Автомодельное решение нелинейного уравнения диффузии для спектральной плотности энергии турбулентности*

В. Н. Гребенёв[1], С. В. Назаренко[2], И. В. Шваб[1,4], Ю. А. Чиркунов[1], Г. Г. Лазарева[3,4], О. В. Штырина[1,4], С. Б. Медведев[1]
[1]*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2]*Институт математики университета г. Варвик, Англия*
[3]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия*
[4]*Новосибирский государственный университет, Россия*
e-mail: vngrebenev@gmail.com

Изучается нелинейное вырождающееся уравнение диффузии для феноменологического описания турбулентности, ассоциированное с моделью Лейта. Дано аналитическое обоснование существования автомодельного режима для спектральной плотности энергии турбулентности $E(k,t)$ в пространстве волновых чисел k и проведено численное исследование поведения траекторий в фазовом пространстве соответствующей динамической системы. Рассматриваемое уравнение построено таким образом, что возникают два стационарных решения: колмогоровский спектр, соответствующий каскадному состоянию, и термодинамическое распределение, которое устанавливается в системе. Стационарное состояние в данной модели состоит из "нелинейной смеси" постоянного потока и термодинамической компоненты. Автомодельный режим модели реализуется как автомодельное решение второго рода, для которого формирование спектра на больших волновых числах происходит за конечное время, что было показано ранее в результате численных экспериментов в случае исчезающей вязкости и отсутствия внешних сил воздействия.

Ключевые слова: турбулентность, колмогоровский спектр, термодинамическое распределение, автомодельное решение, гетероклиническая траектория.

Введение

Уравнение, предложенное в [1], записывается в виде, близком к модели Лейта [2]:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial k}\left(k^{11/2}E^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial k}\left(E/k^2\right)\right) + f - \nu k^2 E, \tag{1}$$

где t — время, k — абсолютное значение волнового числа, f — внешняя сила, ν — коэффициент кинематической вязкости. Спектр энергии турбулентности $E(k,t)$ нормирован

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 12-01-00234-а и 12-01-00648-а) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2012–2013 годы" (контракт 8504).

таким образом, что плотность кинетической энергии равна $\int E dk$. Отметим, что уравнение (1) является частным случаем семейства уравнений, изучаемых в работе [3], и при отсутствии внешних сил и диссипативных членов имеет в качестве стационарного решения в дополнение к колмогоровскому спектру $E(k) = P^{2/3}k^{-5/3}$ термодинамический спектр $E(k) = Q^{2/3}k^2$, где P и Q постоянны. Общее стационарное решение уравнения является нелинейной комбинацией этих спектров. Как показано в [1], стационарный спектр возникает либо при наличии внешних сил, либо в случае, когда начальные условия сосредоточены в окрестности достаточно малых значений волновых чисел k. При этом происходит распространение фронта плотности кинетической энергии турбулентности в направлении больших $k \to \infty$ и за фронтом устанавливается степенной колмогоровский спектр.

Введённое в рассмотрение автомодельное решение (см. [1]) уравнения (1) в случае исчезающей вязкости и отсутствия внешний сил есть следствие допустимости уравнением двухпараметрической группы растяжений, особенностью которой является невозможность вычисления её параметров на основе законов сохранения и анализа размерности задачи. Данный тип автомодельных решений относится к понятию автомодельности второго рода, введённому в пионерных работах Л.Д. Ландау и К.П. Станюковича, а также Г. Гудерлея [4–6]. Отметим, что уравнение (1) близко связано с уравнением нелинейной диффузии в неоднородной среде

$$|y|^l \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(|y|^m u^\beta \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \beta > 0. \tag{2}$$

Автомодельные решения уравнения (2) изучались в [7], где анализируемый набор параметров не охватывает случай показателей неоднородности среды, рассматриваемый в настоящей работе. В данном контексте полученные в представленной статье результаты можно рассматривать как развитие работы [7] в направлении изучения такого автомодельного режима нелинейной диффузии в неоднородной среде, при котором происходит неограниченный рост носителя решения уравнения за конечное время. Кроме того, результаты аналитического исследования соответствующей динамической системы, порождаемой уравнением (1) в отсутствие внешних сил и исчезающей вязкости, иллюстрируются численными экспериментами, показывающими поведение траекторий системы на фазовой плоскости.

Сохранение рассматриваемой моделью симметрийных свойств уравнений Навье—Стокса делают её полезной при исследовании формирования промежуточного асимптотического режима, найденного численно в [1] для так называемого явления “тёплого” каскада, возникающего в турбулентности, который в рамках уравнения (1) описывается изучаемым автомодельным решением.

