

Численный расчёт свободного движения малого объёма вязкой несжимаемой жидкости между вращающимися цилиндрами

А. В. Паничкин¹, Л. Г. Варепо²

¹Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия

²Московский государственный университет печати, Россия

e-mail: panich@ofim.oscsbras.ru, larisavarepo@yandex.ru

Проведено моделирование течения, и исследована начальная картина протекания малого объёма вязкой несжимаемой жидкости, имеющей свободные границы, между вращающимися цилиндрами при числах Рейнольдса от 1 до 100 на двумерной сетке с помощью конечно-разностных методов с равномерным шагом. Получены численные решения движения свободных границ жидкости, характерные для различных значений вязкости, путём расчётов перемещения граничных узлов по узловым линиям фиксированной сетки.

Ключевые слова: моделирование, несжимаемая вязкая жидкость, число Рейнольдса, конечно-разностная сетка, уравнения Навье — Стокса.

1. Постановка задачи

Рассматривается моделирование процесса переноса жидкости на основе решения уравнений Навье — Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Поскольку анализируется движение жидкости с начальным нанесённым её слоем на верхний цилиндр, целесообразно рассмотреть область решения в сопутствующей системе координат OXY , связанной с верхним цилиндром с центром в точке O , расположенной на поверхности цилиндра в середине нанесённого участка жидкости (рис. 1).

Ограничимся постановкой плоской задачи в полярной системе координат r, θ , связанной с центром O_1 цилиндра 1 и вращающейся с постоянной угловой скоростью ω в положительном направлении ($\varphi = \theta + \omega t$). При этом отсчёт углов производится от отрицательного направления оси OY . Уравнения Навье — Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в неподвижной полярной системе координат r, φ для вектора скорости (V_r, V_φ) имеют вид ([1], с. 363)

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varphi R}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi R} - \frac{(V_\varphi)^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2R}{r^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi R} \right),$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi R}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi R} + \frac{V_r V_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi R} + \nu \left(\nabla^2 V_\varphi - \frac{V_\varphi}{r^2} + \frac{2R}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi R} \right),$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{R}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi R} = 0,$$

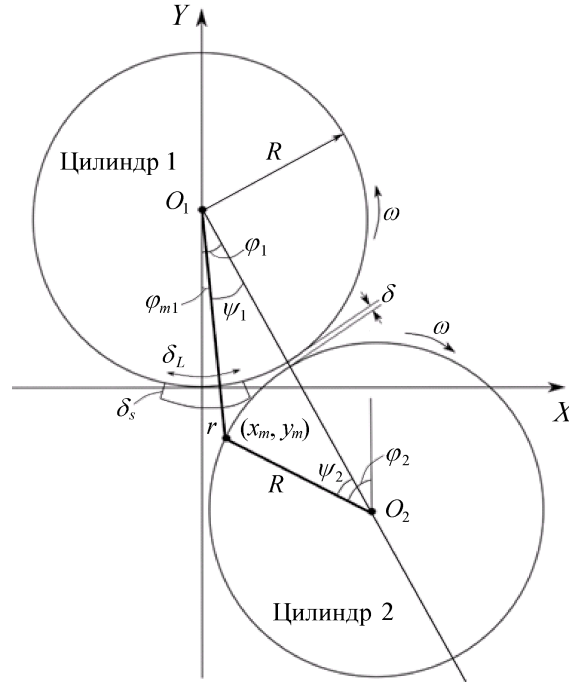


Рис. 1. Схема течения вязкой несжимаемой жидкости между вращающимися цилиндрами

где

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial^2 V}{(\partial \varphi R)^2},$$

ν — кинематическая вязкость, ρ — плотность жидкости, P — давление, R — радиус цилиндра 1.

При переходе к сопутствующей полярной системе координат r, θ будем использовать уравнения для относительных компонент скоростей V_r, V_θ . Перевод компонент вектора ускорения жидкости в эту систему координат с угловым ускорением ε и угловой скоростью ω без изменения начала координат выражается уравнением

$$\left(\frac{\partial V_r}{\partial t}, \frac{\partial V_\theta}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial U_r}{\partial t}, \frac{\partial U_\theta}{\partial t} \right) + (0, \varepsilon r) + (-2\omega U_\theta, 2\omega U_r) + (-\omega^2 r, 0),$$

где предпоследнее слагаемое в правой части представляет кориолисово, а последнее — центробежное ускорение. После перехода к новым компонентам скорости с преобразованием ускорений и при учёте углового ускорения ε рассматриваемые уравнения Навье — Стокса примут следующий вид:

$$\frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta R}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta R} - \frac{(U_\theta + \omega r)^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 U_r - \frac{U_r}{r^2} - \frac{2R}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta R} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_\theta}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta R}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta R} + \frac{U_r U_\theta}{r} + 2U_r \omega + \varepsilon r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta R} + \nu \left(\nabla^2 U_\theta - \frac{U_\theta}{r^2} + \frac{2R}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta R} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{R}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta R} = 0, \quad (3)$$

где

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial^2 U}{(\partial \theta R)^2}.$$

Цилиндры 1, 2 имеют радиус R и вращаются в противоположные стороны с угловой скоростью ω без ускорения ($\varepsilon = 0$), при этом наименьшее расстояние между поверхностями цилиндров равно δ . Рассмотрим прикасающуюся к цилиндру 1 область жидкости Ω толщиной по радиусу δ_S , ограниченную частью окружности длиной δ_L ($\delta < \delta_S$). В начальный момент времени скорость жидкости в сопутствующей системе координат r, θ равна нулю, на свободных поверхностях, где жидкость не соприкасается с границами цилиндров, $P = P_{\text{атм}}$ ($P_{\text{атм}} = 10^5 \text{ Н/м}^2$). Для перехода к безразмерным переменным введём характерные длину $L = \delta_S$ и скорость $V_0 = \omega R$, число Рейнольдса $\text{Re} = V_0 L / \nu$, число Эйлера $\text{Eu} = P_{\text{атм}} / \rho V_0^2 = P_0$. Эти величины будут использованы в качестве параметров в тестовых расчётах для сравнительных характеристик.

