

Численные модели динамики безымпурсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде*

О. Ф. Воропаева^{1,3}, О. А. Дружинин², Г. Г. Черных^{1,3}

¹Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

²Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия

³Новосибирский государственный университет, Россия

e-mail: vorop@ict.nsc.ru, druzhinin@hydro.appl.sci-nnov.ru,
chernykh@ict.nsc.ru

Проведено сопоставление численных моделей динамики безымпурсного турбулентного следа за телом вращения в линейно стратифицированной среде: модели, основанной на прямом численном интегрировании уравнений Навье — Стокса в приближении Обербека — Буссинеска, и математических моделей, построенных с применением двух полуэмпирических моделей турбулентности, в том числе модели турбулентности третьего порядка. Результаты расчётов согласуются с известными экспериментальными данными.

Ключевые слова: прямое численное моделирование, полуэмпирические модели турбулентности, турбулентный след, устойчивая стратификация, приближение Обербека — Буссинеска

Введение

Интересным примером пространственного свободного турбулентного течения является турбулентный след за телом вращения в устойчиво стратифицированной среде. Течение, возникающее в турбулентном следе за телом, движущимся в стратифицированной жидкости, весьма своеобразно. При сравнительно слабой стратификации турбулентный след вначале развивается почти так же, как в однородной жидкости, и расширяется симметрично. Однако турбулентной диффузии в вертикальном направлении препятствуют архимедовы силы, поэтому на больших расстояниях от тела след приобретает сплюсненную форму и наконец совсем перестает расти в вертикальном направлении. Поскольку вследствие турбулентного перемешивания плотность жидкости в пределах следа распределена более равномерно, чем вне его, архимедовы силы стремятся восстановить прежнее состояние устойчивой стратификации. В результате в плоскости, перпендикулярной оси следа, возникают конвективные течения, приводящие к интенсивной генерации внутренних волн в окружающей жидкости. Турбулентные следы и генерируемые ими внутренние волны, будучи подробно изученными в лабораторных экспериментах, представляют интерес как тест для проверки работоспособности математических мо-

*Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 10-01-00435а и 12-01-00648, Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке научных школ РФ (№ НШ-6293.2012.9). Исследование на основе DNS поддержано также грантами РФФИ № 11-05-00455 и 13-05-91175.

делей. Весьма важная роль следоподобным течениям отводится в задачах гидрофизики [1], биологии и биофизики океана [2, 3].

Турбулентные следы за телами в стратифицированной жидкости рассматривались в целом ряде работ. Экспериментальное исследование турбулентного следа за самодвижущимся телом в линейно стратифицированной среде проведено Шули и Стюартом [4]. Пр продемонстрировано явление коллапса и генерации внутренних волн. Выполнены некоторые теоретические оценки внутренних волн и их проявления на свободной поверхности. Метод голографической интерферометрии для визуализации следов в стратифицированной жидкости развит Витте [5]. Меррит [6] экспериментально изучал явление коллапса безымпульсного следа в линейно стратифицированной среде. Он также выполнил соответствующий масштабный анализ. Смысл исследования заключается в получении данных, которые могут быть использованы для предсказания эффекта стратификации в развитии безымпульсного следа. В экспериментальных исследованиях безымпульсный турбулентный след в устойчиво стратифицированной среде моделировался осциллирующей решеткой. Путём использования степенных законов и теоретического анализа коллапса следа установлена связь расширения (роста) следа до и после коллапса и расстояния, при котором наступает коллапс. Для предсказания размеров следа установлены масштабные соотношения, основанные на применении плотностного числа Фруда. Получены две универсальные кривые для оценки горизонтального и вертикального размеров турбулентного следа в стратифицированной жидкости.

Детальное экспериментальное исследование характеристик турбулентности в следах за телами, движущимися в линейно стратифицированной среде, выполнено Линем и Пао [7] (см. также некоторые результаты лабораторных экспериментов Линя и Пао в статье Хессада [8]). Они наблюдали, в частности, анизотропное вырождение интенсивностей турбулентных флуктуаций горизонтальной и вертикальной компонент скорости. Насколько известно авторам настоящей работы, эти экспериментальные данные являются наиболее полными по вырождению турбулентных следов за самодвижущимися телами в линейно стратифицированной среде. Гильеас и Брандт [9] провели экспериментальное исследование внутренних волн, генерируемых самодвижущимся телом в стратифицированной жидкости. Рассмотрены два профиля плотности окружающей тело жидкости. В одном из них характерный вертикальный масштаб изменения плотности больше диаметра тела, в другом этот масштаб существенно меньше диаметра тела. Представлены теоретические оценки характеристик внутренних волн, включая волны, индуцируемые коллапсом турбулентного следа в стратифицированных жидкостях.

Серия работ Сысоевой и Чашечкина [10], Хопфингера и др. [11], Линя и др. [12], Чомаза и др. [13], Боннетона и др. [14], Шишкиной [15], Чашечкина [16], Спеддинга [17] посвящена изучению течения, возникающего при движении буксируемой сферы в линейно стратифицированной жидкости. Исследуются различные режимы течения в зависимости от значений чисел Рейнольдса и Фруда как в ближнем, так и в дальних следах. Рассматриваются турбулентность и внутренние волны. Анализ экспериментальных данных по генерации турбулентных следов за телами в линейно стратифицированной жидкости и теоретические оценки параметров внутренних волн выполнены Чашечкиным [16] и Вуазеном [18]. Теоретическое исследование начальной стадии динамики турбулентного следа в линейно стратифицированной жидкости с применением разработанной алгебраической модели рейнольдсовых напряжений и потоков проведено Онуфриевым [19]. Численное моделирование турбулентного следа за самодвижущимся телом в линейно стратифицированной среде и внутренних волн, генерируемых

коллапсом следа, для небольших расстояний от тела с применением модели локально равновесного приближения выполнено Левелленом и др. [20]. Представлены типичные распределения энергии турбулентности (в виде линий равной энергии) и картина вторичного течения в виде линий тока для двух моментов времени t после инициализации следа. Рассчитанный вертикальный размер турбулентного следа хорошо согласуется с экспериментальными данными Линя и Пао.

Хессид [8] провел численное исследование динамики турбулентных следов за буксируемым и самодвижущимся телами в линейно стратифицированной среде. Использовалась модифицированная модель локально равновесного приближения, включающая уравнения переноса энергии турбулентности и скорости её диссипации. Получено удовлетворительное согласие с экспериментальными данными Линя и Пао [7, 8] по изменению характерных размеров следа, дефекта продольной компоненты осреднённой скорости и энергии турбулентности на оси следа в зависимости от расстояния от тела как в однородной, так и в стратифицированной жидкости (для одного из значений плотностного числа Фруда). Однако, как было корректно замечено Шетцем [21], эффект стратификации в случае самодвижущегося тела при этом оказался завышенным в сравнении с экспериментально наблюдаемым Линем и Пао [7, 8]. Численное моделирование турбулентного следа за буксируемым телом с применением разработанного неявного варианта метода расщепления по физическим процессам для расчёта стратифицированных течений проведено Даниленко и др. [22]. Работа Черных и др. [23] посвящена численному моделированию турбулентного следа за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде. Были построены упрощённые модели дальнего турбулентного следа и генерируемых им внутренних волн. Роль начальной закрутки в эволюции безымппульсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде оценивалась в работе Глушко и др. [24]. Выполненный в работах [23, 24] численный анализ основан на математической модели локально-равновесного приближения, аналогичной описанной в [8].