Существование автомодельного решения

Рассмотрим уравнение (1) в случае исчезающей вязкости и отсутствия внешних сил воздействия на неоднородную среду

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial k}\left(k^{11/2}E^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial k}\left(E/k^2\right)\right). \tag{3}$$

Уравнение (3) допускает следующее представление решения в автомодельном виде:

$$E = (t_* - t)^a F(\eta), \quad \eta = k/k_*, \quad k_* = c(t_* - t)^b, \tag{4}$$

где a, b, c — константы такие, что a, c — положительные, а b — отрицательная величины, при этом a и b удовлетворяют соотношению

$$a = -2 - 3b. \tag{5}$$

Тогда уравнение для функции F запишем как

$$(3b+2)F + b\eta\frac{dF}{d\eta} = \frac{C^{3/2}}{8}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^{11/2}F^{\frac{1}{2}}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^{-2}F\right)\right) \tag{6}$$

и будем искать F в классе неотрицательных функций, где она ведёт себя как $F_0\eta^{-x}$ при $\eta \to 0$ и как $\dfrac{b^2}{4}(1-\eta)^2$ при $\eta \to 1$, где $x = -a/b$, а F_0 — произвольная положительная константа. Подходящим масштабным преобразованием константа c и коэффициент $C^{3/2}/8$ могут быть приравнены к единице, и тогда (6) примет следующий вид, где a и b выражены в терминах параметра x:

$$\frac{2}{x-3}\left(\eta\frac{dF}{d\eta} + xF\right) = \frac{d}{d\eta}\left(\eta^{11/2}F^{\frac{1}{2}}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^{-2}F\right)\right). \tag{7}$$

Для уравнения (7) получаем нелинейную краевую задачу на собственные значения, в которой необходимо найти значение параметра x вместе с функцией F, удовлетворяющей вышеприведённым краевым условиям. Уравнение (7) может быть сведено к автономному уравнению с помощью подстановки

$$F = \frac{1}{25}\eta^{-3}f^2, \quad \frac{dF}{d\eta} = \frac{3}{25}\eta^{-4}fg, \tag{8}$$

где $f(s)$ и $g(s)$ — функции переменной $s = \ln\eta$, что позволяет получить на них систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} &= \frac{3}{2}(f+g), \\ f\frac{dg}{ds} &= \frac{1}{3}\left(5f^2 + 6fg - 9g^2 + \frac{10}{x-3}(3g + xf)\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Далее преобразованием

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{f}\frac{d}{d\tau}, \quad \rho(\tau) = f(s), \quad \sigma(\tau) = g(s)$$

система (9) сводится к виду, пригодному для её последующего изучения в рамках теории динамических систем:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} &= \frac{3}{2}\rho\,(\rho+\sigma), \\ \frac{d\sigma}{d\tau} &= \frac{1}{3}\left(5\rho^2 + 6\rho\sigma - 9\sigma^2 + \frac{10}{x-3}(3\sigma + x\rho)\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Состояниями равновесия системы (10) на фазовой плоскости (ρ, σ) являются следующие точки фазовой плоскости: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0, 10/3(x-3))$ и $P_3 = (1,-1)$. Сразу отметим, что искомая траектория системы расположена в квадранте $\rho > 0$, $\sigma < 0$. Переменной $\eta \to 0$ соответствует $\tau \to -\infty$, и так как $F \sim \eta^{-x}$, $dF/d\eta \sim -x\eta^{-x-1}$ при $\eta \to 0$ получаем $f \sim 5\eta^{(3-x)/2}$ и $g \sim -(5/3)x\eta^{(3-x)/2}$. Отметим также, что значение искомого параметра x принадлежит интервалу $(0,3)$. Граница фронта автомодельного решения (6) соответствует значению $\eta = 1$ или $\tau \to \infty$. Фактически границей фронта автомодельного решения является точка равновесия P_2, где $f \sim -5/2(b\eta^{3/2}(1-\eta))$ и $g \sim 5b/3$ (см. [8]). Точка равновесия P_3 соответствует точному решению уравнения (7), равному $F = (1/25)\eta^{-3}$. Дифференциал правой части системы (10) имеет следующий вид:

$$\Delta(\rho,\sigma) = \begin{pmatrix} 3\rho + \dfrac{3}{2}\sigma & \dfrac{3}{2}\rho \\ \dfrac{1}{3}\left(10\rho + 6\sigma + \dfrac{10x}{x-3}\right) & \dfrac{1}{3}\left(6\rho - 18\sigma + \dfrac{30}{x-3}\right) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Тогда

$$\Delta(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{10x}{3(x-3)} & \dfrac{10}{x-3} \end{pmatrix}$$

