

Итерационный алгоритм решения краевой задачи нахождения диссипативных дисперсионно управляемых оптических солитонов*

И. А. ЯРУТКИНА

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет, Россия

e-mail: i.yarutkina@gmail.com

Впервые представлен и апробирован итерационный алгоритм для нахождения периодических решений системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих “быструю” (в пределах одного обхода лазерного резонатора) динамику основных характеристик диссипативных солитонов в волоконных лазерах с дисперсионным управлением: пиковой мощности, длительности, параметра фазовой модуляции.

Ключевые слова: численное моделирование, диссипативные волоконные лазеры с дисперсионным управлением, диссипативные солитоны.

Введение

Распространение оптических импульсов по волоконному световоду описывается с помощью нелинейного уравнения Шредингера, которое выводится из системы Максвелла с учётом ряда приближений [1]. Наиболее часто используемым подходом к моделированию импульсного волоконного лазера является сопоставление каждому элементу лазерного резонатора своей математической модели, описывающей его работу (точечные модели). Действие оптических устройств учитывается точно в том месте, где они располагаются в реальных оптических резонаторах. В общем случае для каждого набора параметров волоконного световода и для любой его новой конфигурации необходимо проводить независимые расчёты. Достоинство такого подхода при численном моделировании работы волоконного лазера — высокая верифицируемость результатов моделирования натурным экспериментом, основным недостатком можно считать вычислительную трудоёмкость: любые исследования, включающие многопараметрическую оптимизацию конструкции волоконного лазера, требуют больших временных затрат и наличия существенных вычислительных мощностей. При проведении параметрической оптимизации более эффективными оказываются методы исследований, предполагающие меньшую точность из-за применения некоторых аналитических приближений и распределённого учёта действия оптических устройств в лазере, но менее трудоёмкие при реализации за счёт получения аналитических решений и применения относительно быстрых алгоритмов численного интегрирования.

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, гос. контракт № 14.В25.31.0003 и РФФИ (грант № 14-01-31160).

Форма солитона в волоконных лазерных системах с дисперсионным управлением характеризуется автомодельной центральной частью и затухающими крыльями [2–5], при этом разность полной энергии импульса и энергии его центральной части незначительна. В связи с этим наибольший интерес представляет исследование “быстрой” (т. е. в пределах одного обхода резонатора) динамики центральной части оптических импульсов. Это позволяет описать эволюцию оптического поля с формально бесконечным числом степеней свободы с помощью системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, характеризующей динамику солитона и описывающей изменения основных характеристик импульса, таких как его ширина, пиковая мощность, энергия, параметр фазовой модуляции и спектральная ширина [2–8].

В настоящей работе впервые представлен и апробирован численный алгоритм, позволяющий быстро и эффективно решать систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих динамику основных характеристик оптического импульса (пиковой мощности, параметра фазовой модуляции и длительности импульса) для любого набора параметров резонатора.

1. Постановка задачи

Распространение оптического импульса в усиливающем легированном редкоземельным металлом оптическом волокне может быть описано с помощью обобщённого нелинейного уравнения Шредингера [9]

$$iU_Z - \frac{1}{2}\beta_2 U_{TT} + \gamma|U|^2 U = i(G - \Gamma)U + i\frac{G}{\Omega_g^2} U_{TT},$$

где $U(z, t)$ — огибающая электромагнитного поля; $Z, \text{ м}$ — дистанция распространения вдоль оптического волокна; $T, \text{ пс}$ — временная задержка; $\beta_2, \text{ пс}^2/\text{м}$ — коэффициент дисперсии групповых скоростей; $\gamma, \text{ Вт}^{-1}\text{м}^{-1}$ — нелинейный коэффициент; $\Gamma, \text{ дБ/м}$ — коэффициент линейных потерь; величина $\Omega_g, \text{ ТГц}$, связана с шириной параболического спектрального фильтра; $G, \text{ дБ/м}$ — параметр усиления. В общем случае

$$G = G(z) = \frac{G_0}{1 + E(Z)/(P_{satG} \cdot T_R)},$$

где $G_0, \text{ дБ/м}$ — удельный коэффициент усиления сигнала; $E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} |U(Z, T)|^2 dT$ — энергия оптического импульса; $T_R, \text{ пс}$ — время обхода резонатора; $P_{satG}, \text{ Вт}$ — мощность насыщения усиливающей среды.

Введём следующие обозначения: $t = T/T_0$, $z = Z/L$, $|u|^2 = |U|^2/P_0$, где T_0 и P_0 — характерные время и мощность, L — длина дисперсионной карты. Используя принятые обозначения, получим масштабированное уравнение

$$iu_z + d(z)u_{tt} + \varepsilon|u|^2 u = i(g - l_0)u + i\nu gu_{tt}, \quad (1)$$

где $d(z) = -\beta_2 L / (2T_0^2)$, $\varepsilon = \gamma L P_0$. После масштабирования $d(z+1) = d(z)$.