Многие исследователи (см., например, [25–29]) изучали турбулентный след с применением плоской схематизированной модели. Рассматривалась плоская нестационарная задача о динамике локализованной области турбулентных возмущений в линейно стратифицированной жидкости. Работы Шули [25], Трохана и Чашечкина [26] посвящены экспериментальным исследованиям. Васильев и др. [27], Лыткин и Черных [28], Воропаева и др. [29] выполнили численное моделирование течения с применением ряда полуэмпирических моделей турбулентности. В частности, в [27] продемонстрирована связь генерации внутренних волн турбулентным следом с формированием конвективных вихрей противоположной направленности. Последнее приводит к появлению новых гребней и впадин внутренних волн и их перемещению вдоль горизонтальной оси в плоскости, ортогональной направлению движения тела.

Основанный на применении иерархии полуэмпирических моделей турбулентности второго порядка детальный численный анализ динамики безымппульсного следа в линейно стратифицированной среде осуществлен Черных и Воропаевой [30]. Показано, в частности, что удовлетворительное описание наблюдающегося в экспериментальных исследованиях [7] анизотропного вырождения турбулентности в дальнем следе может быть получено лишь с применением математической модели, включающей в себя дифференциальные уравнения переноса нормальных компонент тензора рейнольдсовых напряжений. Дано численное обоснование применимости вышеупомянутой схематизированной плоской модели турбулентного следа для линейно стратифицированной среды.

Подробное сопоставление турбулентных следов за буксируемым и самодвижущимся телами в линейно стратифицированной среде проведено Воропаевой и др. [31, 32], Мошкиным и др. [33], Черных и др. [34]. Применялась иерархия полуэмпирических моделей турбулентности. Показано, что турбулентный след за буксируемым телом как в линейно стратифицированной жидкости, так и в пикноклине генерирует внутренние волны существенно большей амплитуды. Дана физическая интерпретация полученного результата. Получено также, что след за буксируемым телом характеризуется большими геометрическими размерами и возмущениями дефекта давления, связанными с наличием порождения турбулентных возмущений за счёт градиентов продольной осреднённой компоненты скорости в случае буксируемого тела. Роль малого суммарного избыточного импульса при эволюции турбулентного следа в линейно стратифицированной среде оценивалась в модельной постановке Мошкиным и др. [35], Черных и др. [36]. Показано, что на рассмотренном интервале эволюции турбулентных следов (порядка десяти периодов плавучести) основное влияние малый суммарный избыточный импульс оказывает на поведение дефекта продольной компоненты скорости.

Математические модели безимпульсного турбулентного следа с применением дифференциальных уравнений переноса одноточечных корреляционных моментов третьего порядка поля скорости построены в [37–40]. Наиболее полной является работа Воропаевой [39]. Показано, что адекватное описание анизотропии вырождения безимпульсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде удастся получить лишь на основе математической модели, учитывающей вклад кумулянтов четвертого порядка и модифицированные алгебраические аппроксимации совместных тройных корреляций турбулентных флуктуаций полей скорости и плотности.

В последние годы детальному теоретическому, численному и экспериментальному анализу подвергаются турбулентные следы на очень больших расстояниях от буксируемых тел [41–51]. Спеддинг [41, 43] провел экспериментальное исследование анизотропии характеристик турбулентности в следах в стратифицированной жидкости. При численном анализе применяется как прямое численное моделирование на основе уравнений Навье — Стокса (DNS) (Гоурлей и др. [42], Дружинин и др. [47, 48]), так и метод крупных вихрей (Домермус и др. [44]). Построена упрощенная квазилинейная модель следа за буксируемым телом при больших значениях чисел Рейнольдса и Фруда и на очень больших расстояниях от него (Баландина и др. [45]). Модель основана на предположении о том, что основной механизм развития следа — неустойчивость. В квазилинейном приближении рассматривается эволюция наиболее неустойчивой “изгибной” моды возмущений спутного струйного течения. В работе Меньюэра и Спеддинга [46] представлены результаты экспериментальных исследований следов за плохообтекаемыми телами в линейно стратифицированной среде в зависимости от соотношения силы сопротивления и силы тяги. Даны теоретические оценки.

Процесс излучения внутренних волн турбулентным следом в линейно стратифицированной жидкости исследовался в [47] с помощью метода прямого численного моделирования. Результаты показывают, что на временах $Nt < 30$ (где N — частота плавучести) происходит коллапс вертикальных пульсаций скорости, сопровождающийся излучением внутренних волн с характерной длиной волны, близкой к длине волны спиральной моды неустойчивости струйного течения в следе. Амплитуда внутренних волн уменьшается с увеличением глобального числа Ричардсона и удовлетворительно описывается асимптотикой, следующей из линейной теории для импульсного источника. Кинематика внутренних волн в численном моделировании также согласуется с выводами

линейной теории для импульсного источника, а их параметры в численном моделировании хорошо согласуются с параметрами “когерентных” внутренних волн, излучаемых стратифицированным следом в лабораторном эксперименте [11]. На больших временах ($Nt \geq 60$) излучение внутренних волн прекращается и происходит формирование крупномасштабных плоских вихрей, расположенных в горизонтальной плоскости в окрестности оси следа. Вариации плотности жидкости на этой стадии обусловлены наличием локальных минимумов давления и квазигидростатическим балансом в центрах вихрей.

Основанный на прямом численном моделировании сопоставительный анализ турбулентных следов за самодвижущимся и буксируемым телами в линейно стратифицированной среде выполнен Брукером и Саркаром [49]. Влияние числа Прандтля на динамику турбулентного следа за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде оценивалось на основе DNS Стадлером и др. [50]. Показано, что результаты расчётов, соответствующие значению $Pr = 1$, могут служить разумной аппроксимацией параметров следа при $Pr = 7$. Последнее позволяет существенно экономить вычислительные ресурсы. Стадлер и Саркар [51] выполнили также прямое численное моделирование динамики турбулентных следов с малым и умеренным суммарным избыточным импульсом. Показано, в частности, что для рассмотренного интервала расстояний от тела качественное поведение турбулентных следов при этом аналогично поведению следов за самодвижущимися телами. Продемонстрирована неприменимость простейших гипотез турбулентной вязкости при вычислении касательных рейнольдсовых напряжений.

Подробный обзор современного состояния вопроса о моделировании турбулентных следов за телами, движущимися в однородной и стратифицированной жидкостях, осуществлен Меньюэром и Спеддингом [46], Стадлером и Саркаром [51]. Представленный в настоящей статье обзор не претендует на полноту; более подробный список публикаций приведён в вышеупомянутых работах.

Анализируя цитированную литературу, можно сделать вывод об отсутствии сопоставления двух существенно различающихся подходов к численному моделированию безимпульсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде: подхода на основе метода прямого численного моделирования и подхода с применением усовершенствованных полуэмпирических моделей турбулентности второго и третьего порядка. Рассмотрению этого вопроса посвящена настоящая работа.