и точка $P_1 = (0,0)$ является вырожденной особой точкой линеаризованной системы с собственными значениями $\lambda_1 = 10/(x-3)$, $\lambda_2 = 0$ и собственными векторами

$$e_1 = (0,1)\,, \quad e_2 = \left(1, -\frac{x}{3}\right).$$

Следовательно, устойчивое многообразие динамической системы (10) лежит на оси σ, в то время как центральное многообразие, которое мы обозначим через U_x, выходит из начала координат полуплоскости $\rho > 0$ с коэффициентом угла наклона, равным $-x/3$.

В точке $P_2 = (0, 10/3(x-3))$ имеем

$$\Delta\left(0, 10/3(x-3)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{x-3} & 0 \\ \dfrac{10(2+x)}{3(x-3)} & -\dfrac{10}{x-3} \end{pmatrix},$$

поэтому она является вырожденной особой точкой линеаризованной системы с соответствующими собственными значениями $\lambda_1 = 5/(x-3)$, $\lambda_2 = -10/(x-3)$ и собственными векторами

$$e_1 = \left(1, \frac{2x+4}{9}\right), \quad e_2 = (0,1)\,.$$

Неустойчивое многообразие лежит на оси σ, и устойчивое многообразие, которое обозначим через S_x, имеет коэффициент угла наклона с осью ρ, равный $\dfrac{2x+4}{9}$ в точке P_2. Отметим, что многообразия (орбиты) U_x и S_x зависят от параметра x непрерывно [9].

В точке $P_3 = (1, -1)$ дифференциал равен

$$\Delta(1,-1) = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} & \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{4}{3} + \dfrac{10x)}{3(x-3)} & 8 + \dfrac{10}{x-3} \end{pmatrix}.$$

Собственные значения

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{19}{2} + \frac{10}{x-3} \pm \sqrt{\left(\frac{19}{2} + \frac{10}{x-3}\right)^2 - 20}\right\}$$

являются комплексными для $x \in (1.02, 2.29)$ и вещественными для $x \in (0, 1.02)$ и $x \in (2.29, 3)$, соответственно $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} > 0$ при $x < 1.95$ и $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} < 0$ при $x > 1.95$. Бифуркации Хопфа существуют при $x = 1.95$. Таким образом, точка $(1, -1)$ является неустойчивым узлом при $x \in (0, 1.02)$, и неустойчивым фокусом при $x \in (1.02, 1.95)$ и соответственно устойчивым узлом при $x \in (2.28, 3)$ и устойчивым фокусом при $x \in (1.95, 2.28)$. Чтобы показать разрешимость рассматриваемой нелинейной задачи на собственные значения, необходимо доказать существование значения x^* параметра x такого, что многообразия U_{x^*} и S_{x^*} совпадают, т. е. установить существование гетероклинической траектории, соединяющей точки $P_1 = (0, 0)$ и $P_2 = (0, 10/3(x-3))$ на фазовой плоскости (ρ, σ). Сначала приведём несколько лемм о свойствах траекторий (орбит) динамической системы (10).

Лемма 1. *Существует решение системы (10) в виде* $\sigma(\tau) = -(5/9)\rho(\tau) = -(x/3)\times \rho(\tau)$ *с параметром* $x = 5/3$.

Доказательство этой леммы основано на прямых вычислениях. Заметим, что чисто колмогоровский спектр $E = \mathrm{const} \cdot k^{-5/3}$ соответствует $x = 5/3$ (см. [1]) и соответствующее неустойчивое многообразие (орбита) $U_{5/3}$ “уходит” на бесконечность при $\tau \to \infty$.

Лемма 2. *Не существует периодических траекторий системы (10), расположенных целиком в областях* $\rho + \sigma > 0$ *и* $\rho + \sigma < 0$.

Из первого уравнения системы (10) легко показать, что выражение $d\rho/d\tau$ меняет знак, когда траектория пересекает линию $\rho = -\sigma$, что и доказывает утверждение леммы.

Существование точного решения системы (10) позволяет установить нижнюю оценку значения x^*.

Лемма 3. *Неустойчивое многообразие (орбита)* U_x *не пересекает прямую* $\sigma(\tau) = -(5/9)\rho(\tau)$ *для* $x < 5/3$.

