильтрационными утечками жидкости в породу (48)–(52). В силу граничных условий (51) и (52) из (49) получим уравнение

$$v_r = \frac{kp_{\text{net}}}{\mu Y}, \quad (63)$$

которое с учётом (50) преобразуется к виду

$$\frac{\partial Y^2}{\partial t} = \frac{2kp_{\text{net}}}{\mu}. \quad (64)$$

Ещё одно уравнение следует из определения ω

$$2\omega = \frac{\partial}{\partial t}(W - \varepsilon). \quad (65)$$

Из (58), (60) и (50) найдём соотношение

$$2\omega = \frac{2\alpha\beta}{1-\alpha} \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad (66)$$

подставим его в (65) и, проинтегрировав полученное уравнение с учётом начальных условий при $t = 0$

$$W = \varepsilon = Y = 0, \quad (67)$$

получим

$$\varepsilon = W - \frac{2\alpha\beta}{1-\alpha} Y. \quad (68)$$

Затем, исключая v и ω из (62), найдём выражение для утечки

$$Q_L = \frac{2\beta k p_{\text{net}}}{(1-\alpha)\mu Y}. \quad (69)$$

Окончательно модель работы [14] состоит из уравнений (8), (61), (63), (68), (69) и граничных условий на входе в крыло трещины (12) и на кончике трещины

$$W \Big|_{x=L(t)} = 0. \quad (70)$$

В [14] также были найдены автомодельные решения задачи. Показано, что присутствие частиц в жидкости гидроразрыва замедляет рост трещины. Величина объёмного содержания частиц в закачиваемой смеси существенно влияет на время заполнения трещины и в меньшей мере — на её конечную форму. В работе [15] был рассмотрен режим распространения трещины гидроразрыва с заданным давлением нагнетания

$$p_{\text{net}} \Big|_{x=0} = p_{\text{in}}. \quad (71)$$

Установлено, что такое условие ограничивает рост трещины. Раскрытая трещина, начиная с её кончика, целиком заполняется пропантом.

1.5. Гибридная PKN—KGD-модель с фильтрационными утечками жидкости гидроразрыва, расширенная уравнением пьезопроводности в области вне трещины и уравнением переноса пропанта в трещине

В работе [16] гибридная PKN—KGD-модель с фильтрационными утечками жидкости гидроразрыва в породе усовершенствована путём замены поршневого механизма учётом изменения пластового давления жидкости при её вытеснении жидкостью гидроразрыва в породе. Проникновение в этом случае считается одномерным и квазистационарным, а движение в удалённой части пласта описывается уравнением упругого режима фильтрации. Модель проникновения состоит из уравнения неразрывности для течения

в зоне проникновения (50) и уравнения движения в слое проникновения (49). На поверхности трещины используется граничное условие (51), а на фронте проникновения жидкости гидроразрыва в породе — условие

$$p_r \Big|_{y=W/2+Y} = p_Y, \quad (72)$$

где давление на фронте проникновения p_Y определяется интегральным соотношением, связанным с интенсивностью утечки v_r :

$$p_Y(x, t) = p^0 + \frac{\mu}{2\pi k} \int_0^t \int_{-L(\tau)}^{L(\tau)} \frac{v_r(\xi, \tau)}{t - \tau} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4\alpha(t - \tau)}\right) d\xi d\tau. \quad (73)$$

Здесь p^0 — пластовое давление, α — коэффициент пьезопроводности пласта. Интегральное соотношение (73) получается из решения уравнения пьезопроводности для плоской трещины в предположении, что зона проникновения толщиной Y (см. рис. 7) достаточно мала. Уравнение пьезопроводности получается из уравнений фильтрации жидкости, подчиняющихся закону Дарси при постоянных проницаемости породы и вязкости жидкости [29].

Кроме того, в рассматриваемую модель добавлена односкоростная подмодель переноса пропанта в трещине, состоящая из одномерного уравнения неразрывности для объёмной концентрации взвешенных частиц α

$$\frac{\partial A\alpha}{\partial t} + \frac{\partial Q\alpha}{\partial x} = 0, \quad (74)$$

где A , как и в (29), — площадь поперечного сечения трещины, Q — объёмный расход жидкости через это сечение. Закачка пропанта производилась спустя некоторое время после начала гидроразрыва. Считалось, что трещина закрепились, если концентрация пропанта в трещине достигала некоторого предельного значения α^* .

При постоянном расходе (12) трещина не закрепляется, так как интенсивность утечек со временем падает и начинает расти давление в трещине, а следовательно, — и её раскрытие. В результате процесс увеличения концентрации пропанта резко замедляется [16].

1.6. Модель радиальной трещины

Модель радиальной трещины относится ко второй группе одномерных моделей, описывающих радиальное симметричное распространение из точечного источника. Эта модель анализируется в работах [20, 40, 44, 45, 35, 22, 46]. Геометрическая концепция модели представлена на рис. 9.