1. Математическая модель, основанная на полуэмпирической модели турбулентности

Для описания течения в дальнем турбулентном следе за телом вращения в стратифицированной среде привлекается параболизованная система осреднённых уравнений Навье — Стокса в приближении Обербека — Буссинеска:

$$U_\infty \frac{\partial U_d}{\partial x} + V \frac{\partial U_d}{\partial y} + W \frac{\partial U_d}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle u'w' \rangle, \quad (1)$$

$$U_\infty \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'^2 \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle v'w' \rangle, \quad (2)$$

$$U_\infty \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'w' \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle w'^2 \rangle - g \frac{\langle \rho_1 \rangle}{\rho_0}, \quad (3)$$

$$U_\infty \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial y} + W \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial z} + W \frac{d\rho_s}{dz} = -\frac{\partial}{\partial y} \langle v' \rho' \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle w' \rho' \rangle, \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

При выводе уравнений (1)–(5) исходим из представления мгновенных компонент скорости в виде суммы осреднённых U_i и пульсационных u'_i составляющих: $u_i = U_i + u'_i$. Аналогично полагаем $p = \langle p \rangle + p'$, $\rho = \langle \rho \rangle + \rho'$ (здесь и всюду ниже штрихом обозначены пульсационные составляющие; угловые скобки $\langle \rangle$ — знак осреднения). Для удобства изложения дополнительно вводятся обозначения компонент скорости осреднённого и пульсационного движения в направлении осей $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ соответственно: $U = U_1$, $V = U_2$, $W = U_3$ и $u' = u'_1$, $v' = u'_2$, $w' = u'_3$ (координатная система связана с движущимся телом так, что скорость его движения равна $-U_\infty$, ось z направлена вертикально вверх, против силы тяжести). Величина $U_d = U_\infty - U$ — дефект осреднённой продольной компоненты скорости; p_1 — отклонение давления от гидростатического, обусловленного стратификацией ρ_s ; g — ускорение силы тяжести; $\langle \rho_1 \rangle$ — осреднённый дефект плотности, $\rho_1 = \rho - \rho_s$; $\rho_s = \rho_s(z)$ — плотность невозмущённой жидкости: $d\rho_s/dz \leq 0$ (устойчивая стратификация), $\rho_0 = \rho_s(0)$. Плотность жидкости считается линейной функцией температуры; стратификация предполагается линейной и слабой. Члены с молекулярной вязкостью и диффузией в уравнениях (1)–(4) и величина $\partial U/\partial x$ в уравнении (5) отброшены в предположении малости.

Система уравнений (1)–(5) незамкнута. Исходя из специфики течения в следе величины рейнольдсовых напряжений $\langle u'v' \rangle$ и $\langle u'w' \rangle$ представляются в виде алгебраических соотношений [30]

$$\begin{aligned} \langle u'v' \rangle &= \frac{1 - c_2}{c_1} \frac{e \langle v'^2 \rangle}{\varepsilon} \frac{\partial U_d}{\partial y} = K_y \frac{\partial U_d}{\partial y}, \\ \langle u'w' \rangle &= \frac{(1 - c_2)e \langle w'^2 \rangle - \frac{(1 - c_3)(1 - c_{2T})}{c_{1T}} \frac{g}{\rho_0} \frac{e^2}{\varepsilon} \langle w' \rho' \rangle}{c_1 \varepsilon \left(1 - \frac{(1 - c_3)g}{c_1 c_{1T}} \frac{e^2}{\rho_0 \varepsilon^2} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} \right)} \frac{\partial U_d}{\partial z} = K_z \frac{\partial U_d}{\partial z}. \end{aligned}$$

Компоненты тензора рейнольдсовых напряжений определяются путём решения дифференциальных уравнений переноса [52] ($i = j = 1, 2, 3$; $i = 2, j = 3$; здесь и ниже по повторяющимся индексам предполагается суммирование, δ_{ij} — символ Кронекера)

$$\begin{aligned} U_\infty \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial y} + W \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial z} &= D_{ij} + P_{ij} + G_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon - \\ &- c_1 \frac{\varepsilon}{e} \left(\langle u'_i u'_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} e \right) - c_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) - c_2 \left(G_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} G \right), \\ D_{ij} &= -\frac{\partial}{\partial x_l} \langle u'_l u'_i u'_j \rangle - \frac{1}{\rho_0} \left\{ \frac{\partial \langle u'_i p' \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u'_j p' \rangle}{\partial x_i} \right\} \approx -\frac{\partial}{\partial x_l} \langle u'_l u'_i u'_j \rangle, \\ P_{ij} &= -\left\{ \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\}, \quad 2P = P_{ii}, \\ G_{ij} &= \frac{1}{\rho_0} (\langle u'_i \rho' \rangle g_j + \langle u'_j \rho' \rangle g_i), \quad 2G = G_{ii}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

$$e = (\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle)/2, \quad \mathbf{g} = (0, 0, -g). \quad (6)$$

Для определения $\langle u'_i u'_j u'_k \rangle$ воспользуемся уравнением переноса (см., например, [53]; $l = 2, 3$)

$$\begin{aligned} U_\infty \frac{\partial \langle u'_i u'_j u'_k \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle u'_i u'_j u'_k \rangle}{\partial y} + W \frac{\partial \langle u'_i u'_j u'_k \rangle}{\partial z} = & -\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_l} - \langle u'_i u'_j u'_l \rangle \frac{\partial U_k}{\partial x_l} - \\ & - \langle u'_j u'_k u'_l \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_l} - \langle u'_i u'_k u'_l \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_l} - \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u'_k u'_l \rangle}{\partial x_l} - \langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial \langle u'_i u'_l \rangle}{\partial x_l} - \\ & - \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial \langle u'_j u'_l \rangle}{\partial x_l} + \frac{g_i}{\rho_0} \langle u'_j u'_k \rho' \rangle + \frac{g_j}{\rho_0} \langle u'_i u'_k \rho' \rangle + \frac{g_k}{\rho_0} \langle u'_i u'_j \rho' \rangle - c_3 \frac{\varepsilon}{e} \langle u'_i u'_j u'_k \rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

где C_{ijkl} — кумулянты (семиинварианты) четвертого порядка:

$$C_{ijkl} = \langle u'_i u'_j u'_k u'_l \rangle - \langle u'_i u'_j \rangle \langle u'_k u'_l \rangle - \langle u'_i u'_k \rangle \langle u'_j u'_l \rangle - \langle u'_i u'_l \rangle \langle u'_j u'_k \rangle.$$

При определении C_{ijkl} исходим из алгебраической модели [53]:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = & -\frac{e}{c_4 \varepsilon} \left\{ \langle u'_i u'_k u'_m \rangle \frac{\partial \langle u'_j u'_l \rangle}{\partial x_m} + \langle u'_j u'_l u'_m \rangle \frac{\partial \langle u'_i u'_k \rangle}{\partial x_m} + \right. \\ & \left. + \sum_{ijkl} \left[C_{ijkm} \frac{\partial U_l}{\partial x_m} + C_{ijk\theta} \frac{g_m}{\rho_0} \delta_{ml} + \langle u'_i u'_j u'_m \rangle \frac{\partial \langle u'_k u'_l \rangle}{\partial x_m} + \langle u'_i u'_m \rangle \frac{\partial \langle u'_j u'_k u'_l \rangle}{\partial x_m} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Воспользуемся также простейшим представлением $C_{ijk\theta}$, вытекающим из алгебраической модели [53]:

$$C_{ijk\theta} = \frac{e}{c_{4\theta} \varepsilon} C_{ijkl} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x_l}.$$

Тогда из (8) следуют упрощённые с учётом физических особенностей рассматриваемого течения — спутного струйного турбулентного течения в поле силы тяжести на больших расстояниях от тела — градиентные представления кумулянтов:

$$C_{ijkl} = -\frac{e}{c_4 \varepsilon} \frac{\alpha \langle u'_l u'_l \rangle}{\left(1 - \frac{\beta}{c_4 c_{4\theta}} \frac{g}{\rho_0} \frac{e^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} \right)} \frac{\partial \langle u'_i u'_j u'_k \rangle}{\partial x_l},$$

$$\alpha = 1 + \delta_{il} + \delta_{jl} + \delta_{kl}, \quad \beta = \delta_{3i} + \delta_{3j} + \delta_{3k} + \delta_{3l}.$$