Задача описания динамики центральной части солитона с помощью ключевых характеристик импульса (ширина τ , пиковая мощность P и параметр фазовой модуля-

ции C) сводится к краевой задаче поиска периодических решений системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений [10]

$$\tau_z = 2d(z) \frac{C}{\tau} - \nu g \frac{1}{\tau} (C^2 - 1), \quad (2)$$

$$C_z = (2d(z) - 2\nu g C) \frac{1 + C^2}{\tau^2} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} P, \quad (3)$$

$$P_z = -2d(z) \frac{CP}{\tau^2} + 2(g - l_0) P - 2\nu g \frac{P}{\tau^2}, \quad (4)$$

где

$$g = g(\tau, P) = \frac{g_0}{1 + P\tau\sqrt{\pi}/\varepsilon_0},$$

с периодическими краевыми условиями

$$\tau(0) = \tau(1), \quad C(0) = C(1), \quad P(0) = P(1). \quad (5)$$

Данная система записана в предположении параболичности фазы и гауссовой формы оптического сигнала, который без ограничения общности можно представить в виде

$$u(z, t) = \sqrt{P(z)} \exp \left[-\frac{t^2}{2\tau^2(z)} (1 - iC(z)) + i\varphi(z) \right].$$

В общем случае может быть использована любая другая аппроксимационная форма оптического сигнала с параболической фазой, например гиперболический секанс или параболический профиль.

Представим задачу нахождения периодических решений уравнений (2)–(4) с краевыми условиями (5) в векторном виде:

$$\frac{d\mathbf{V}(z)}{dz} = \mathbf{F}(z, \mathbf{V}(z)), \quad z \in (0, 1), \quad (6)$$

$$\mathbf{V}(0) = \mathbf{V}(1), \quad (7)$$

где $\mathbf{V}(z) = (\tau(z), C(z), P(z))^T$, $\mathbf{F}(z, \mathbf{V}(z))$ — нелинейный от $\mathbf{V}(z)$ вектор-столбец.

Существует ряд методов численного решения краевой задачи для системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, позволяющих решить задачу, описанную в уравнениях (6), (7) (конечно-разностные, итерационные методы, методы аппроксимирующих функций). Приближённые методы решения краевых задач описаны во многих учебниках и монографиях по методам вычислений, например в [11, 12].

При использовании конечно-разностных [11–15] или сеточных методов приближённого решения краевых задач краевая задача сводится к разностной схеме

$$\Gamma_\tau(\mathbf{Y}) = 0, \quad z \in (0, 1),$$

решением которой является сеточная функция Y — приближённое решение краевой задачи (6), (7). Для возможности эффективной численной реализации в матричной записи такая система должна быть линейной:

$$A\mathbf{Y}_\tau = \mathbf{f}(z), \quad z \in (0, 1),$$

где матрица A трёхдиагональна для матричных клеток размерности 3. Кроме того, необходимо диагональное преобладание для устойчивой реализации метода матричной прогонки, который является модификацией стандартного алгоритма Гаусса решения линейных систем алгебраических уравнений.

В нашем случае краевая задача (6), (7) может быть сведена к нелинейной системе алгебраических уравнений при помощи некоторого разностного представления производной $d\mathbf{V}(z)/dz$. Такую систему можно решить каким-либо приближённым методом. Чаще нелинейная краевая задача сводится к последовательности линейных краевых задач каким-либо итерационным методом, например методом Ньютона [11]. Для системы (6) эффективно воспользоваться методами конечных разностей мешает либо малый порядок аппроксимации производной $d\mathbf{V}(z)/dz$ разностью вперёд, что приводит к большому количеству итераций и нерационально большому времени, затраченному на вычисления до достаточной сходимости итерационного процесса, либо принципиальная неустойчивость метода прогонки для произвольного набора коэффициентов усиления и затухания при аппроксимации производной $d\mathbf{V}(z)/dz$ центральной разностью со вторым порядком точности.

При использовании методов аппроксимирующих функций [16] распространены два варианта выбора аппроксимирующих функций: функции, точно удовлетворяющие краевым условиям уравнения (7), и функции, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (6). В этом случае система уравнений является нелинейной и для произвольного набора коэффициентов усиления и затухания не имеет аналитических решений, поэтому предпочтительным является разложение решения по функциям, удовлетворяющим относительно простым краевым условиям.

Изложим кратко суть методов аппроксимирующих функций. Аппроксимируем искомое решение $\mathbf{V}(z)$ некоторой аппроксимирующей функцией

$$\Phi = \Phi(z; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m),$$

которая удовлетворяет краевым условиям и зависит от $3m$ параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. В данном приложении граничные условия линейны, поэтому будем аппроксимировать функцию $\mathbf{V}(z)$ линейной комбинацией известных функций

$$\Phi = \sum_{k=1}^m \alpha_k \Phi_k^\tau(z),$$

где $\Phi_1(z)$ удовлетворяет краевым условиям (7), а $\Phi_2(z), \dots, \Phi_m(z)$ — однородному краевому условию $\mathbf{V}(z) = 0$ ($z \in \{0, 1\}$). Ошибка аппроксимации краевой задачи есть функция от $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$:

$$\mathbf{E}(z; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \equiv \frac{d\Phi(z; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)}{dz} - \mathbf{F}(z, \Phi(z; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)).$$

Выделяют несколько схем минимизации ошибки аппроксимации краевой задачи и определения неизвестных параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ [17]:

— метод коллокаций [11, 15, 18]. α_k выбирается так, чтобы $\Phi(z; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ точно удовлетворяла данному дифференциальному уравнению в m точках $z = Z_1, \dots, z = Z_m$, т. е. чтобы

$$\mathbf{E}(Z_i; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

— метод наименьших квадратов [11, 19]. α_k выбирается так, чтобы минимизировать среднюю квадратическую ошибку

$$\mathbf{J}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \equiv \sum_{i=1}^N |\mathbf{E}(Z_i; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)|^2,$$

где Z_1, \dots, Z_N , например, — равноотстоящие точки из области $(0, 1)$. Коэффициенты α_k определяются из m условий

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \alpha_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

— метод Галеркина [11, 15, 18]. При использовании данного метода выбирается m линейно независимых весовых функций $\varphi_1(z), \dots, \varphi_m(z)$ и определяются α_k так, чтобы

$$\int_0^1 \varphi_i(\xi) \mathbf{E}(\xi; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) d\xi = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Очевидным недостатком этих методов в данном случае является необходимость использовать в качестве набора аппроксимирующих функций полную систему линейно независимых функций, что сильно увеличивает трудоёмкость вычислительного алгоритма и его расчётное время.

Наиболее популярным итерационным алгоритмом для решения задач такого типа является метод стрельбы. Суть этого метода заключается в пробном задании недостающих граничных условий на левой границе интервала и в последующей реализации подходящего итерационного алгоритма для последовательности получаемых задач Коши хорошо известными методами [11, 20, 21]. Для рассматриваемого приложения итерационный процесс метода стрельбы принято основывать на методе Ньютона, обобщённом на трёхмерный случай [10].

Для организации итерационного процесса краевые условия (7) переписываются в виде $\mathbf{G}(\mathbf{V}) = \mathbf{V}(1) - \mathbf{V}(0) = (0, 0, 0)^T$:

$$G_1(\mathbf{V}) = \tau(1) - \tau(0) = 0,$$

$$G_2(\mathbf{V}) = C(1) - C(0) = 0,$$

$$G_3(\mathbf{V}) = P(1) - P(0) = 0,$$

где $\mathbf{V}(0)$ — начальное условие, а компоненты $\mathbf{V}(1)$ являются решениями системы (6) в конце лазерного резонатора. В общем случае приближённые начальные данные не удовлетворяют краевым условиям, тогда выписывается система $\mathbf{G}(\mathbf{V} + \delta\mathbf{V}) = 0$ на возмущения начальных данных. После линеаризации системы приближённые значения возмущений $\delta\mathbf{V}$ начальных данных $\mathbf{V}(0)$ определяются из уравнения

$$J \delta\mathbf{V} = -\mathbf{V}(0),$$

где J — матрица Якоби, а её компоненты — частные производные $\partial G_i / \partial V_j$, определяются численно.

Основным недостатком описанного итерационного алгоритма является использование метода Ньютона для нахождения уточняющих вариаций приближённых начальных

условий. Это обстоятельство влияет на чувствительность метода стрельбы к близости первоначального приближения начальных данных к искомому решению, в некоторых постановках первое приближение подобрать чрезвычайно трудно, что не позволяет решать задачи многопараметрической оптимизации методом стрельбы с использованием метода Ньютона.

В настоящей работе предложен итерационный алгоритм решения задачи (6), (7), который в сравнении с перечисленными выше методами обладает рядом достоинств, а именно: быстрой скоростью счёта для данного приложения и практической нечувствительностью к выбору начального приближения при нахождении периодических решений системы. Применяя построение итерационного алгоритма уточнения приближённых начальных данных для задачи Коши на основании многократного обхода резонатора, можно получать периодические решения краевой задачи, строго соответствующие параметрам системы (2)–(5).

2. Численный алгоритм решения системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

В статье [22] впервые был представлен численный метод осреднения для вычисления точных периодических дисперсионно управляемых решений консервативного нелинейного уравнения Шредингера. В данной работе предложен итерационный алгоритм получения периодических решений системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих “быструю” (т. е. в пределах одного обхода резонатора) динамику диссипативных солитонов в волоконных лазерах с дисперсионным управлением. Рассмотрим алгоритм подробно.

1. Преобразуем исходную краевую задачу в задачу Коши и проанализируем поведение её решения для произвольных начальных данных:

$$\frac{d\mathbf{V}(z)}{dz} = \mathbf{F}(z, \mathbf{V}(z)), \quad z > 0, \quad (8)$$

$$\mathbf{V}(0) = \mathbf{W}, \quad (9)$$

где $\mathbf{V}(z) = (\tau(z), C(z), P(z))^T$. Не ограничивая общности, зададим вектор $\mathbf{W} = (1, 0, 1)^T$. Решать задачу Коши будем методом Рунге — Кутты четвёртого порядка точности. Система (8)–(9) описывает динамику основных характеристик диссипативного дисперсионно управляемого солитона в рамках модели усиливающей оптической среды с насыщением. В случае преобладания усиления над потерями это приводит к установлению энергии солитона в процессе распространения по активному волокну. Для приближения гауссова импульса энергия сигнала $E(z) = \sqrt{\pi}P(z)\tau(z)$. Тогда можем определить первое приближение для итерационного процесса как любой вектор $\mathbf{V}^0 = (\tau^0, C^0, P^0)^T$ такой, что $\sqrt{\pi}P^0\tau^0 = \sqrt{\pi}P(z_k)\tau(z_k)$, где $|E(z_k) - E(z_m)| = |\sqrt{\pi}P(z_k)\tau(z_k) - \sqrt{\pi}P(z_m)\tau(z_m)| < \varepsilon E(z_k)$, $\forall z_m > z_k$ при $k, m \in \{0, \mathbb{N}\}$ и малом наперед заданном $\varepsilon > 0$.