Деформация породы под действием осесимметричного распределения давления в трещине выражается интегральным соотношением (см. подробнее [47])

$$W(r) = \frac{8}{\pi E'} \int_r^R \left(\int_0^\zeta \frac{p_{\text{net}}(\xi)\xi}{\sqrt{\zeta^2 - \xi^2} \sqrt{\zeta^2 - r^2}} d\xi \right) d\zeta, \quad (75)$$

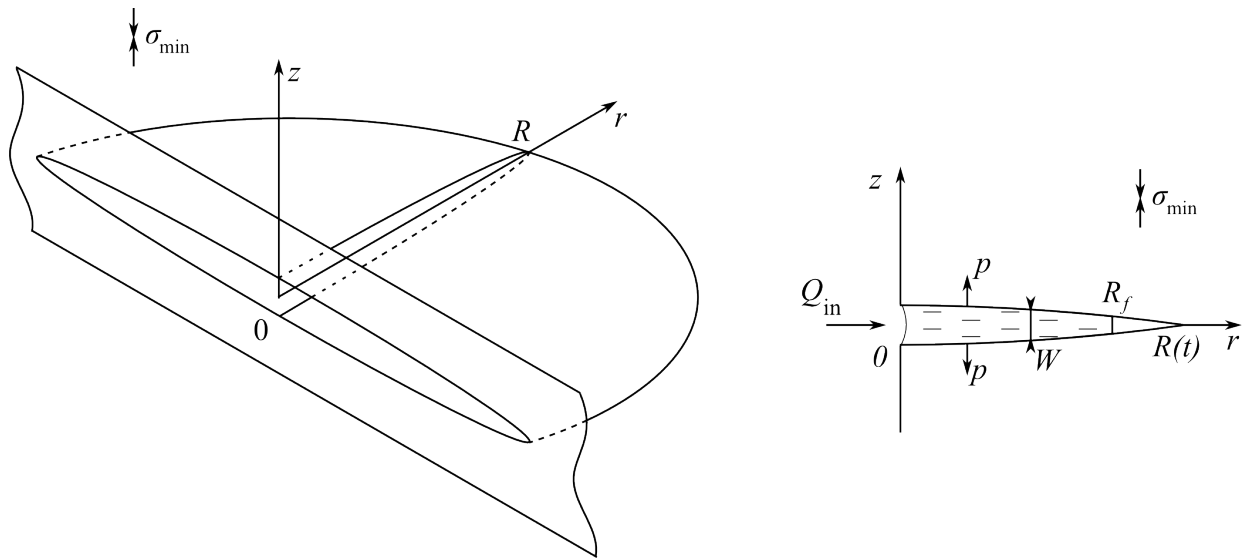


Рис. 9. Геометрическая концепция радиальной модели

где $R = R(t)$ — положение кончика трещины, определяемое из известного критерия хрупкого распространения трещины [22] (подробнее см. [23])

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi R}} \int_0^R \frac{p_{\text{net}}(\xi)\xi}{\sqrt{R^2 - \xi^2}} d\xi = K_{Ic}. \quad (76)$$

Отметим, что в работах [20, 35, 40, 44, 45] полагалось отсутствие трещиностойкости породы.

К уравнениям, описывающим движение жидкости в трещине, относятся уравнение неразрывности

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rWu)}{\partial r} + Q_L(r, t) = 0 \quad (77)$$

и уравнение количества движения

$$\frac{\partial p_{\text{net}}}{\partial r} = -\frac{12\mu}{W^2} u. \quad (78)$$

Утечка жидкости в породу Q_L описывается законом Картера (10) с учётом замены x на r .

Уравнения движения жидкости (77) и (78) дополняются краевым условием в предельной форме на скважине

$$2\pi \lim_{r \rightarrow 0} (rWu) = Q_{\text{in}}. \quad (79)$$

Предполагается наличие отставания фронта жидкости R_f от кончика трещины R

$$R - R_f > 0. \quad (80)$$

Положение фронта жидкости в трещине R_f определяется из соотношения

$$Q(R_f, t) = 0, \quad (81)$$

а краевое условие для (77) и (78) на фронте жидкости R_f принимает вид

$$p_{\text{net}}(R_f, t) = -\sigma_{\text{min}}. \quad (82)$$

Заметим, что давление p_{net} на участке от фронта жидкости до кончика трещины полагается равным $-\sigma_{\text{min}}$. Из (79) и (81), используя уравнение (77), может быть получено уравнение баланса жидкости

$$Q_{\text{in}}t = 2\pi \int_0^{R_f(t)} rW(r, t)dr + 2\pi \int_0^t \int_0^{R_f(\tau)} rQ_L(r, \tau)drd\tau. \quad (83)$$

Для замыкания поставленной задачи задаются начальные данные

$$R(0) = R_0, \quad R_f(0) = R_0,$$

$$W(x, 0) = W_0, \quad 0 \leq r \leq R_0. \quad (84)$$

Обобщённая радиальная модель с отставанием фронта жидкости от кончика трещины описывается интегральным соотношением (75), условием (76), уравнениями (77) и (78), тремя краевыми условиями (79), (81) и (82) и начальными данными (84). Обобщённая радиальная модель без отставания фронта жидкости от кончика трещины строится так же, как и KGD-модель.

В работах [20, 40] показано, что в отсутствии утечки (10) весь процесс гидроразрыва является равновесным, а в [35, 44, 45] — что величина утечки жидкости гидроразрыва в породе определяет в целом поведение радиальной трещины гидроразрыва.

Как и в модели KGD (20), в рассматриваемой модели учитывается псевдопластическая реология жидкости [22]. Тогда уравнение (78) принимает вид

$$\frac{\partial p_{\text{net}}}{\partial r} = -\frac{2^{n+1}(2n+1)^n}{n^n} \frac{\mu}{W^{2n+1}} Q^n. \quad (85)$$

В [22] указано, что параметр n главным образом влияет на скорость распространения трещины гидроразрыва.