Для определения $\langle u'_i u'_j \rho' \rangle$ используется усовершенствованное алгебраическое представление, полученное в [53] как следствие уравнения переноса этой величины

$$-\langle u'_i u'_j \rho' \rangle = \frac{\langle u'_i u'_j \rho' \rangle^0 - \frac{e}{c_{3\theta} \varepsilon} \left[\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} \langle u'_i u'_j u'_k \rangle \delta_{k3} + \Phi \frac{g}{\rho_0} \left(\langle u'_i \rho'^2 \rangle^0 + \langle u'_j \rho'^2 \rangle^0 \right) \right]}{1 - \left(\frac{\Phi + 1}{c_3 c_{3\theta}} + \frac{2\Phi}{c_{3\theta} c_{3\theta\theta}} \right) \frac{g}{\rho_0} \frac{e^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}}$$

с применением общепринятых аппроксимаций [54]

$$-\langle u'_i u'_j \rho' \rangle^0 \approx c_{s\varphi} \frac{e}{\varepsilon} \left(\langle u'_j u'_j \rangle \frac{\partial \langle u'_i \rho' \rangle}{\partial x_j} + \langle u'_i u'_i \rangle \frac{\partial \langle u'_j \rho' \rangle}{\partial x_i} \right),$$

$$-\langle u'_i \rho'^2 \rangle^0 = c_\varphi \frac{e}{\varepsilon} \langle u'_i u'_i \rangle \frac{\partial \langle \rho'^2 \rangle}{\partial x_i} \approx c_\varphi \frac{e}{\varepsilon} \langle u'_i u'_i \rangle \frac{\partial \langle \rho'^2 \rangle}{\partial x_i}, \quad \Phi = \delta_{i3} + \delta_{j3}.$$

Скорость диссипации ε вычисляется путём решения дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} U_\infty \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + W \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \\ = \frac{\partial}{\partial y} \frac{c_s e}{\sigma \varepsilon} \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{c_s e}{\sigma \varepsilon} \langle w'^2 \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} (P + G) - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}. \end{aligned} \quad (9)$$

Турбулентные потоки $\langle u'_i \rho' \rangle$ и дисперсия флуктуаций плотности $\langle \rho'^2 \rangle$ определяются исходя из локально-равновесных представлений [30, 54, 55]:

$$\begin{aligned} \langle \rho'^2 \rangle &= -\frac{2}{c_T} \frac{e}{\varepsilon} \langle w' \rho' \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}, \\ -\langle u' \rho' \rangle &= \frac{1}{c_{1T}} \frac{e}{\varepsilon} \left[\langle u' w' \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} + (1 - c_{2T}) \langle w' \rho' \rangle \frac{\partial U}{\partial z} \right], \\ -\langle v' \rho' \rangle &= \frac{1}{c_{1T}} \frac{e}{\varepsilon} \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y} = K_{\rho y} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y}, \\ -\langle w' \rho' \rangle &= \frac{e \langle w'^2 \rangle}{c_{1T} \varepsilon \left(1 - 2 \frac{1 - c_{2T}}{c_{1T} c_T} \frac{g}{\rho_0} \frac{e^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} \right)} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} = K_{\rho z} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}. \end{aligned}$$

Значения эмпирических постоянных в данной модели являются в достаточной мере общепринятыми [52, 53]: $c_s = 0.25$, $c_1 = 2.2$, $c_2 = 0.55$, $c_\varepsilon = c_s/\sigma$, $\sigma = 1.3$, $c_{\varepsilon 1} = 1.44$, $c_{\varepsilon 2} = 1.92$; $c_\varphi = 0.11$, $c_{s\varphi} = 0.13$, $c_{3\theta} = 1/c_{s\varphi}$, $c_{3\theta\theta} = 1/c_\varphi$, $c_{4\theta} = 2c_{3\theta} - 1$, $c_T = 1.25$, $c_{1T} = 3.2$, $c_{2T} = 0.5$, $c_4 = 2c_3 - 1$. Фигурирующие в усовершенствованных алгебраических аппроксимациях и уравнениях переноса моментов третьего порядка эмпирические постоянные c_3 (значения c_3 могут изменяться в диапазоне от $1/c_s$ до $3/c_s$ [39, 53]), $c_{3\theta}$ и $c_{3\theta\theta}$ определяются из тех соображений, что локально-равновесное усечение уравнений переноса соответствующих моментов третьего порядка должно привести к алгебраическому представлению, согласованному с общепринятыми гипотезами [39].

Маршевая переменная x в уравнениях (1)–(4), (6), (7), (9) играет роль времени: $t = x/U_\infty$. На расстоянии $x_0 = 8D$ от тела задаются начальные условия, согласующиеся с экспериментальными данными Линя и Пао об эволюции безымпурсного турбулентного следа в однородной жидкости [7, 8].

При численном решении задачи проводится обезразмеривание переменных с использованием в качестве масштабов длины и скорости соответственно диаметра тела D и скорости набегающего потока U_∞ . Тогда характерные параметры течения в безымпурсном следе в стратифицированной среде — плотностное число Фруда F_D и период Вайсяля — Брента T — определяются следующим образом:

$$F_D = \frac{U_\infty T}{D}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{ag}}, \quad a = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_s}{dz}.$$

Конечно-разностный алгоритм расчёта основан на применении метода расщепления по пространственным переменным; его подробное изложение дано в [30].

2. Математическая модель, основанная на методе прямого численного моделирования

Рассматривается участок следа протяженностью L_x по горизонтальной оси x (оси движения тела), достаточно большой (по сравнению, например, с размером энергонесущих вихрей), чтобы с помощью пространственного осреднения по x получить статистически достоверные характеристики течения. С другой стороны, L_x предполагается достаточно малой, чтобы можно было пренебречь зависимостью средних характеристик от x на данном участке следа и рассматривать течение как периодическое по x . Таким образом, поле течения в численном моделировании в данный момент времени t соответствует участку следа протяженностью L_x , находящемуся на расстоянии $x = U_\infty t$.

Уравнения Навье—Стокса в приближении Буссинеска и условие несжимаемости жидкости записываются в безразмерных переменных в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{4\pi^2}{F_D^2} \delta_{iz} \rho_1, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (11)$$

Уравнение переноса плотности жидкости имеет вид

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho_1}{\partial x_j} - u_z = \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (12)$$

В уравнениях (10) — (12), как и ранее, u_i , p_1 , ρ_1 — мгновенные значения компонент поля скорости, дефектов давления и плотности; все переменные безразмерены нормировкой на характерные значения скорости U_∞ и диаметра D . Числа Рейнольдса Re и Прандтля Pr определяются следующим образом:

$$\text{Re} = \frac{U_\infty D}{\nu}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (13)$$

где ν — кинематическая вязкость жидкости, κ — коэффициент диффузии вещества, создавшего градиент плотности.