Предположим, что существует точка (ρ_0, σ_0), в которой U_x пересекает прямую $\sigma(\tau) = -(5/9)\rho(\tau)$. Можно считать, что многообразие (орбита) U_x задано как функция $\sigma_x = \sigma(\rho, x)$ в окрестности (ρ_0, σ_0). Для достаточно малых значений ρ и σ, т. е. вблизи начала координат $(0, 0)$, имеем $U_x > \sigma(\tau)$ для $x < 5/3$ и $U_x > \sigma(\tau)$ на интервале $(0, \tau_0)$, где τ_0

определяет (ρ_0, σ_0). Таким образом, в точке (ρ_0, σ_0) производная $d\sigma_x/d\rho$ меньше или равна $d\sigma/d\rho$. С другой стороны, из системы (10) имеем

$$d\sigma_x/d\rho = \left(5\rho^2 + 6\rho\sigma - 9\sigma^2 + \frac{10}{x-3}(3\sigma + x\rho)\right) \Big/ \left(2\rho(\rho+\sigma)\right). \qquad (12)$$

Рассмотрим разность $d\sigma/d\rho$ и $d\sigma_x/d\rho$ в точке (ρ_0, σ_0), используя формулу (12). В результате получим

$$d\sigma/d\rho - d\sigma_x/d\rho = \left(-\frac{10}{x-3}(3\sigma_0 + x\rho_0)\right) \Big/ \left(2\rho_0(\rho_0+\sigma_0)\right),$$

или

$$d\sigma/d\rho - d\sigma_x/d\rho = \left(-\frac{30\rho_0}{x-3}\left(\frac{\sigma_0}{\rho_0} + \frac{x}{3}\right)\right) \Big/ \left(2\rho_0(\rho_0+\sigma_0)\right). \qquad (13)$$

Здесь $\sigma_0/\rho_0 = -5/9$, $2\rho_0(\rho_0+\sigma_0) > 0$. Так как $x < 5/3$, то получим, что правая часть в (13) является отрицательной, что ведёт к противоречию. Таким образом, орбита U_x не может пересечь линию $\sigma(\tau) = -(5/9)\rho(\tau)$.

Следствие 1. *Параметр $x^* > 5/3$.*

Лемма 4. *Неустойчивое многообразие U_x лежит "ниже" линии $\sigma(\tau) = -(5/9)\rho(\tau)$, если $x > 5/3$.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3.

Рассмотрим устойчивое многообразие S_x в области $\rho + \sigma < 0$. Докажем свойство монотонности S_x при изменении параметра x.

Лемма 5. *Если $x_1 < x_2$, то S_{x_1} лежит "выше" S_{x_2} в области $\rho + \sigma < 0$.*

Очевидно, что S_{x_1} лежит "выше" S_{x_2} при достаточно малых ρ и $x_1 < x_2$. Предположим, как и при доказательстве леммы 3, что существует точка (ρ_0, σ_0), в которой S_{x_1} пересекает S_{x_2}. Пусть $\sigma_i = \sigma(\rho, x_i)$ определяет S_{x_i}, $i = 1, 2$, локально и $\sigma_1 = \sigma_2$ при $\rho = \rho_0$. Тогда $d\sigma_1/d\rho \le d\sigma_2/d\rho$ в точке пересечения S_{x_1}и S_{x_2}. Используя, как и в лемме 3, уравнения системы (10), получим следующую формулу для разницы $d\sigma_1/d\rho - d\sigma_2/d\rho$ в точке ρ_0:

$$d\sigma_1/d\rho - d\sigma_2/d\rho = 10\rho_0\left(\frac{3\sigma_0\rho_0^{-1} + x_1}{x_1 - 3} - \frac{3\sigma_0\rho_0^{-1} + x_2}{x_2 - 3}\right) \Big/ \left(2\rho_0(\rho_0+\sigma_0)\right), \qquad (14)$$

где $\sigma(\rho_0, x_i) = \sigma_0$ в точке пересечения σ_i. Анализируя правую часть формулы (14) и принимая во внимание условие $\rho_0 + \sigma_0 < 0$, приходим к неравенству $d\sigma_1/d\rho > d\sigma_2/d\rho$ при $\rho = \rho_0$. Последнее означает, что S_{x_1} не может пересечь S_{x_2}. Такое же утверждение справедливо и для неустойчивого многообразия U_x в области $\rho + \sigma > 0$.