2. Двумерные модели

В рамках данных моделей развивается геометрическая концепция, предложенная в KGD-модели. В двумерных моделях допускается криволинейность горизонтального сечения трещины, распространяющейся от скважины в направлении поперёк действия минимальных напряжений залегания, как показано на рис. 10. Геометрия горизонтальных сечений и процессы в них не зависят от высоты. В такой постановке упругость можно рассматривать как плоское деформированное состояние породы. Однако в силу произвола геометрии задачи в данном случае нельзя получить формул, аналогичных (2). Поэтому в таких моделях решение задачи упругости можно найти лишь численно, решая уравнения равновесия Ламэ с участком границы, представляемым криволинейным разрезом.

Главное преимущество двумерных моделей над одномерными состоит в возможности описания эффектов гидроразрыва, связанных с искривлением траектории трещины

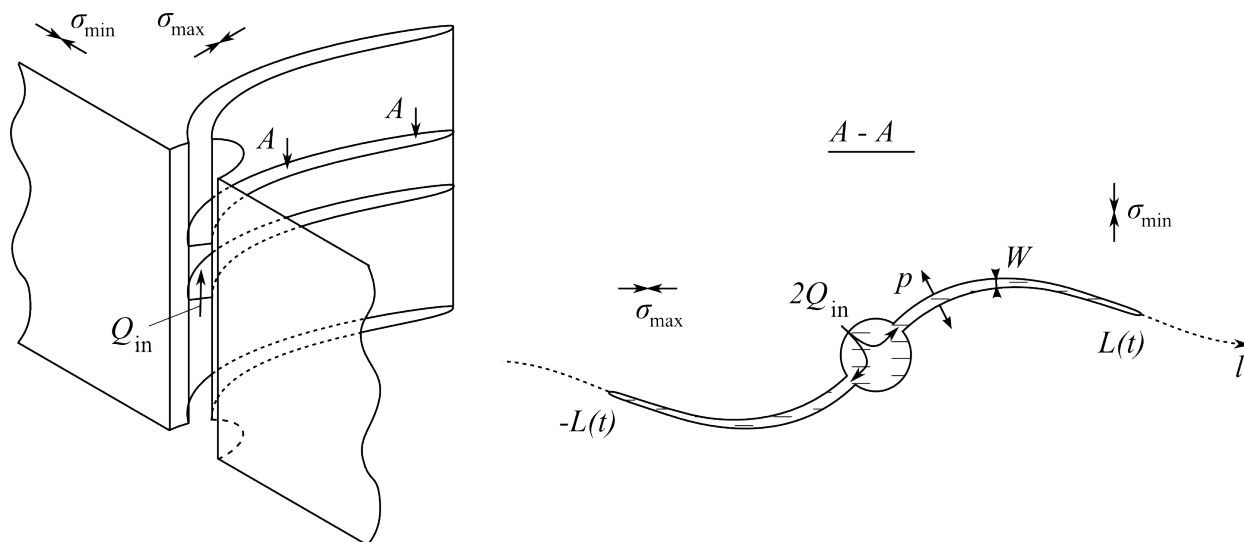


Рис. 10. Геометрическая концепция двумерных моделей

в прискважинной области. В двумерных моделях, как правило, учитывается наличие полости скважины. Рассмотрение в модели гидроразрыва по крайней мере двух выходящих из скважины крыльев трещины обусловлено тем, что максимальное раскрытие трещины гидроразрыва в реальных условиях наблюдается в окрестности скважины. При наличии только одного крыла максимальное раскрытие трещины реалистично находилось бы в середине этого крыла. Кроме того предполагается, что крылья трещины симметричны относительно оси скважины. Поэтому рассматривается только часть исследуемой области, что значительно сокращает необходимые вычислительные ресурсы.

В таких моделях [36, 48–50] используется подмодель распространения трещины нормального отрыва, т. е. в кончике трещины при её распространении выполняются одновременно следующие критерии (см. подробно [23]):

$$K_I(L) = K_{Ic}, \tag{86}$$

$$K_{II}(L) = 0, \tag{87}$$

где последний (87) обуславливает выбор направления распространения трещины гидроразрыва. Критерии (86) и (87) определяют положение кончика трещины L в пространстве. Отметим также работу [51], в которой рассматривается выход трещины гидроразрыва на магистральное направление распространения поперёк действия минимальных напряжений по заданной гладкой кривой с учётом только (86). Заметим, что величины K_I и K_{II} могут быть определены лишь численно по уже найденному напряжённому состоянию породы около кончика трещины L .

Уравнения движения жидкости гидроразрыва берутся из модели KGD (8) и (9) с учётом замены координаты x на криволинейную координату l вдоль крыла трещины. Утечка жидкости гидроразрыва представляется законом Картера (10). На границе раздела жидкость — порода задаются условия сшивки, т. е. берега трещины нагружаются давлением, а нормальное раскрытие трещины определяет её ширину. В этом случае начальная конфигурация в момент времени $t = 0$ дополнительно определяется углом перфорирования β по отношению к напряжениям залегания σ_{\min} и σ_{\max} .