Число Рейнольдса полагается равным $\text{Re} = 20\,000$. Это значение того же порядка, что и характерное число Рейнольдса среднего течения $O(10^4)$, соответствующее дальнему следу в лабораторных экспериментах Линя и Пао [7, 8]. Рассматриваются три значения числа Фруда $F_D = 31, 65$ и 120 . Число Прандтля Pr полагается равным единице. Данные численного моделирования дальнего следа [50] показывают, что при задании $\text{Pr} = 7$ (требующего значительно больших ресурсов памяти и быстродействия ЭВМ), соответствующего температурной стратификации воды, получаются практически такие же результаты для средних и мгновенных полей скорости и завихренности в следе, что и при $\text{Pr} = 1$, и делается вывод, что выбор $\text{Pr} = 1$ является адекватным для моделирования течения в дальнем следе.

Для того чтобы производить вычисления в области, ограниченной по вертикальной координате, и обеспечить необходимое разрешение поля течения, используется отображение по z в виде [48, 56]

$$\xi = \tanh \frac{z}{9}. \quad (14)$$

Из (14) находим

$$z = 4.5 \ln \left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right), \quad (15)$$

так что $-1 \leq \xi \leq 1$ при $-\infty < z < \infty$. Производные по z в уравнениях (10)–(12) записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{1 - \xi^2}{9} \right) \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (16)$$

Уравнения (10)–(12) дискретизируются в прямоугольной области с размерами $0 \leq x' \leq 48$, $-9 \leq y \leq 9$ и $-1 \leq \xi \leq 1$ с помощью метода конечных разностей второго порядка точности на однородной разнесенной (“шахматной”) сетке, состоящей из $640 \times 240 \times 240$ узлов в x -, y - и $\zeta(z)$ -направлениях соответственно [48, 56–58]. Интегрирование осуществляется с использованием метода Адамса — Башфорта второго порядка точности с шагом по времени $\Delta t = 0.0075$. По оси x рассматривается периодическое граничное условие. В поперечном (y) и вертикальном (z) направлениях (при $y = \pm 9$ и $\xi = \pm 1$) ставятся условия Неймана. Используется метод расщепления [57, 58], и уравнение Пуассона для дефекта давления решается с помощью ФФТ преобразования Фурье по координате x , косинус-преобразования по координате y и метода Гаусса по координате z [56, 57].

Результаты численного моделирования [42, 47] показывают, что внутренние волны, излучаемые струей, распространяются от оси струи к границам области счёта в поперечном и вертикальном направлениях. Чтобы обеспечить поглощение внутренних волн на границах области счёта, используется метод, применённый в [49]. При этом в правые части уравнений (10) и (12) для компонент скорости u_i ($i = 1, 2, 3$) и плотности ρ добавляются слагаемые $[-F(y, z)u_i]$ и $[-F(y, z)\rho]$, где функция $F(y, z)$ обращается в ноль при $|y| < 8$, $|z| < 8$ и равна единице в остальной области счёта. Таким образом, достигается затухание внутренних волн, распространяющихся к границам, и влиянием отражённых волн можно пренебречь [49].

Основная задача при задании начального распределения скорости состоит в том, чтобы обеспечить хорошее качественное и количественное согласие с данными лабораторных экспериментов [7, 8]. В настоящей работе эта задача решается следующим образом. Рассматривается струйное течение в жидкости с исходным распределением скорости в виде

$$u_i(x, y, z, t_0) = (1 - A(y^2 + z^2)) \exp(-A[y^2 + z^2]) \left(U_\infty^m \delta_{ix} + U_0^f U_i^f(x, y, z) \right), \quad (17)$$

где y и z — поперечная и вертикальная координата соответственно, U_∞^m и A — параметры, определяющие исходную амплитуду осевой скорости и ширину следа, U_0^f — амплитуда флуктуаций. Исходное поле возмущения скорости U_i^f ($i = 1, 2, 3$) задается в виде суммы независимых фурье-гармоник со случайными фазами и изотропным амплитудным спектром в виде

$$E(k) = E_0 \frac{k}{k_p} \exp\left(-\frac{k}{k_p}\right), \quad (18)$$

где параметр k_p определяет положение максимума энергии, E_0 — нормировочный множитель такой, что максимальное значение поля U_i^f равно единице. Таким образом, исходное распределение поля скорости определяется видом функции (18) и четырьмя параметрами: A , k_p , U_∞^m и U_∞^f . Эти параметры определяются подбором так, чтобы по

истечении переходных процессов к некоторому моменту времени t_0 осреднённые характеристики следа (осевые значения скорости и флуктуаций) и ширина и высота следа хорошо согласовывались с экспериментальными данными на расстоянии от тела $x/D = 6$ [7, 8]. Оказалось, что для всех рассмотренных значений числа Фруда можно задавать одни и те же параметры: $A = 20$, $U_\infty^m = 0.4$, $k_p = 1$ и $U_\infty^f = 0.008$, при которых хорошее согласие с экспериментом достигается на расстоянии от тела $x/D = 6.5$. Для определения статистических характеристик течения в численном моделировании в данный момент времени t , соответствующий расстоянию до тела

$$x/D = U_\infty t/D = (t/T)F_D, \quad (19)$$

вычисляются средние поля скорости и плотности с помощью осреднения по горизонтальной координате в виде

$$U_i(y, z, t) = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} u_i(x', y, z, t) dx', \quad \langle \rho_1(y, z, t) \rangle = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} \rho_1(x', y, z, t) dx',$$

где $i = 1, 2, 3$, $L_x = 48$. Вычисляются также поля интенсивностей турбулентных флуктуаций скорости и плотности в виде

$$u'_i(y, z, t) = \langle u_i^2 - U_i^2 \rangle^{1/2}, \quad \rho'(y, z, t) = \langle \rho_1^2 - \langle \rho_1 \rangle^2 \rangle^{1/2}.$$

По профилям горизонтальной компоненты средней скорости и флуктуаций в данный момент времени t определяются средняя скорость и амплитуды флуктуаций на оси следа.

3. Результаты сопоставления моделей

Динамика безымпурсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде иллюстрируется рисунками 1–4, где сопоставляются данные лабораторных экспериментов Линя и Пао [7, 8] и результаты численных расчётов на основе представленных выше моделей. На рис. 1 приведено изменение в зависимости от расстояния от тела безразмерных осевых значений энергии турбулентности $e_0(x) = e(x, 0, 0)/U_\infty^2$ и дефекта продольной компоненты осреднённой скорости $U_{d0}(x) = U_d(x, 0, 0)/U_\infty$ соответственно. Здесь маркерами помечены данные лабораторных измерений Линя и Пао (см. [8]), линиями — результаты численных расчётов. Согласие с данными лабораторных измерений при использовании двух различных подходов к моделированию турбулентности — полуэмпирической модели третьего порядка и DNS — достаточно хорошее.

На рис. 2 представлено изменение во времени осевых значений интенсивностей турбулентных флуктуаций продольной и вертикальной компонент скорости

$$u_0 = \left(F_D^{3/2} \langle u'^2(t, 0, 0) \rangle / U_\infty^2 \right)^{1/2}, \quad w_0 = \left(F_D^{3/2} \langle w'^2(t, 0, 0) \rangle / U_\infty^2 \right)^{1/2}, \quad t_0 = 2/F_D.$$

Результаты расчётов по представленной математической модели третьего порядка (кривые 1) достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными [7]. На рис. 2, 3 приведены также расчёты по математической модели [30] (линии 2), основанной на полуэмпирической модели второго порядка с представлениями тройных корреляций,

заменяющими уравнение (7) (остальные аппроксимации совпадают с приведёнными в разделе 1):

$$\langle u'_i u'_j u'_k \rangle = -c_s \frac{e}{\varepsilon} \langle u'_k u'_k \rangle \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k}.$$

Видно, что лучшее соответствие при больших t/T даёт изложенная выше полуэмпирическая модель третьего порядка. Результаты расчётов, основанные на DNS (линии 3–5, соответствующие $F_D = 120, 65, 31$), удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными Линя и Пао.