Лемма 6. *Если $x_1 < x_2$, то U_{x_1} лежит "выше" U_{x_2} в области $\rho + \sigma > 0$.*

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству леммы 5. Для завершения доказательства монотонности S_x и U_x вплоть до прямой $\rho+\sigma=0$ предположим сначала, что S_{x_1} и S_{x_2} пересекают прямую $\rho+\sigma=0$ в точке (ρ_0,σ_0), $\rho_0=-\sigma_0$. В окрестности (ρ_0,σ_0) можно представить S_{x_i} в виде $\rho_i=\rho(\sigma,x_i)$. Тогда из леммы 5 следует, что $\rho_1<\rho_2$ вблизи (ρ_0,σ_0). С другой стороны, в окрестности (ρ_0,σ_0), $\rho_0=-\sigma_0$ имеем следующее разложение в ряд Тейлора:

$$\rho_i(\sigma)=\rho_0+\frac{9\sigma_0}{20(\sigma_0^2+\sigma_0)}(\rho+\sigma)^2+$$

$$+\frac{9}{2}\left(\frac{9\sigma_0^2}{200(\sigma_0^2+\sigma_0)^2}+2\sigma\frac{-24\sigma_0+30/(x-3)}{100(\sigma_0^2+\sigma_0)^2}\right)(\rho+\sigma)^3+\ldots, \tag{15}$$

из которого следует, что $\rho_1(\sigma)>\rho_2(\sigma)$ вблизи (ρ_0,σ_0) для $\rho+\sigma<0$. Полученное противоречие $\rho_1<\rho_2$ доказывает, что S_{x_i} не пересекает линию $\rho+\sigma=0$. Аналогичные вычисления верны для траектории U_{x_i}.

При доказательстве свойства монотонности для S_x и U_x, неявно предполагалось, что S_x и U_x пересекают прямую $\rho+\sigma=0$. Сначала установим, что для каждого фиксированного x орбита S_x лежит в ограниченной области квадранта $\rho>0$, $\sigma<0$. Обозначим производную $d\sigma/d\rho$ через $G(\rho,\sigma)$ и рассмотрим прямоугольный треугольник Γ, ограниченный прямой $\rho=(3/2)\sigma-5/(x-3)$ (которую обозначим через l) и осями ρ и σ. Заметим, что коэффициент угла наклона прямой l мажорирует коэффициент угла наклона орбиты S_x с осью σ для значений $x>5/3$. Докажем, что векторное поле, определяемое $G(\rho,\sigma)$, направлено внутрь треугольника Γ. Другими словами, докажем следующее утверждение.

Лемма 7. *Для $\sigma\in(0,10/3(x-3))$ имеет место неравенство*

$$G(l,\sigma)\le 2/3. \tag{16}$$

Рассмотрим векторное поле $G(\rho,\sigma)$ и подставим $\rho=l$. Тогда (16) переписывается в виде

$$\frac{45/4\sigma^2-15A\sigma+A\sigma^2+2Axl}{45/4\sigma^2-12A\sigma+3A^2}\le 1,$$

что эквивалентно неравенству $-2A^2+3A\sigma-2Axl\ge 0$, где $A=5/(x-3)$. Неравенство имеет место, если $A(x-1)(2A-3\sigma)\ge 0$. Так как $A<0$ и $x>5/3$, то для доказательства достаточно показать, что $2A-3\sigma\le 0$, или $10/3(x-3)\le\sigma$. Последнее неравенство с очевидностью верно, что и завершает доказательство леммы.

Следствие 2. *Орбита S_x всегда пересекают прямую $\rho+\sigma=0$ при $x>5/3$.*

Из леммы 7 следует, что орбита S_x, если её рассматривать как неустойчивое многообразие, выходящее из точки равновесия P_2, не может уйти в области $\rho+\sigma<0$ на бесконечность с изменением времени и не имеет предельного цикла (см. лемму 2). Если предположить, что орбита S_x не пересекает прямую $\rho+\sigma=0$, то она должна достигать точки равновесия P_1, приближаясь к ней ниже прямой $\rho+\sigma=0$, что ведёт к неравенству $x/3>1$ и противоречит условию $x<3$. Следовательно, орбита S_x должна пересекать прямую $\rho+\sigma=0$.

Рассмотрим орбиты U_x для значений $x > 5/3$.