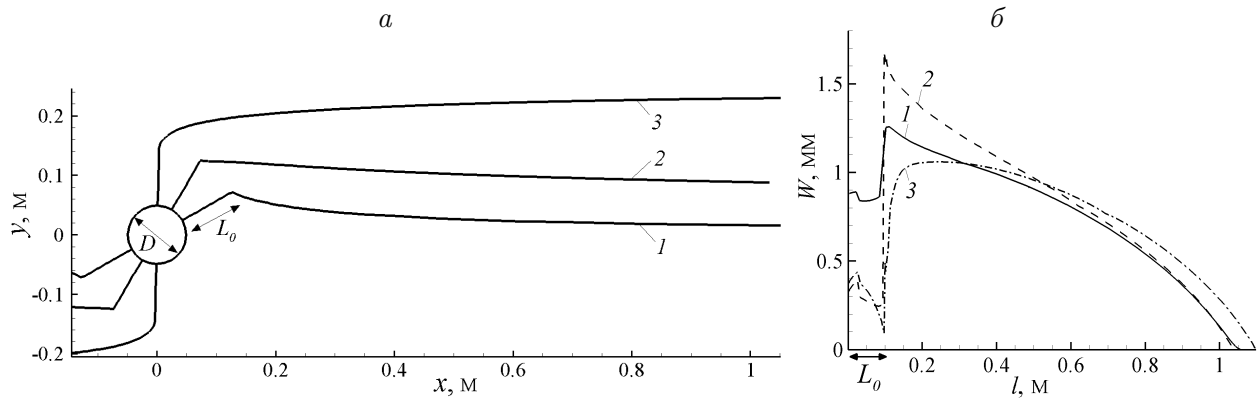


Рис. 11. Траектории трещины при различных углах перфорации (а) и ширина трещины вдоль крыла (б); 1 — $\beta = 30^\circ$, 2 — 60° , 3 — 89°

Двумерная постановка имеет значительную вычислительную сложность и первые посвящённые ей работы [48–50] не учитывали течение жидкости в трещине гидроразрыва. Давление, создаваемое жидкостью, либо считалось постоянным (случай невязкой жидкости), либо аппроксимировалось заданным профилем вдоль трещины гидроразрыва.

Существенными результатами, полученными при помощи двумерных моделей, являются следующие: траектория трещины определяется в основном углом перфорирования β и соотношением между максимальным σ_{\max} и минимальным σ_{\min} напряжениями залегания [36, 48–50]; неверно выбранный угол перфорирования приводит к пережатию трещины около скважины [36, 50, 51], как показано на рис. 11.

3. Псевдотрёхмерные модели

В данных моделях трещина считается плоской и ориентированной перпендикулярно минимальным напряжениям залегания σ_{\min} , как показано на рис. 12. Отличие этих моделей от одномерных заключается в одновременном нахождении горизонтального

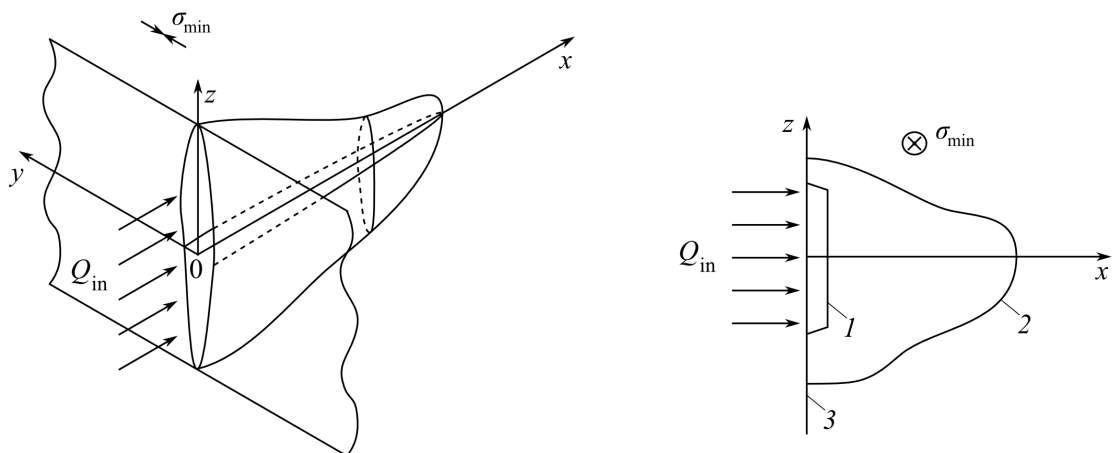


Рис. 12. Геометрическая концепция псевдотрёхмерных моделей: 1 — перфорация, 2 — фронт трещины, 3 — скважина

бокового от скважины и вертикального роста трещины, т. е. на каждом шаге по времени определяется фронт трещины, а не положение её кончика. В отличие от двумерных моделей рассматривается плоская трещина и не учитывается прискважинная область. Трещина распространяется согласно критерию (86). В последнее время в таких моделях применяется модель упругости для слоистой вдоль вертикальной оси z породы [7], т. е. каждый слой породы характеризуется своими модулем Юнга E^p и напряжением залегания σ_{\min}^p . Между упругими слоями задаются условия сцепки и считается, что процесс развития трещины остаётся однородным вдоль вертикальной оси z .

Течение жидкости моделируется в рамках одного из двух подходов. Первый из них [52] заключается в представлении течения жидкости как одномерного в каждом слое по высоте z трещины. Второй подход [7, 53, 54] состоит в описании течения жидкости двумерными уравнениями сохранения массы и количества движения. Утечка представляется законом Картера (10).

Отдельно следует выделить работы [55, 56], в которых рассматриваются только три слоя породы: в верхнем и нижнем слоях напряжения залегания больше напряжений залегания в центральном слое $\sigma_{\min}^1 = \sigma_{\min}^3 > \sigma_{\min}^2$. Такая модель представляет собой развитие РКН-модели.

Существенными результатами, полученными при помощи псевдотрёхмерных моделей, являются следующие: при изотропности породы трещина приобретает примерно эллиптическую форму; в случае слоистой породы трещина в основном распространяется вдоль тех слоёв p , которые имеют наименьшие значения модуля Юнга E^p и напряжения залегания σ_{\min}^p .