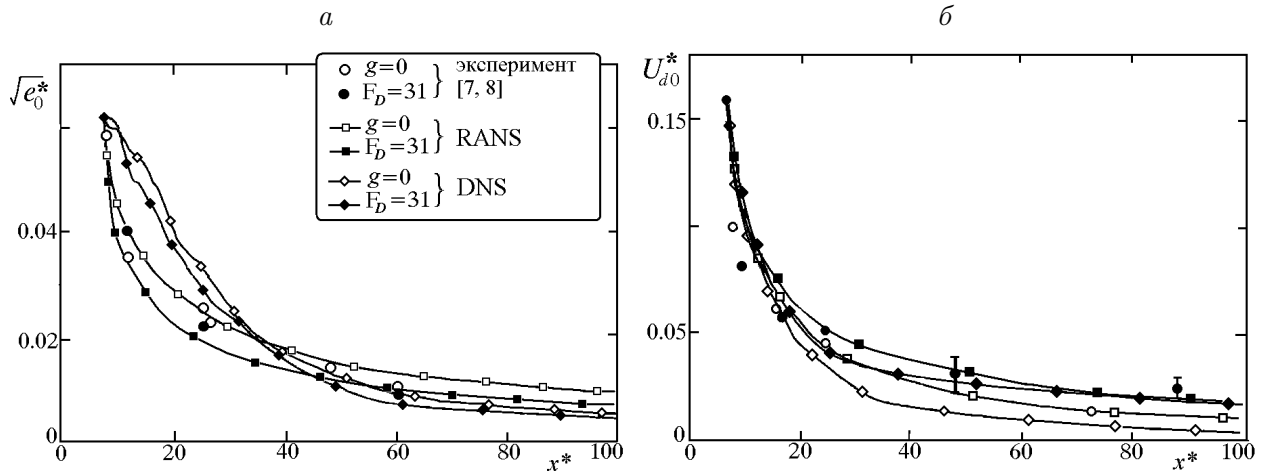


Рис. 1. Энергия турбулентности $e_0^*(x) = e(x, 0, 0)/U_\infty^2$ (а) и дефект продольной составляющей осреднённой скорости $U_{d0}^*(x) = U_d(x, 0, 0)/U_\infty$ (б) на оси безимпульсного турбулентного следа за удлинённым телом вращения в однородной ($g = 0$) и линейно стратифицированной ($F_D = 31$) среде

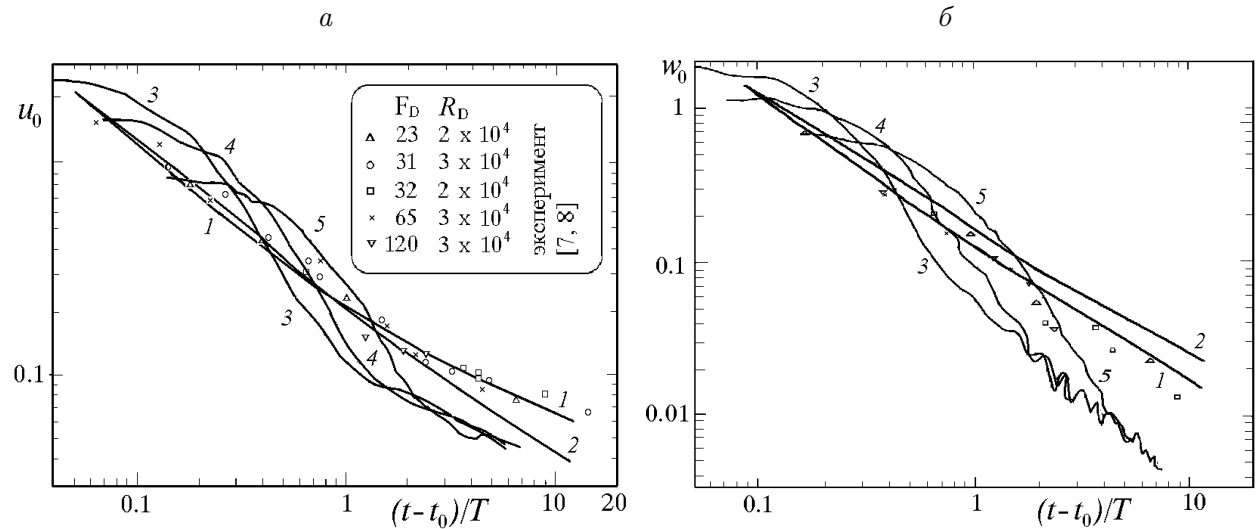


Рис. 2. Изменение интенсивностей флуктуаций горизонтальной $u_0 = (F_D^{3/2} \langle u'^2(t, 0, 0) \rangle / U_\infty^2)^{1/2}$ (а) и вертикальной $w_0 = (F_D^{3/2} \langle w'^2(t, 0, 0) \rangle / U_\infty^2)^{1/2}$ (б) компоненты скорости на оси безимпульсного следа в линейно стратифицированной среде: 1 — модель третьего порядка, 2 — модель второго порядка [30], 3–5 — DNS ($F_D = 120, 65, 31$ соответственно)

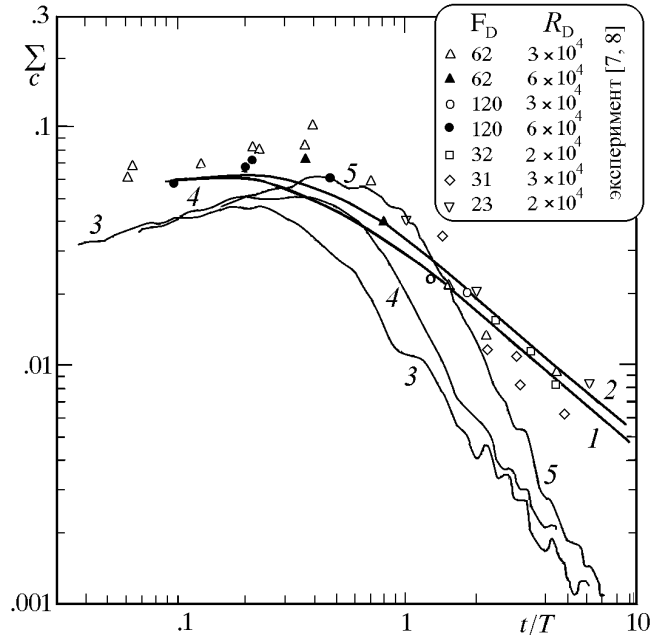


Рис. 3. Изменение интенсивности турбулентных флуктуаций плотности $\sum_c = \langle \rho'^2(t, 0, 0) \rangle^{1/2} / (aD\rho_0 F_D^{1/4})$ на оси безымпульсного следа в линейно стратифицированной среде: 1 — модель третьего порядка, 2 — модель второго порядка [30], 3–5 — DNS ($F_D = 120, 65, 31$ соответственно)

На рис. 3 полученные в численных расчётах величины интенсивностей турбулентных флуктуаций плотности сопоставляются с экспериментальными данными [7]

$$\sum_c = \left(\langle \rho'^2(t, 0, 0) \rangle \right)^{1/2} / aD\rho_0 F_D^{1/4}.$$

Согласие с лабораторными измерениями для полуэмпирических моделей достаточно хорошее. Удовлетворительное соответствие получено с применением DNS.