Рисунок 1 иллюстрирует динамику установления энергии для задачи Коши (8)–(9) при следующем наборе параметров: $g_0 = 1$, $l_0 = 0.5$, $\nu = 0.1$, $\varepsilon_0 = 10$, $\varepsilon = 1$. Сплошной линией показано изменение энергии $E(z) = \sqrt{\pi}P(z)\tau(z)$ вдоль переменной z , маркерами — изменение энергии в точках $z_k \in \{0, \mathbb{N}\}$. Таким образом, для приведённого на графике решения установление энергии происходит после $z = 30$, что в принятых обозначениях соответствует 30 обходам лазерного резонатора. Для представленного на

рисунке случая энергия устанавливается на уровне 6.32, поэтому можем задать $\mathbf{V}^0 = (1.88858, 0, 1.88858)^T$, что позволяет задать нужное значение энергии импульса.

2. Итерационный алгоритм заключается в нахождении следующего приближения \mathbf{V}^{i+1} на основании анализа динамики вектора $\mathbf{V}^i(z)$ — решения задачи (8)–(9), в качестве начальных данных которой выбран вектор предыдущего приближения \mathbf{V}^i :

$$\frac{d\mathbf{V}^i(z)}{dz} = \mathbf{F}(z, \mathbf{V}^i(z)), \quad z > 0, \quad (10)$$

$$\mathbf{V}^i(0) = \mathbf{V}^i, \quad (11)$$

где $\mathbf{V}^i(z) = (\tau^i(z), C^i(z), P^i(z))^T$. В ходе решения задачи Коши (10)–(11) будем отслеживать динамику мощности $P^i(z)$ в точках $z_k \in \{0, \mathbb{N}\}$. Введём следующие обозначения: $z_{\max} = z_k, \max_k \{P^i(z_k)\}$, $k \in \mathbb{N}$ — точка первого локального максимума мощности, $z_{\min} = z_k, \min_k \{P^i(z_k)\}$, $k \in \mathbb{N}$ — точка первого локального минимума мощности. Рисунок 2 иллюстрирует динамику характеристик импульса вдоль переменной z для первого шага итерационного процесса, соответствующего представленному на рис. 1.

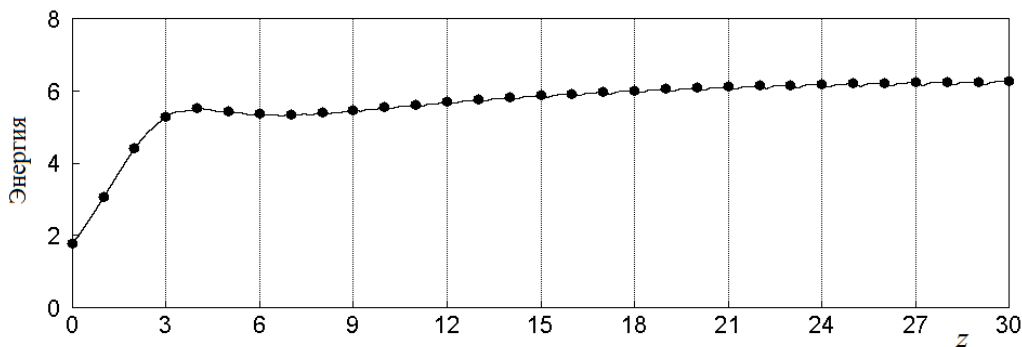


Рис. 1. Установление энергии в ходе решения задачи Коши (8)–(9). Линией показано изменение энергии импульса вдоль переменной z , точками — изменение энергии при $z_k \in \{0, \mathbb{N}\}$