4. Трёхмерные модели

Термин “трёхмерная” означает, что модель не имеет каких-либо ограничений на геометрию трещины и направление её распространения. Такая модель должна существенным образом соединять описание трёхмерного течения жидкости внутри полости трещины с расчётом трёхмерных полей напряжённо-деформированного состояния породы и критериями роста и направления распространения фронта трещины. При этом на начальном этапе моделирования в “полностью” трёхмерной модели должна быть решена задача инициации зародышевой трещины, т. е. построения начальной трещины из известной геометрической конфигурации перфорированной скважины.

4.1. Модель инициации трещины гидроразрыва

К настоящему времени в печати появилось несколько работ [57–61], в которых рассматривается процесс инициации трещины гидроразрыва с целью определения давления инициации, месторасположения и ориентации зародышевой трещины. Эти данные особенно важны, так как они требуются в качестве начальной конфигурации для трёхмерного моделирования распространения трещины гидроразрыва. Во всех подходах моделируется напряжённо-деформированное состояние породы с полостью скважины и перфорациями, при этом и те, и другие представляются цилиндрическими полостями. Для моделирования напряжённо-деформированного состояния породы в работе [58] применяется подход, основанный на модели двух не взаимодействующих цилиндрических полостей, в [59] — метод конечных элементов и в [57, 60, 61] — метод граничных

элементов. В качестве критерия разрушения используется критерий максимальных растягивающих напряжений

$$\sigma_3 \geq \sigma_c, \quad (88)$$

где σ_c — прочность на разрыв породы.

В работе [59] моделирование предполагает симметрию задачи и учитывается только восьмая часть всей породы, что значительно сокращает объём вычислений. В силу этого фактически рассматривается следующая конфигурация: у скважины на одном уровне пробурены две разнонаправленные перфорации одинаковых габаритов. Отметим, что в таком подходе для корректного учёта напряжений залегания требуется достаточно большая расчётная область (более чем двадцать характерных размеров рассматриваемой полости). Важными выводами [59] являются следующие: перфорации не оказывают влияния друг на друга, если они расположены по высоте на расстоянии более 6–8 диаметров перфорации; в целях снижения давления инициации необходимо направлять перфорации в сторону максимально возможного напряжения залегания.

В [57] был проведён анализ конфигурации с четырьмя разнонаправленными перфорациями. Показано, что трещина иницируется на стыке скважины и той перфорации, которая направлена в сторону максимально возможного напряжения залегания.

В [58] рассматриваются сценарии инициации трещины гидроразрыва на стыке скважины и перфорации. Здесь проведён исчерпывающий анализ поведения давления инициации для разных расположений скважины и перфорации относительно напряжений залегания σ_{\min} , σ_{\max} и σ_V . Кроме того показано, что перфорация значительно сокращает давление инициации трещины.

В работах [60, 61] был выполнен анализ всех возможных сценариев инициации трещины. Показано, что трещина может иницироваться от полости скважины, от стыка скважины и перфорации и от середины перфорации. Установлены условия реализации каждого из сценариев. В [60] также учтено влияние стальной обсадной колонны, являющейся неотъемлемой частью технологического процесса. Показано, что наличие данной колонны существенно изменяет как давление инициации, так и её сценарий.

4.2. Модель распространения трещины гидроразрыва

Геометрическая концепция трёхмерной модели распространения трещины гидроразрыва приведена на рис. 13. Модели, предложенные в [62, 63], близки к данному определе-

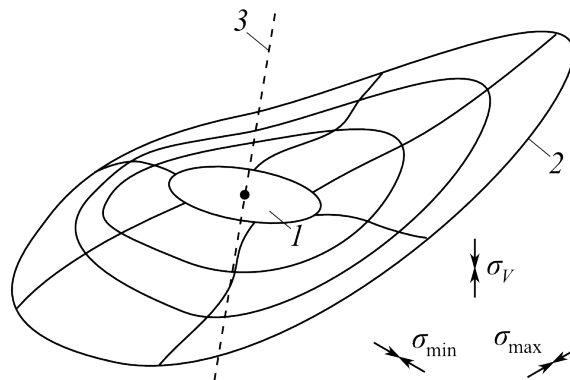


Рис. 13. Геометрическая концепция трёхмерных моделей: 1 — зародышевая трещина, 2 — фронт трещины, 3 — скважина

нию, но в то же время имеют ряд существенных упрощений. Трещина в них рассматривается как поверхность разрыва в трёхмерном пространстве. Течение жидкости вдоль поверхности разрыва описывается двумерными уравнениями, включающими упрощённое уравнение неразрывности. Фронт трещины рассматривается локально в условиях плоского напряжения. Течением жидкости в параллельном фронту трещины направлении пренебрегается. Для описания фильтрации жидкости через стенки трещины используется простейшая модель Картера утечки жидкости. Поверхность скважины исключена из рассмотрения в задаче расчёта напряжённо-деформированного состояния породы. Тем не менее затраты вычислительных ресурсов на решение такой сопряжённой задачи даже с использованием современной высокопроизводительной вычислительной техники [7] весьма высоки.

5. Области применимости моделей гидроразрыва пласта

В процессе гидроразрыва пласта можно выделить три основных стадии, как показано на рис 14. На первой инициируется зародышевая трещина гидроразрыва где-либо на перфорированном интервале скважины, на второй — в зависимости от ориентации и конфигурации зародышевой трещины последняя, искривляясь, выходит на направление своего магистрального развития, ориентированного поперек минимального напряжения залегания. На последней стадии трещина распространяется вдоль указанного направления на большое расстояние.