Расчёты на основе полуэмпирических моделей проводились только для одного значения числа Фруда $F_D = 120$ в связи с подбором характеристик турбулентности и внутренних волн в безымпульсном турбулентном следе в линейно стратифицированной жидкости при достаточно больших значениях плотностного числа Фруда [28, 30]. Основные расчёты с применением модели третьего порядка выполнялись в области размером $10D \times 8D$ на неравномерной сетке:

$$y_i = ih_y, \quad i = 0, \dots, 30, \quad y_i = y_{i-1}q_1, \quad i = 31, \dots, 50,$$

$$z_j = jh_z, \quad j = 0, \dots, 20, \quad z_j = z_{j-1}q_2, \quad j = 21, \dots, 40, \quad (h_y = h_z = h = 0.1D).$$

Величина шага сетки по переменной x увеличивалась от $0.015D$ до $0.75D$ в арифметической прогрессии с разностью $0.015D$, начиная с $x = x_0$, и далее полагалась постоянной. Оптимальные значения параметров сетки определялись в ходе серии численных экспериментов. При измельчении шага h в два раза и неизменных размерах сеточной области отклонение сеточных решений не превышало 5–7% в равномерной норме. При увеличении линейных размеров области в полтора раза разница в полученных решениях

составляла не более 1 % в норме, являющейся сеточным аналогом нормы пространства непрерывных функций. Более подробно результаты тестовых и методических расчётов для модели третьего порядка представлены в [39], для модели второго порядка — в [30]. Что же касается точности расчётов на основе DNS, то этот вопрос детально обсуждается в [47, 48, 56]. Отметим лишь, что закругление параметров сетки в полтора раза приводит к отклонениям около 10 %.

Таким образом, в работе выполнено сопоставление численных моделей турбулентного следа за самодвижущимся телом в однородной и линейно стратифицированной среде, основанных на применении двух полуэмпирических моделей турбулентности и DNS. Результаты расчётов достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными Линя и Пао [7, 8]. Лучшего согласия с экспериментальными данными [7] удастся добиться с применением усовершенствованной полуэмпирической модели турбулентности третьего порядка.

Список литературы

- [1] ОЗМИДОВ Р.В., НАБАТОВ В.Н. Гидрофизическая модель турбулентного следа за подводной горой // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1992. Т. 28, № 9. С. 981–987.
- [2] WANG ZH., GOODMAN L. Evolution of the spatial structure of a thin phytoplankton layer into a turbulent field // Mar. Prog. Ser. 2009. Vol. 374. P. 57–74.
- [3] LAVERY T.J., ROUDNEW B., SEURONT L. ET AL. Can whales mix the ocean? // Biogeosciences Discuss. 2012. Vol. 9, iss. 7. P. 8387–8403.
- [4] SCHOOLEY A.H. , STEWART R.W. Experiments with a self-propelled body submerged in a fluid with vertical density gradient // J. Fluid Mech. 1963. Vol. 15. P. 83–96.
- [5] WITTE A.B. Holographic interferometry of a submarine wake in stratified flow // J. Hydronautics. 1972. Vol. 6. P. 114–115.
- [6] MERRIT C.E. Wake growth in stratified flow // AIAA J. 1974. Vol. 12. P. 940–949.
- [7] LIN J.T., PAO Y.H. Wakes in stratified fluids // Annu. Rev. Fluid Mech. 1979. Vol. 11. P. 317–338.
- [8] HASSID S. Collapse of turbulent wakes in stable stratified media // J. Hydronautics. 1980. Vol. 14. P. 25–32.
- [9] GILREATH H.E., BRANDT A. Experiments on the generation of internal waves in a stratified fluid // AIAA Pap. 1983. Vol. 1704. 12 p.
- [10] СЫСОВЕВА Е.Я., ЧАШЕЧКИН Ю.Д. Вихревая структура следа за сферой в стратифицированной жидкости // ПМТФ. 1986. Т. 27, № 2. С. 40–46.
- [11] HOPFINGER E.J., FLOR J.B., CHOMAZ J.M., BONNETON P. Internal waves generated by a moving sphere and its wake in stratified fluid // Experiments in Fluids. 1991. Vol. 11. P. 255–261.
- [12] LIN Q., BOYER D.L., FERNANDO J.S. Turbulent wakes of linearly stratified flow past a sphere // Phys. Fluids. A. 1992. Vol. 4. P. 1687–1696.
- [13] CHOMAZ J.M., BONNETON P., BUTET A., HOPFINGER E.J. Vertical diffusion of the far wake of a sphere moving in a stratified fluid // Ibid. 1993. Vol. 5. P. 2799–2806.

- [14] BONNETON P., CHOMAZ J.M., HOPFINGER E.J. Internal waves produced by the turbulent wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid // *J. Fluid Mech.* 1993. Vol. 254. P. 23–40.
- [15] SHISHKINA O.D. The wake regime influence on hydrodynamic characteristics of the submerged sphere in the stratified fluid // *Preprints of the Fourth Int. Symp. on Stratified Flows / Eds. E. Hopfinger, B. Voisin and G. Chavand. Grenoble Inst. of Mech., Grenoble, 1994. Vol. 3. Sess. A5, No. 40.*
- [16] CHASHECHKIN YU.D. Internal waves, vortices and turbulence in a wake past a bluff body in a continuously stratified liquid // *Ibid.* 1994. Vol. 2. Sess. B4, No. 29.
- [17] SPEDDING G.R., BROWAND F.K., FINCHAM A.M. The structure and long-time evolution of bluff body wakes in a stable stratification // *Ibid.* 1994. Vol. 2. Sess. B4, No. 196.
- [18] VOISIN B. Rayonnement des ondes internes de gravite. Application aux corps en mouvement. Ph. D. Thesis. Univ. Pierre et Marie Curie. Paris, 1991.
- [19] ОНУФРИЕВ А.Т. Турбулентный след в стратифицированной среде // *ПМТФ.* 1970. Т. 11, № 5. С. 68–72.
- [20] LEWELLEN W.S., TESKE M.E., DONALDSON C.D. Examples of variable density flows computed by second-order closure description of turbulence // *AIAA J.* 1976. Vol. 14. P. 382–387.
- [21] SCHETZ J.A. Injection and Mixing in Turbulent Flow. New York: Amer. Inst. of Aeronaut. and Astronaut., 1980.
- [22] ДАНИЛЕНКО А.Ю., КОСТИН В.И., ТОЛСТЫХ А.И. О неявном алгоритме расчёта течений однородной и неоднородной жидкости. Препр. ВЦ АН СССР. М., 1985. 40 с.
- [23] CHERNYKH G. G., FEDOROVA N. N., MOSHKIN N.P. Numerical simulation of turbulent wakes // *Russian J. Theor. and Appl. Mech.* 1992. Vol. 2. P. 295–304.
- [24] ГЛУШКО Г.С., ГУМИЛЕВСКИЙ А.Г., ПОЛЕЖАЕВ В.И. Эволюция турбулентных следов за шарообразными телами в устойчиво стратифицированных средах // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1994. № 1. С. 13–22.
- [25] SCHOOLEY A.H. Wake collapse in a stratified fluid // *Science.* 1967. Vol. 157. P. 421–423.
- [26] ТРОХАН А.М., ЧАШЕЧКИН Ю.Д. Генерация внутренних волн в стратифицированной жидкости гидродинамически линейным источником (двумерная задача) // *Теория дифракции и распространения волн: Краткие тексты докл. VII Всесоюзн. симп. по дифракции и распространению волн. Ростов-на-Дону, 1977. Т. 3. С. 186–189.*
- [27] ВАСИЛЬЕВ О.Ф., КУЗНЕЦОВ Б.Г., ЛЫТКИН Ю.М., ЧЕРНЫХ Г.Г. Развитие области турбулизованной жидкости в стратифицированной среде // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1974. № 3. С. 45–52.
- [28] ЛЫТКИН Ю.М., ЧЕРНЫХ Г.Г. Подобие течения по плотностному числу Фруда и баланс энергии при эволюции зоны турбулентного смешения в стратифицированной среде // *Математические проблемы механики сплошных сред: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1980. Вып. 47. С. 70–89.*
- [29] ВОРОПАЕВА О.Ф., ЧАШЕЧКИН Ю.Д., ЧЕРНЫХ Г.Г. Диффузия пассивной примеси от локализованного источника в зоне турбулентного смешения // *Изв. РАН. МЖГ.* 1997. № 2. С. 69–77.
- [30] CHERNYKH G.G., VOROPAYEVA O.F. Numerical modelling of momentumless turbulent wake dynamics in a linearly stratified medium // *Comput. and Fluids.* 1999. Vol. 28, No. 3. P. 281–306.