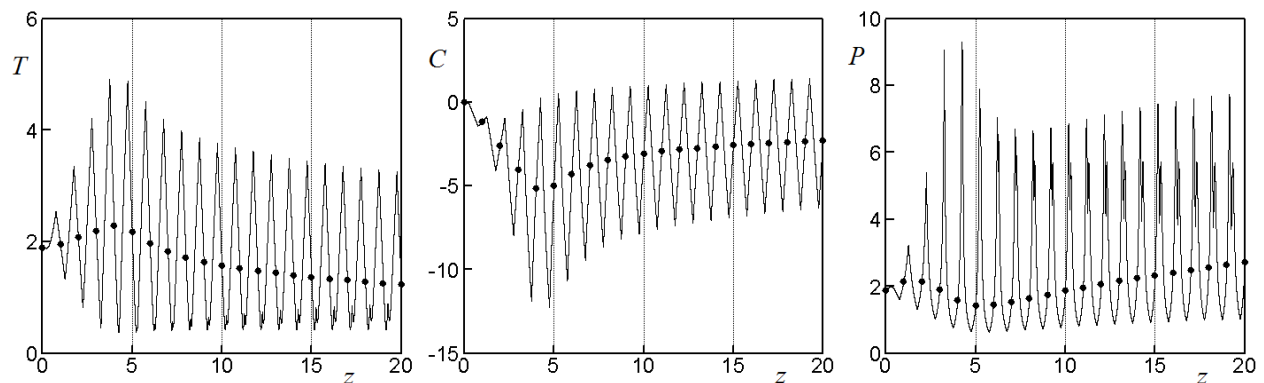


Рис. 2. Динамика характеристик импульса на первом шаге итерационного процесса, соответствующего рис. 1. Точки означают изменение характеристик при $z_k \in \{0, \mathbb{N}\}$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (2)–(4) была выписана с учётом предположения, что оптический импульс обладает специальной формой, а именно является гауссовым импульсом с параболическим профилем фазы. Тогда распределение поля находится в виде

$$u(\mathbf{V}^i(z), t) = \sqrt{P^i(z)} \exp \left[-\frac{t^2}{2\tau^{i,2}(z)} (1 - iC^i(z)) + i\varphi(z) \right], \quad (12)$$

где линейный набег фазы $\varphi(z)$ может быть выбран произвольным. Неявно определим следующее итерационное приближение вектора \mathbf{V}^{i+1} :

$$u(\mathbf{V}^{i+1}, t) = \frac{\alpha\phi(u(\mathbf{V}^i(z_{\max}), t)) + (1 - \alpha)\phi(u(\mathbf{V}^i(z_{\min}), t))}{\sqrt{\int |\alpha\phi(u(\mathbf{V}^i(z_{\max}), t)) + (1 - \alpha)\phi(u(\mathbf{V}^i(z_{\min}), t))|^2 dt}} \times \\ \times \sqrt{\int |u(\mathbf{V}^0, t)|^2 dt}, \quad (13)$$

где $0 < \alpha < 1$ — произвольный вес и

$$\phi(u(\mathbf{V}^i(\tilde{z}), t)) = \frac{u(\mathbf{V}^i(\tilde{z}), 0)}{|u(\mathbf{V}^i(\tilde{z}), 0)|} u(\mathbf{V}^i(\tilde{z}), t) = \sqrt{P^i(\tilde{z})} \exp \left[-\frac{t^2}{2\tau^{i,2}(\tilde{z})} (1 - iC^i(\tilde{z})) \right].$$

Распределение (13) искомого поля является линейной комбинацией двух полей, находящихся в фазе в пиковой по мощности точке $t = 0$, что препятствует вырождению импульсного решения. Представленная нормировка вводится для сохранения энергии сигнала, соответствующей балансу усиления и потерь системы (2)–(4).

Полученное распределение поля $u(\mathbf{V}^{i+1}, t)$ в общем случае не является распределением с гауссовым профилем мощности. Однако для явного получения следующего итерационного приближения вектора \mathbf{V}^{i+1} будем полагать оптический импульс гауссовым. Восстановим величины τ^{i+1} , C^{i+1} , P^{i+1} согласно правилу

$$\mathbf{V}^{i+1} = (\tau^{i+1}, C^{i+1}, P^{i+1})^T = \left(\tau^{i+1}, (\tau^{i+1})^2 \frac{d^2 \arg(u(\mathbf{V}^{i+1}, t))}{dt^2}, |u(\mathbf{V}^{i+1}, 0)|^2 \right)^T,$$

где τ^{i+1} удовлетворяет соотношению $\ln(|u(\mathbf{V}^{i+1}, \tau^{i+1})|^2/P^{i+1}) + 1 = 0$.

3. Критерий остановки итерационного процесса:

$$|P^{i+1}(z_{\min}) - P^{i+1}(z_{\max})| < \varepsilon P^{i+1}(z_{\max}),$$

где $\varepsilon > 0$ — малое наперед заданное число.

Эффективность представленного алгоритма заключается в соответствии организации итерационного процесса действительному поведению оптического импульса с ненулевым параметром фазовой модуляции в среде с различными знаками дисперсии. В лазерном резонаторе с дисперсионным управлением происходит периодическое расширение и сжатие солитона, что приводит к колебаниям пиковой мощности сигнала. Такой итерационный алгоритм существенно сокращает время, затраченное на вычисления.

Еще одним достоинством описанного алгоритма является возможность зафиксировать энергию солитона на предварительно установленном уровне, строго соответствующем балансу коэффициентов усиления и потерь системы (6). Например, метод стрельбы

не позволяет фиксировать энергию солитонного решения на нужном заранее установленном уровне, что приводит к невозможности получить нужное решение.

В общем случае итерационный процесс может не сойтись к периодическому решению системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Это говорит не об отсутствии устойчивости итерационного алгоритма, а об отсутствии импульсной генерации в дисперсионно управляемом лазере с заданным набором параметров. Таким образом, предложенный численный алгоритм позволяет не только сократить расчётное время, но и исследовать области устойчивой импульсной генерации диссипативных дисперсионно управляемых оптических солитонов в рамках системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих “быструю” динамику центральной части импульса.