Лемма 8. *Существует x^{**} такое, что орбита U_x пересекает прямую $\rho + \sigma = 0$ для всех $x \geq x^{**}$*

Предположим противное, т. е. орбита U_x при всех значениях $x > 5/3$ не пересекает прямую $\rho+\sigma = 0$. Тогда орбита U_x полностью расположена в угле со сторонами $\rho+\sigma = 0$ и $\sigma = (-x/3)\rho$. В силу монотонной и непрерывной зависимости U_x от параметра x, координаты $\rho(\tau)$ и $\sigma(\tau)$ орбиты U_x при каждом фиксированном τ сходятся к конечным значениям при $x \to 3$. Интегрируя второе уравнение системы (8), получим

$$\sigma(\tau) - \sigma(\tau_0) = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \left(5\rho^2 - 6\rho\sigma - 9\sigma^2 + \frac{10}{x-3}(3\sigma + x\rho)\right). \tag{17}$$

Перейдём к пределу в (17), устремляя $x \to 3$. Предел в левой части существует и конечен. Для существования предела в правой части необходимо положить $\rho(\tau) = -\sigma(\tau)$ при $x \to 3$. Таким образом, последовательность $U_x(\tau)$ сходится к $\rho(\tau) + \sigma(\tau) = 0$ при $x \to 3$ для всех $\tau \in (-\infty, \infty)$. Рассмотрим формулы (8) для $F(\eta)$ и $dF(\eta)/d\eta$. Так как $\rho(\tau) = -\sigma(\tau)$, то получим, что $f(\eta) = -g(\eta)$, $\eta \in (0, 1)$. Дифференцируя первое соотношение из формул (8) и сравнивая полученное выражение со вторым соотношением, приходим к равенствам $f(\eta) = \mathrm{const}$, $g(\eta) = -\mathrm{const}$. Следовательно, $\rho(\tau) = \mathrm{const}$, $\sigma(\tau) = -\mathrm{const}$ для $\tau \in (-\infty, \infty)$. Последнее противоречит тому, что $\rho(\tau) + \sigma(\tau) = 0$ определяет прямую на фазовой плоскости (ρ, σ).

Полученные результаты позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема. *Существует гетероклиническая траектория, соединяющая точки равновесия P_1 и P_2.*

Рассмотрим последовательность точек s_m, $m \to \infty$, на фазовой плоскости (ρ, σ), которая образуется в результате пересечения орбит S_{x_m} с прямой $\rho + \sigma = 0$, где x_m — возрастающая последовательность значений параметра x. Обозначим через (ρ_m, σ_m) координату точки s_m, где $\rho_m = -\sigma_m$. В силу монотонной и непрерывной зависимости S_x от параметра x значения ρ_m монотонно и непрерывно возрастают при $m \to \infty$, соответственно σ_m монотонно и непрерывно убывают при изменении m. Другими словами, точки s_m движутся вниз по биссектрисе угла квадранта (ρ, σ), $\rho \geq 0$, $\sigma = -\rho$. Принимая во внимание нижнюю оценку значения искомого параметра $x^* > 5/3$, выберем начальное значение параметра x_0 последовательности x_m равным $x_0 = 5/3$. Последовательность точек s_m является неограниченным множеством на прямой $\rho + \sigma = 0$ при $m \to \infty$ или $x \to 3$. Предположим противное, тогда существует $\lim_{m\to\infty} \sigma_m = -\lim_{m\to\infty} \rho_m = \bar{s} < \infty$. В произвольной окрестности предельной точки рассмотрим интегральное представление для координаты σ_m

$$\sigma(\tau) - \sigma_m = \int\limits_{\tau}^{\tau_m} \left(5\rho^2 - 6\rho\sigma - 9\sigma^2 + \frac{10}{x_m - 3}(3\sigma + x\rho)\right),$$

где $S_{x_m}(\tau_m)$ определяет точку s_m на прямой $\rho+\sigma = 0$. Выбирая m достаточно большим (или x_m близким к 3), получим, что правая часть интегрального соотношения является сколь угодно большой величиной. В силу конечности значений $\sigma(\tau)$ и σ_m приходим

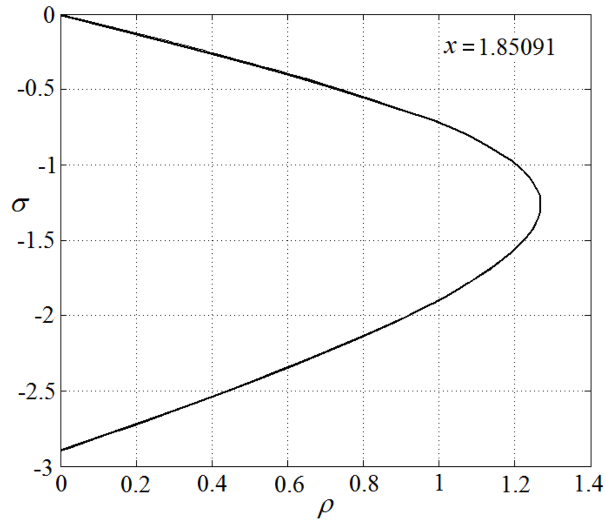

Рис. 1. Гетероклиничекая траектория, соединяющая точки равновесия P_1 и P_3 при $x^* = 1.85091$