Одномерные модели хорошо описывают распространение трещины гидроразрыва на последней его стадии или в случае, когда перфорации направлены строго в магистральном направлении роста трещины. Однако эти модели не учитывают распространение трещины по высоте. Псевдотрёхмерные модели позволяют учесть распространение трещины гидроразрыва по вертикали. Двумерные и трёхмерные модели описывают процесс гидроразрыва с учётом второй его стадии. Только “полностью” трёхмерные модели, включающие процесс инициации трещины, могут адекватно моделировать процесс на всех его стадиях. Отметим, что на сегодня таких моделей не предложено, что связано с их высокой вычислительной трудоёмкостью.

На уровне одномерных моделей исследовано влияние параметров скорости закачки, утечки, вязкости жидкости на процесс гидроразрыва. В целом полученные результаты актуальны для случая уже развитой трещины гидроразрыва. Двумерные и трёхмерные

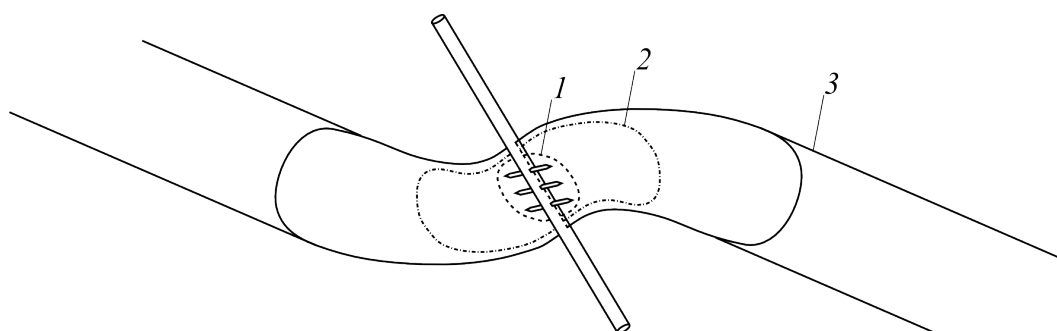


Рис. 14. Стадии гидроразрыва пласта: 1 — инициация трещины гидроразрыва, 2 — искривление трещины гидроразрыва в сторону направления магистрального распространения, 3 — рост трещины гидроразрыва в магистральном направлении

модели учитывают искривление траектории и могут быть использованы при моделировании гидроразрыва начиная от известной конфигурации инициированной трещины. На их уровне исследовано влияние параметров неравномерности напряжений залегания, углов перфорирования относительно магистрального направления распространения трещины гидроразрыва на траекторию и раскрытие последней.

Заключение

В течение второй половины XX века моделирование гидроразрыва пласта сформировалось как отдельная дисциплина. Успехи теоретических и численных исследований моделей гидроразрыва несомненны. В ходе этих исследований были установлены факторы, значительно влияющие на процесс гидроразрыва. Однако до недавних пор определение исходных данных для моделирования было затруднено. Развитие техники геофизических измерений постоянно увеличивает их объём. Именно поэтому ряд моделей гидроразрыва уже получил широкое применение в нефтяной промышленности [1] как средство прогнозирования и оптимизации этой технологической операции. Очевидно, что дальнейшие работы по совершенствованию моделей гидроразрыва пласта будут продолжены. Укажем на некоторые возможные пути такого совершенствования.

1. Учёт неоднородности, анизотропности породы и насыщения, что приведёт к значительному усложнению подмодели упругости, но вместе с тем позволит ввести в рассмотрение нефтеносный пласт.

2. Дальнейшее совершенствование подмодели утечки жидкости в породу, основанной на нестационарном законе Дарси как в одномерных, так и в двумерных моделях. Очевидно, что такой подход может быть осуществлён лишь численно.

3. Построение моделей гидроразрыва, применимых одновременно на всех его стадиях.

4. Описание переноса пропанта с учётом неоднородности заполнения им трещины.

Список литературы

- [1] RESERVOIR stimulation. Third edition / Eds. M.J. Economides, K.G. Nolte. N. Y.: John Wiley & Sons, 2000. 856 p.
- [2] BEHRMANN L.A., ELBEL J.L. Effect of perforations on fracture initiation // J. Petrol. Tech. 1991. P. 608–615.
- [3] GEERTSMA J., HAAFKENS R. A Comparison of the theories for predicting width and extent of vertical hydraulically induced fractures // J. Energy Res. Tech. 1979. Vol. 101, iss. 1. P. 8–19.
- [4] MENDELSON D.A. A review of hydraulic fracture modeling. Pt I: General concepts, 2D models, motivation for 3D modeling // Ibid. 1984. Vol. 106, iss. 3. P. 369–376.
- [5] MENDELSON D.A. A review of hydraulic fracture modeling. Pt II: 3D Modeling and vertical growth in layered rock // Ibid. 1984. Vol. 106, iss. 4. P. 543–553.
- [6] GEERTSMA J. Chapter 4. Two-dimensional fracture propagation models // Recent advances in hydraulic fracturing. Monograph Ser. Vol. 12. / Eds. J.L. Gidley, S.A. Holditch, R.W. Veatch. Richardson: SPE, 1989. P. 81–94.
- [7] ADACHI J., SIEBRITS E., PEIRCE A., DESROCHES J. Computer simulation of hydraulic fractures // Intern. J. Rock Mech. Mining Sci. 2007. Vol. 44. P. 739–757.