3. Апробация численного алгоритма

В ходе исследования проводилось математическое моделирование распространения оптического импульса по лазерному резонатору с дисперсионной картой, состоящей из волоконного сегмента с положительной дисперсией второго порядка и волоконного сегмента с отрицательной дисперсией. Таким образом, знак средней дисперсии резонатора (здесь и далее все величины отмасштабированы)

$$\langle D \rangle = d_1 + d_2, \quad (14)$$

где d_1 и d_2 — дисперсии волоконного сегмента с отрицательной и положительной дисперсией соответственно, может меняться при помощи изменения длины волокна. Глубина вариаций дисперсии выражается как

$$D = d_1 - d_2 \quad (15)$$

и также изменяется за счёт изменения длины резонатора. Во введённых обозначениях дисперсии двух волоконных сегментов записываются в виде

$$d_1 = D + \langle D \rangle, \quad d_2 = -D + \langle D \rangle.$$

Далее рассматриваем дисперсионную карту следующего вида:

$$d(z) = \begin{cases} D + \langle D \rangle, & 0 \leq z < 0.25, \\ -D + \langle D \rangle, & 0.25 \leq z < 0.75, \\ D + \langle D \rangle, & 0.75 \leq z < 1. \end{cases}$$

Было проведено сравнение полученных результатов решения системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с результатами моделирования при помощи нелинейного уравнения Шредингера (рис. 3). Из рис. 3 видно, что приведённый выше подход к моделированию распространения оптического импульса в резонаторе, несмотря на распределённый учёт действия оптических устройств в лазере и применение ряда аналитических приближений, имеет хорошее согласование с моделированием при помощи точечной модели. Максимальное рассогласование двух представленных решений наблюдается для пиковой мощности импульса и составляет 10% в середине лазерного резонатора.

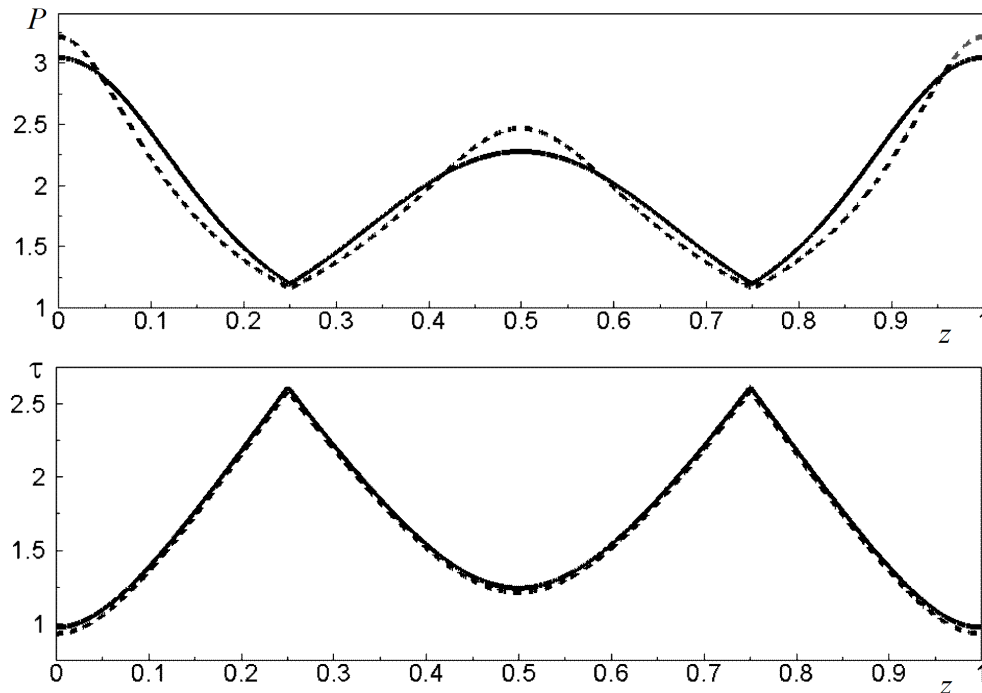


Рис. 3. Динамика пиковой мощности и ширины внутри резонатора. Штриховые линии — результаты моделирования при помощи уравнения Шредингера, сплошные — результаты моделирования при помощи системы нелинейных дифференциальных уравнений

Периодические солитонные решения консервативного нелинейного уравнения Шредингера известны давно, и их характеристики хорошо изучены. Диссипативная система (2)–(5) становится консервативной при отсутствии усиления и потерь, т. е. при $g_0 = l_0 = 0$. Так, в работе [23] была показана двухпараметрическая зависимость семейства солитонных решений системы. Характеристики солитонного решения этой системы полностью определяются нормированной средней дисперсией $\langle D \rangle / D$ и либо нормализованной пиковой мощностью импульса

$$\frac{P \varepsilon 4 \tau^2 (-\log(1/2))}{3.11 \cdot 2 |D + \langle D \rangle|},$$

либо глубиной эффективных модуляций дисперсии (map strength, далее для краткости будем называть эту величину нормализованной шириной)

$$\frac{2 |D| \cdot (1 + C^2)}{4 \tau^2 (-\log(1/2))},$$

поскольку между параметрами есть взаимнооднозначное соответствие.