к противоречию с предположением существования конечного предела последовательности s_m. Что касается точек пересечения орбиты U_x с прямой $\rho + \sigma = 0$ при увеличении параметра x, то ввиду установленных свойств эти точки движутся вдоль прямой по направлению к P_2. Следовательно, существует единственная точка s^* (и соответственно значение параметра x^*) последовательности s_m, в которой S_x и U_x пересекаются на прямой $\rho + \sigma = 0$. Таким образом, $S_{x^*} \cup U_{x^*}$ порождает гетероклиническую траекторию, соединяющую точки P_1 и P_2 (рис. 1).

А. Визуализация орбит динамической системы

Рисунки 2, *а–г* иллюстрируют поведение траекторий динамической системы (10) при различных значениях x (штриховые линии соответствуют гетероклинической траектории).

Приведённый анализ фазового портрета системы (10) показывает существование решения изучаемой краевой задачи на собственные значения, которое описывается гетероклинической траекторией динамической системы (10). Численное значение параметра x для гетероклинической траектории $x^* = 1.85091$.

B. Граничные условия и область значений для τ

Граничные условия для функции $F(\eta)$ имеют вид

$$F \sim F_0 \eta^{-x} \quad \text{при} \quad \eta \to 0, \quad F \sim \frac{b^2}{4}(1-\eta)^2 \quad \text{при} \quad \eta \to 1, \tag{18}$$

где F_0 — произвольная константа. После перехода к функции f и независимой переменной $s = \ln \eta$ граничные условия приобретают вид

$$f \sim 5F_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{3-x}{2}s} \quad \text{при} \quad s \to -\infty, \quad f \sim -\frac{5b}{2} e^{\frac{3}{2}s}(1-e^s) \quad \text{при} \quad s \to 0. \tag{19}$$