- [8] RAHMAN M.M., RAHMAN M.K. A review of hydraulic fracture models and development of an improved pseudo-3D model for stimulating tight oil/gas sand // *Energy Sources. Pt A.* 2010. Vol. 32. P. 1416–1436.
- [9] CHING H.Y. *Mechanics of Hydraulic Fracturing.* Houston: Gulf Publ. Company, 1997. 182 p.
- [10] CARTER R.D. Appendix I. Derivation of the general equation for estimating the extent of the fractured area // *Drilling and Production Practice / Eds. G.C. Howard, C.R. Fast. N. Y.: Amer. Petrol. Inst., 1957. P. 261–270.*
- [11] ИВАШНЕВ О.Е., СМИРНОВ Н.Н. Формирование трещины гидроразрыва в пористой среде // *Вестник Московского ун-та. Математика. Механика.* 2003. № 6. С. 28–36.
- [12] СМИРНОВ Н.Н., ТАГИРОВА В.Р. Автомодельные решения задачи о формировании трещины гидроразрыва в пористой среде // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2007. № 1. С. 70–82.
- [13] ТАГИРОВА В.Р. Распространение трещины гидроразрыва под напором неньютоновской жидкости // *Вестник Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика.* 2009. № 6. С. 33–41.
- [14] ТАТОСОВ А.В. Модель закачки пропанта в трещину гидроразрыва // *Вычисл. технологии.* 2005. Т. 10, № 6. С. 91–101.
- [15] ТАТОСОВ А.В. Движение вязкой жидкости с примесью частиц в пористом канале // *Вестник ТюмГУ.* 2007. № 5. С. 56–60.
- [16] ЕНТОВ В.М., ЗАЗОВСКИЙ А.Ф., СТЕЛИН И.Б., ХАРАИДЗЕ Д.М. Одномерная модель распространения трещины гидроразрыва // *Материалы IX Всесоюз. семинара “Численные методы решения задач фильтрации. Динамика многофазных сред”.* Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР, 1989. С. 91–95.
- [17] GORDEEV Y.N., ENTOV V.M. The pressure distribution around a growing crack // *J. Appl. Math. Mech.* 1997. Vol. 51(6). P. 1025–1029.
- [18] MATIAS S.A., REEUWIJK M. Hydraulic fracture propagation with 3-D leak-off // *Transp. Porous Med.* 2009. Vol. 80. P. 499–518.
- [19] ЖЕЛТОВ Ю.П., ХРИСТИАНОВИЧ С.А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // *Изв. АН СССР. Техн. науки.* 1955. № 5. С. 3–41.
- [20] GEERTSMA J., DE KLERK F. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures // *J. Petrol. Tech.* 1969. No. 12. P. 1571–1581.
- [21] SNEDDON I., LOWENGRUB M. *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity.* N. Y.: John Wiley & Sons, 1969. 221 p.
- [22] SPENCE D.A., SHARP P. Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow // *Proc. Royal Soc. A.* 1985. Vol. 400. P. 289–313.
- [23] ЧЕРЕПАНОВ Г.П. *Механика хрупкого разрушения.* М.: Наука, 1974. 640 с.
- [24] DANESHY A.A. On the design of vertical hydraulic fractures // *J. Petrol. Tech.* 1973. Vol. 1. P. 83–97.
- [25] ADACHI J.I., DETOURNAY E. Self-similar solution of a plane-strain fracture driven by a power-law fluid // *Intern. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 2002. Vol. 26. P. 579–604.
- [26] БАРЕНБЛАТТ Г.И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта // *Прикл. математика и механика.* 1956. Т. 20, вып. 4. С. 475–486.

- [27] PAPANASTASIOU P. The influence of plasticity in hydraulic fracturing // Intern. J. Fracture. 1997. Vol. 84. P. 61–97.
- [28] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
- [29] БАБЕ Г.Д., БОНДАРЕВ Э.А., ВОЕВОДИН А.Ф., КАНИБОЛОТСКИЙ М.А. Идентификация моделей гидравлики. Новосибирск: Наука, 1980. 161 с.
- [30] АЛЕКСЕЕНКО О.П., ВАЙСМАН А.М. Прямолинейный гидроразрыв в упругой плоскости // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. 1988. № 6. С. 145–149.
- [31] АКУЛИЧ А.В., ЗВЯГИН А.В. Численное моделирование распространения трещины гидроразрыва // Вестник Московского ун-та. Математика. Механика. 2008. № 1. С. 43–49.
- [32] ЗАЗОВСКИЙ А.Ф., ОДИШАРИЯ М.Г., ПЕСЛЯК Ю.А. Автомодельные решения задачи о распространении трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. 1986. № 5. С. 92–100.
- [33] АЛЕКСЕЕНКО О.П., ВАЙСМАН А.М. Некоторые особенности плоской задачи гидроразрыва упругой среды // ФТПРПИ. 1999. № 3. С. 64–70.
- [34] DESROCHES J., DETOURNAY E., LENOACH B. ET AL. The crack tip region in hydraulic fracturing // Proc. Royal Soc. A. 1994. Vol. 447. P. 39–48.
- [35] АЛЕКСЕЕНКО О.П., ВАЙСМАН А.М. Рост почти заполненной осесимметричной трещины гидроразрыва при малых и больших утечках // ФТПРПИ. 2004. № 3. С. 1–11.
- [36] АЛЕКСЕЕНКО О.П., ЕСИПОВ Д.В., КУРАНАКОВ Д.С. и др. Двумерная пошаговая модель распространения трещины гидроразрыва // Вестник НГУ. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 3. С. 36–59.
- [37] GARAGASH D., DETOURNAY E. The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium // J. Appl. Mech. 2000. Vol. 67. P. 183–192.
- [38] LECAMPION B., DETOURNAY E. An implicit algorithm for the propagation of a hydraulic fracture with a fluid lag // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 2007. Vol. 196, iss. 49–52. P. 4863–4880.
- [39] АСТАФЬЕВ В.И. Асимптотический анализ процесса развития трещины гидравлического разрыва пласта // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Физ.-мат. науки. 2010. № 5(21). С. 105–116.
- [40] PERKINS T.K., KERN L.R. Widths of hydraulic fractures // J. Petrol. Tech. 1961. No. 9. P. 937–949.
- [41] SHEDDON I.N., ELLIOTT A.A. The opening of a griffith crack under internal pressure // Quarterly Appl. Math. 1946. No. 4. P. 262–267.
- [42] NORDGREN R.P. Propagation of a vertical hydraulic fracture // SPE J. 1972. Vol. 12, No. 4. P. 306–314.
- [43] NOLTE K.G. Fracturing-pressure analysis for nonideal behavior // J. Petrol. Tech. 1991. No. 2. P. 210–218.
- [44] ABE H., MURA T., KEER L.M. Growth rate of a penny-shaped crack in hydraulic fracturing of rocks // J. Geop. Res. 1976. Vol. 81. P. 5335–5340.
- [45] ABE H., KEER L.M., MURA T. Theoretical study of hydraulically fractured penny-shaped cracks in hot, dry rocks // Intern. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. 1979. Vol. 3. P. 79–96.
- [46] ЗАЗОВСКИЙ А.Ф. Распространение плоской круговой трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. 1979. № 2. С. 103–109.