Ещё одной важной характеристикой решений системы уравнений для консервативного случая является существование и стационарное расположение точки с нулевым параметром фазовой модуляции ($C = 0$) в середине волоконного сегмента с отрицательной дисперсией. Для рассматриваемой дисперсионной карты параметр фазовой модуляции принимает нулевое значение при $z = 0$ и $z = 1$.

Апробация приведённого численного алгоритма нахождения периодических решений системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений подтверждает данные факты. Так, на рис. 4 представлена зависимость нормализованной ширины импульса от нормализованной пиковой мощности. Линии уровня соответствуют различным значениям нормированной средней дисперсии импульса $\langle D \rangle / D$. Параметры солитона сняты в центре волокна дисперсионной карты, обладающего отрицательной дисперсией. В этой точке выполнено $C = 0$, т. е. импульсы обладают нулевым параметром фазовой модуляции.

В общем случае коэффициенты диссипативной системы не равны нулю, а периодические решения не всегда имеют точку внутри дисперсионной карты, где параметр фазовой модуляции $C = 0$, поэтому параметры солитона считаются в точке лазерного резонатора, где достигается минимальная ширина оптического импульса. Наличие или отсутствие точки с нулевым параметром фазовой модуляции преимущественно определяется знаком средней дисперсии. Так, в резонаторах с нормальной средней дисперсией такая точка отсутствует.

В ходе исследования изучено влияние средней дисперсии $\langle D \rangle$ и глубины вариации дисперсии D на энергию диссипативного дисперсионно управляемого солитона в точке минимальной ширины внутри резонатора. Для этого был использован некоторый набор коэффициентов системы (2)–(5). Рисунок 5 иллюстрирует зависимость средней энергии импульса от нормированной средней дисперсии. Линии уровня соответствуют различным значениям дисперсионных глубин. Представленные кривые получены при фиксированных коэффициентах системы $g_0 = 3$, $l_0 = 0.5$, $\nu = 0.3$, $\varepsilon_0 = 10$, $\varepsilon = 0.3$. Как видно из рис. 5, существует нетривиальная граница раздела между областями существования дисперсионно управляемых солитонов с нулевым и ненулевым значениями параметра фазовой модуляции в точке минимальной ширины в резонаторе. В окрестности этой границы существуют солитоны с минимальной энергией при фиксированном значении глубины вариации дисперсии D . В случае диссипативной системы неоднозначности решений системы не наблюдается, что характерно для консервативного случая. Каждому

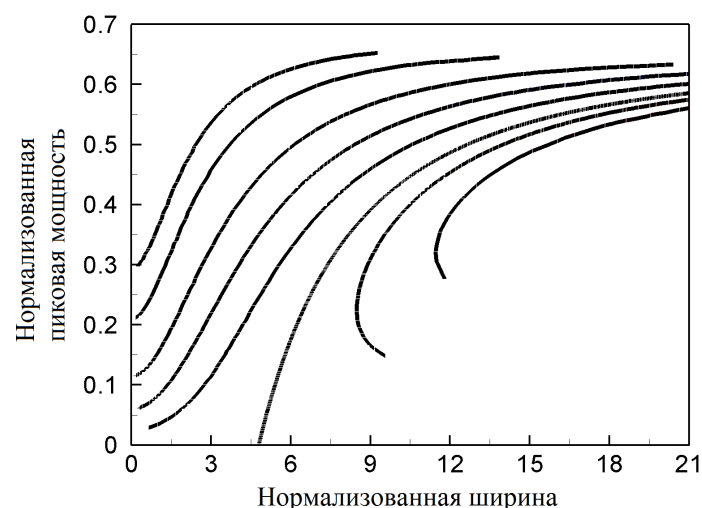


Рис. 4. Зависимость нормализованной ширины от нормализованной пиковой мощности. Линии уровня соответствуют различным значениям $\langle D \rangle / D$, слева направо -0.02 , -0.01 , 0.0 , 0.02 , 0.05 , 0.1 , 0.3