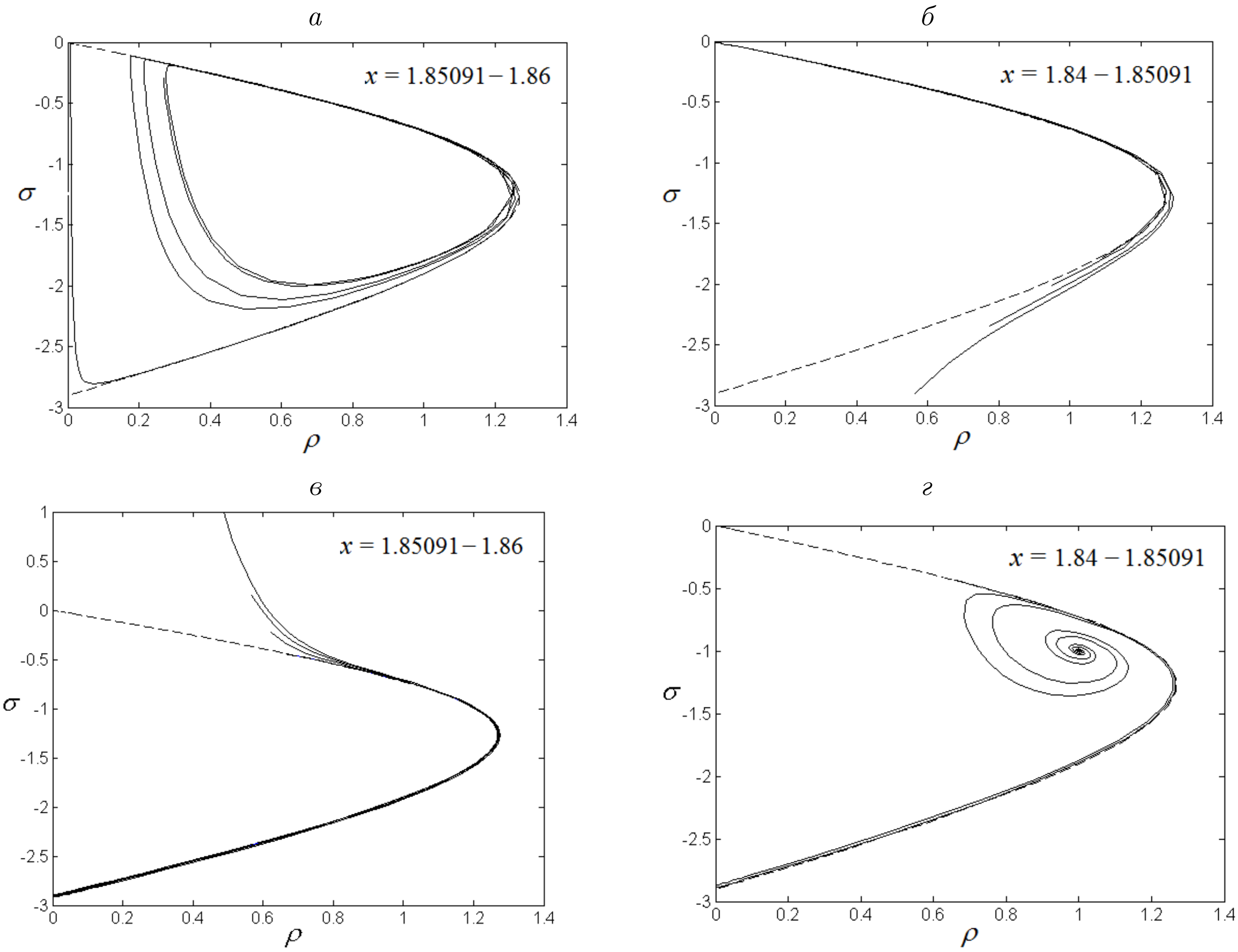

Рис. 2. Траектории, выходящие из точки P_1 (*а, б*) и точки P_2 (*в, г*) для параметров в диапазонах $x \in [x^*, 1.86]$ (*а*), $x \in [1.84, x^*]$ (*б*), $x \in [x^*, 1.86]$ (*в*), $x \in [1.84, x^*]$ (*г*)

Переход к независимой переменной τ определяется заменой

$$\tau = \int\limits_{s_0}^{s} \frac{ds'}{f(s')}.$$

Константу s_0 необходимо определять из граничных условий (19) на функцию $f(s)$. Поскольку она имеет нули в начальной ($s = -\infty$) и фронтальной ($s = 0$) точках, то интеграл имеет особенности и необходимо выбирать точку $s_0 \in (-\infty, 0)$ так, что $f(s_0) > 0$. Интегрируя в граничных точках, получим

$$\int\limits_{s_0}^{s} \frac{ds'}{f(s')} \sim \int \frac{ds}{5F_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{3-x}{2}s}} = \frac{1}{5F_0^{\frac{1}{2}}} \frac{2}{x-3} e^{\frac{(x-3)s}{2}} \to -\infty \quad \text{при} \quad s \to -\infty,$$

$$\int\limits_{s_0}^{s} \frac{ds'}{f(s')} \sim \int \frac{ds}{-\dfrac{5b}{2} e^{\frac{3}{2}s}(1-e^s)} \sim \frac{2}{5b}(-\ln(-s)) \to +\infty \quad \text{при} \quad s \to -0.$$

Таким образом, граничные условия (18) задают область значений для независимой переменной τ.

Список литературы

[1] Connaughton D., Nazarenko S. Warm cascade and anomalous scaling in a diffusion model of turbulence // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 92(4).

[2] Leith C. Diffusion approximation to inertial energy transfer in isotropic turbulence // Phys. Fluids. 1967. Vol. 10. P. 1409–1416.

[3] Besnard D., Harlow F., Rauenzahn R., and Zemach C. // Theor. Comput. Fluid Dyn. 1996. Vol. 8(1).

[4] Станюкевич К.П. Неустановившееся движение сплошной среды. Изд. 2-е. М.: Наука, 1971.

[5] von Guderley G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstosse in der Nahe des Kugelmittelpunktes bzw. Der Zylinderachse // Luftfahrtforschung. 1942. Vol. 19.9. P. 302–312.

[6] Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Изд. 2-е, доп. М.: Наука, 1966. 688 с.

[7] Grundy R.E. Large time solution of an inhomogeneous nonlinear diffusion equation // Proc. R. Soc. London. 2004. Vol. A386. P. 347–372.

[8] Connaughton D., Nazarenko S. A Model Equation for Turbulence. arXiv:physics/0304044. 2004.

[9] Marsden J.E., McCracken M. The Hopf Bifuraction and its Application. New York: Springer-Verlag, 1976.

Поступила в редакцию 11 сентября 2013 г.,
с доработки — 12 ноября 2013 г.