- [47] СЛЕПЯН Л.И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1990. 296 с.
- [48] ATKINSON C., EFTAKHOPOULOS D.A. Numerical and analytical solution for the problem of hydraulic fracturing from cased and cemented wellbore // Intern. J. Solids and Structures. 2002. Vol. 39, No. 6. P. 1621–1650.
- [49] ЗУБКОВ В.В., КОШЕЛЕВ В.Ф., ЛИНЬКОВ А.М. Численное моделирование инициирования и роста трещин гидроразрыва // ФТПРПИ. 2007. № 1. С. 45–63.
- [50] МАРТЫНЮК П.А. Особенности развития трещин гидроразрыва в поле сжатия // Там же. 2008. № 6. С. 19–29.
- [51] CHERNY S., CHIRKOV D., LAPIN V. ET AL. Two-dimensional modeling of the near-wellbore fracture tortuosity effect // Intern. J. Rock Mech. Mining Sci. 2009. Vol. 36, No. 6. P. 992–1000.
- [52] SETTARI A., CLEARY M.P. Three-dimensional simulation of hydraulic fracturing // J. Petrol. Tech. 1984. Vol. 36, No. 7. P. 1177–1190.
- [53] VANDAMME L., CURRAN J.H. A three-dimensional hydraulic fracturing simulator // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1989. Vol. 28, iss. 4. P. 909–927.
- [54] OUYANG S., CAREY G.F., YEW C.H. An adaptive finite element scheme for hydraulic fracturing with proppant transport // Intern. J. Numer. Methods in Fluids. 1997. Vol. 24. P. 645–670.
- [55] ГОРДЕЕВ Ю.Н. Автомодельное решение задачи о распространении псевдотрёхмерной вертикальной трещины гидроразрыва в непроницаемом пласте // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 79–86.
- [56] ADACHI J.I., DETOURNAY E., PEIRCE A.P. Analysis of the classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers // Intern. J. Rock Mech. Mining Sci. 2010. Vol. 47, iss. 4. P. 625–639.
- [57] PAPANASTASIOU P., ZERVOS A. Three-dimensional stress analysis of a wellbore with perforations and a fracture // Paper SPE. 1998. No. 47378.
- [58] HOSSAIN M.M., RAHMAN M.K., RAHMAN S.S. Hydraulic fracture initiation and propagation: roles of wellbore trajectory, perforation and stress regimes // J. Petrol. Sci. Eng. 2000. Vol. 27, iss. 3-4 P. 129–149.
- [59] YUAN Y., ABOUSLEIMAN Y., WENG X., ROEGIER J.-C. Three-dimensional elastic analysis on fracture initiation from a perforated borehole. Paper SPE. 1995. No. 29601.
- [60] ЕСИПОВ Д.В., КУРАНАКОВ Д.С., ЛАПИН В.Н., ЧЁРНЫЙ С.Г. Многозонный метод граничных элементов и его применение к задаче инициации трещины гидроразрыва из перфорированной обсаженной скважины // Вычисл. технологии. 2011. Т. 16, № 6. С. 13–26.
- [61] ALEKSEENKO O.P., POTAPENKO D.I., CHERNY S.G. ET AL. 3D Modeling of fracture initiation from perforated non-cemented wellbore // SPE J. 2013. Vol. 18, No. 3. P. 589–600.
- [62] SOUSA J.L., CARTER B.J., INGRAFFEA A.R. Numerical simulation of 3D hydraulic fracture using newtonian and power-law fluids // Intern. J. Rock Mech. and Mining Sci. & Geomech. Abstr. 1993. Vol. 30, iss. 7. P. 1265–1271.
- [63] RUNGAMORNROT J., WHEELER M.F., MEAR M.E. A numerical technique for simulating non-planar evolution of hydraulic fractures. Paper SPE. 2005. No. 96968.

*Поступила в редакцию 5 марта 2014 г.,
с доработки — 19 марта 2014 г.*