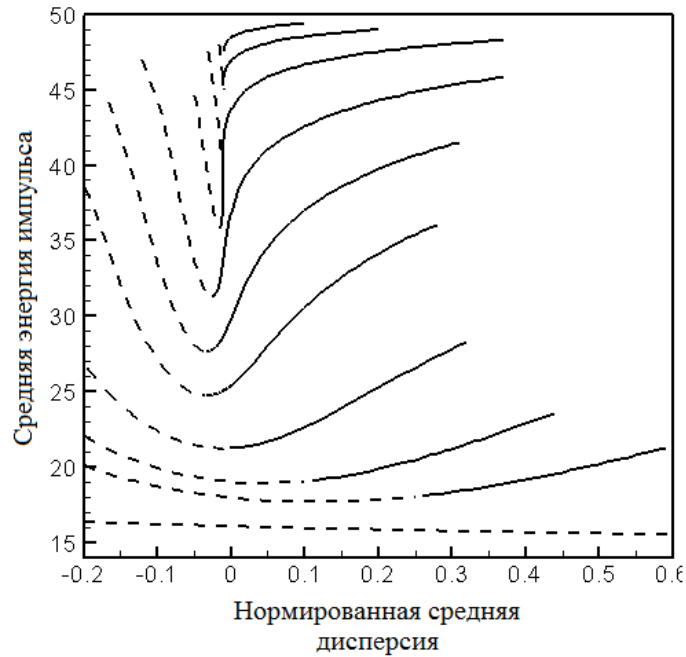


Рис. 5. Зависимость средней энергии импульса от $\langle D \rangle / D$ при различных дисперсионных глубинах: снизу вверх $D = 0.1, 0.6, 0.8, 1.2, 2.0, 3.0, 5.0, 10.0, 20.0, 40.0$. Сплошные линии — решения, для которых выполняется $C = 0$, штриховые — решения с ненулевым параметром фазовой модуляции

фиксированному значению глубины вариации дисперсии D соответствует свой минимум энергии солитона и существует общий верхний предел энергии, часто недостижимый в области существования.

Заключение

В работе представлен алгоритм нахождения периодических решений системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих “быструю” динамику диссипативных солитонов. Предложенный метод позволяет проводить многопараметрическую оптимизацию волоконных лазеров с дисперсионным управлением без значительных затрат вычислительных ресурсов и времени. Дальнейшее исследование предполагается проводить в направлении оптимизации реальных диссипативных волоконных лазерных систем с дисперсионным управлением при помощи алгоритма, описанного и апробированного в данной работе.

Список литературы

- [1] AGRAWAL G.P. Nonlinear Fiber Optics. New York: Acad. Press, 2001. 467 p.
- [2] GABITOV I., TURITSYN S.K. Averaged pulse dynamics in a cascaded transmission system with passive dispersion compensation // Opt. Lett. 1996. Vol. 21, No. 5. P. 327–329.
- [3] TURITSYN S.K. Breathing self-similar dynamics and oscillatory tails of the chirped dispersion-managed soliton // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58, No. 2. P. R1256–R1259.

- [4] TURITSYN S.K., SCHÄFER T., MEZENTSEV V.K. Self-similar core and oscillatory tails of a path-averaged chirped dispersion-managed optical pulse // *Opt. Lett.* 1998. Vol. 23, No. 17. P. 1351–1353.
- [5] TURITSYN S., SHAPIRO E. Enhanced power breathing soliton in communication systems with dispersion management // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 56, No. 5. P. R4951–R4955.
- [6] BELANGER P., BELANGER N. Rms characteristics of pulses in nonlinear dispersive lossy fibers // *Opt. Commun.* 1995. Vol. 117, No. 1–2. P. 56–60.
- [7] WALD M., UZUNOV I.M., LEDERER F., AND WABNITZ S. Optimization of soliton transmissions in dispersion-managed fiber links // *Ibid.* 1998. Vol. 145. P. 48–52.
- [8] GORDON J.P., MOLLENAUER L.F. Scheme for the characterization of dispersion-managed solitons // *Opt. Lett.* 1999. Vol. 24, No. 4. P. 323–325.
- [9] AGRAWAL G.P. *Nonlinear Fiber Optics*. 4th Edn. New York: Acad. Press, 2007.
- [10] TURITSYN S.K., BALE B., AND FEDORUK M.P. Dispersion-managed solitons in fibre systems and lasers // *Phys. Rep.* 2012. Vol. 521, No. 4. P. 135–203.
- [11] БАХВАЛОВ Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
- [12] САМАРСКИЙ А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
- [13] HOLT J. Numerical solution of nonlinear two-point boundary problems by finite difference methods // *Commun. ACM.* 1964. Vol. 7, No. 6. P. 366–373.
- [14] ТИХОНОВ А.Н., САМАРСКИЙ А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
- [15] ВЕРЖБИЦКИЙ В.М. Численные методы. М.: Высшая школа, 2001.
- [16] ХАУСХОЛДЕР А.С. Основы численного анализа. М.: Иностранная литература, 1956.
- [17] КОРН Г., КОРН Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973.
- [18] МАРЧУК Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
- [19] МИХЛИН С.Г., СМОЛИЦКИЙ Х.Л. Приближённые методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1965.
- [20] KELLER H. *Numerical Methods for Two-point Boundary Value Problem*. Blaisdell Publ. Co., 1968.
- [21] ROBERTS S., SHIPMAN S.J. *Two-point Boundary Value Problems: Shooting Methods*. New York: Elsevier, 1972.
- [22] NIJHOF J., FORISIAK W., AND DORAN N. The averaging method for finding exactly periodic dispersion-managed solitons // *IEEE J. Select. Topics in Quant. Electron.* 2000. Vol. 6, No. 2. P. 330–336.
- [23] BERNTSON A., DORAN N.J., FORISIAK W., AND NIJHOF J.H.B. Power dependence of dispersion-managed solitons for anomalous, zero, and normal path-average dispersion // *Opt. Lett.* 1998. Vol. 23, No. 12. P. 900–902.

*Поступила в редакцию 9 сентября 2013 г.,
с доработки — 19 декабря 2013 г.*