- [31] ВОРОПАЕВА О.Ф., МОШКИН Н.П., ЧЕРНЫХ Г.Г. Внутренние волны, генерируемые турбулентными следами за буксируемым и самодвижущимся телами в линейно стратифицированной среде // Матем. моделирование. 2000. Т. 12, № 10. С. 77–94.
- [32] ВОРОПАЕВА О.Ф., МОШКИН Н.П., ЧЕРНЫХ Г.Г. Внутренние волны, генерируемые турбулентными следами в устойчиво стратифицированной среде // Докл. АН. 2003. Т. 392, № 2. С. 190–194.
- [33] MOSHKIN N.P., FOMINA A.V., CHERNYKH G.G. Numerical modeling of dynamics of turbulent wake behind towed body in the linearly stratified medium // Matem. Model. 2007. Vol. 19, No. 1. P. 29–56.
- [34] CHERNYKH G.G., FOMINA A.V., MOSHKIN N.P. Numerical models of turbulent wake dynamics behind towed body in linearly stratified fluid // J. Eng. Thermophysics. 2009. Vol. 18, No. 4. P. 279–305.
- [35] MOSHKIN N.P., CHERNYKH G.G., FOMINA A.V. On the influence of small total momentum imbalance on turbulent wake dynamics in the linearly stratified fluids // Matem. Model. 2005. Vol. 17, No. 1. P. 19–33.
- [36] CHERNYKH G.G., MOSHKIN N.P., FOMINA A.V. Dynamics of turbulent wake with small excess momentum in stratified media // Communicat. in Nonlinear Sci. and Numerical Simulat. 2009. Vol. 14, No. 4. P. 1307–1323.
- [37] ВОРОПАЕВА О.Ф., ИЛЮШИН Б.Б., ЧЕРНЫХ Г.Г. Численное моделирование дальнего безымпурсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде // Докл. АН. 2002. Т. 386, № 6. С. 756–760.
- [38] CHERNYKH G.G., VOROPAIEVA O.F. Numerical models of the second and third orders for a momentumless turbulent wake dynamics in a linearly stratified medium // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2008. Vol. 23, No. 6. P. 539–549.
- [39] ВОРОПАЕВА О.Ф. Численная модель анизотропного вырождения турбулентности в дальнем безымпурсном следе в стратифицированной среде // Матем. моделирование. 2008. Т. 20, № 10. С. 23–38.
- [40] ВАСИЛЬЕВ О.Ф., ВОРОПАЕВА О.Ф., ЧЕРНЫХ Г.Г. Численное моделирование анизотропного вырождения турбулентности в дальнем следе за самодвижущимся телом в линейно стратифицированной среде // Докл. АН. 2009. Т. 426, № 5. С. 621–625.
- [41] SPEDDING G.R. Anisotropy in turbulence profiles of stratified wakes // Phys. Fluids. 2001. Vol. 13, No. 8. P. 2361–2372.
- [42] GOURLAY M.J., ARENDT S.C., FRITTS D.C., WERNE J. Numerical modelling of initially turbulent wakes with net momentum // Ibid. 2001. Vol. 13, No. 12. P. 3782–3802.
- [43] SPEDDING G.R. Vertical structure in stratified wakes with high initial Froude number // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 454. P. 71–112.
- [44] DOMERMUTH D.G., ROTTMAN J.W., INNIS G.E., NOVIKOV E.A. Numerical simulation of the wake of a towed sphere in a weakly stratified fluid // Ibid. 2002. Vol. 473. P. 83–101.
- [45] БАЛАНДИНА Г.Н., ПАПКО В.В., СЕРГЕЕВ Д.А., ТРОИЦКАЯ Ю.И. Эволюция дальнего турбулентного следа за объектом, буксируемым в стратифицированной жидкости при больших числах Рейнольдса и Фруда // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2004. Т. 40, № 1. С. 112–127.
- [46] MEUNIER P., SPEDDING G.R. Stratified propelled wakes // J. Fluid Mech. 2006. Vol. 552. P. 229–256.

- [47] ДРУЖИНИН О.А., ПАПКО В.В., СЕРГЕЕВ Д.А., ТРОИЦКАЯ Ю.И. Лабораторное, численное и теоретическое моделирование течения в дальнем следе в стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2006. Т. 42, № 5. С. 1–13.
- [48] ДРУЖИНИН О.А. Излучение внутренних волн турбулентной струей в стратифицированной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 2. С. 46–59.
- [49] BRUCKER K.A., SARKAR S. A comparative study of self-propelled and towed wakes in a stratified fluid // J. Fluid Mech. 2010. Vol. 652. P. 373–404.
- [50] DE STADLER M.B., SARKAR S., BRUCKER K.A. Effect of the Prandtl number on a stratified turbulent wake // Phys. of Fluids. 2010. Vol. 22. P. 095102-1–095102-15.
- [51] DE STADLER M.B., SARKAR S. Simulation of a propelled wake with moderate excess momentum in a stratified fluid // J. Fluid Mech. 2012. Vol. 692. P. 28–52.
- [52] GIBSON M.M., LAUNDER B.E. Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer // Ibid. 1978. Vol. 86. P. 491–511.
- [53] ILYUSHIN B.B. Higher-moment diffusion in stable stratification // Closure Strategies for Turbulent and Transitions Flows / Eds. B.E. Launder, N.D. Sandham. Cambridge: Univ. Press, 2002. P. 424–448.
- [54] РОДИ В. Модели турбулентности окружающей среды // Методы расчёта турбулентных течений. М.: Мир, 1984. С. 227–322.
- [55] RODI W. Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids // J. Geophys. Res. 1987. Vol. 92, No. C5. P. 5305–5328.
- [56] ДРУЖИНИН О.А. Коллапс и автомодельность турбулентной струи в пикноклине // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2003. Т. 39, № 5. С. 697–711.
- [57] БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984.
- [58] ФЛЕТЧЕР Г.К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1. М.: Мир, 1991.

*Поступила в редакцию 15 января 2013 г.
с доработки — 20 мая 2013 г.*