Координаты точек окружности цилиндра 2 с центром в точке O_2 , расположенной на расстоянии $(2R + \delta)$ от O_1 , представим через (r, ψ_1) , где ψ_1 — угол между направлением из O_1 на рассматриваемую точку цилиндра 2 и отрезком, соединяющим O_1 и O_2 . Эти координаты имеют вид

$$r = R \sqrt{\sin^2 \psi_2 + (2 + \delta/R - \cos \psi_2)^2} = R \sqrt{5 + 4\delta/R + \delta^2/R^2 - 2(2 + \delta/R) \cos \psi_2}, \quad (4)$$

$$\psi_1 = \arcsin(\sin \psi_2 / \sqrt{5 + 4\delta/R + \delta^2/R^2 - 2(2 + \delta/R) \cos \psi_2}), \quad (5)$$

где ψ_2 — угол соответствующей дуги на цилиндре 2.

В сопутствующей системе координат движение центра цилиндра 2 вокруг цилиндра 1 происходит с угловой скоростью ω , а вращение его вокруг своего центра — с угловой скоростью 2ω по часовой стрелке. При соприкосновении цилиндра 2 с областью жидкости учитывается скорость движения точек окружности цилиндра 2, имеющая следующие компоненты в системе координат r, θ :

$$V_\theta = V_x \cos(\varphi_{m1}) + V_y \sin(\varphi_{m1}), \quad V_r = V_x \sin(\varphi_{m1}) - V_y \cos(\varphi_{m1}), \quad (6)$$

для которых $x_m = x_c + (2R + \delta) \sin(\varphi_1) - r_2 \sin(\varphi_2)$, $y_m = y_c - (2R + \delta) \cos(\varphi_1) + r_2 \cos(\varphi_2)$, $V_x = -\omega(2R + \delta) \cos(\varphi_1) - 2\omega r_2 \cos(\varphi_2)$, $V_y = -\omega(2R + \delta) \sin(\varphi_1) + 2\omega r_2 \sin(\varphi_2)$, $\varphi_1 = \varphi_0 - \omega t$, $\varphi_2 = \varphi_{m0} - 2\omega t$; (x_m, y_m) , (x_c, y_c) — координаты рассматриваемой точки и центра цилиндра 1 в декартовой системе координат OXY , связанной с цилиндром 1 (см. рис. 1), где φ_1 — угол поворота центра цилиндра 2 O_2 относительно центра цилиндра 1 O_1 (угол θ для O_2), φ_2 — угол между направлением из O_2 на рассматриваемую точку цилиндра 2 и вертикальной линией, φ_0 — начальное значение θ для центра цилиндра 2, φ_{m0} — начальное значение φ_2 .

С изменением со временем положений точек x_m, y_m по углам φ_1, φ_2 их координаты в полярной системе координат r, θ определяются следующим образом. Сначала по (4) для каждого значения угла $\psi_2 = \varphi_2 - \varphi_1$ находится r , затем по (5) вычисляется ψ_1 . Окончательно имеем $\theta = \varphi_{m1} = \varphi_1 - \psi_1$. При этом радиусы на поверхностях цилиндров 1 и 2 равны $r_1 = r_2 = R$.

Для свободной границы жидкости Ω , представляемой в виде некоторой функции $f(t, r, \theta)$, кинематическое условие, обеспечивающее непроницаемость границы, будет иметь вид

$$f_t + f_r U_r + f_\theta U_\theta = 0. \quad (7)$$

Сила поверхностного натяжения жидкости на свободных границах для цилиндрической поверхности определяется по отношению C_n / \mathbf{r}_{cr} , где C_n — коэффициент поверхностного натяжения жидкости, \mathbf{r}_{cr} — радиус кривизны линии $f(t, r, \theta)$.

При слабом взаимодействии свободной границы жидкости с окружающим газом, имеющим давление $P_{\text{атм}}$ и малые плотность и вязкость, условие непрерывности тензора напряжений на границе двух сред можно записать в виде формулы Лапласа

$$P = P_{\text{атм}} - C_n/r_{cr}^2 \mathbf{r}_{cr} \cdot \mathbf{n}, \quad (8)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к границе.

Для области жидкости Ω в сопутствующей системе координат на начальный момент времени $t = 0$ координаты r, θ имеют пределы $r \in [R, R + \delta_S]$, $\theta \in [-\delta_L/(2R), \delta_L/(2R)]$. Во всей области $U_r(0, r, \theta) = 0$, $U_\theta(0, r, \theta) = 0$. В последующие моменты времени цилиндр 2 станет соприкасаться с этой областью начиная с точки $(R + \delta_S, \delta_L/(2R))$, для которой из условий прилипания и непротекания компоненты скорости будут определяться по формулам (6) $U_r = V_r$, $U_\theta = V_\theta$. Это же будет выполняться и для других граничных точек жидкости, приходящих в соприкосновение с подвижной границей цилиндра 2. Условие для градиента давления на этой границе для r, θ , соответствующих значениям (4) и (5) при $\psi_1 = \varphi_1(t) - \theta$, получается из уравнений (1), (2):

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}(t, r, \theta), \frac{R}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta R}(t, r, \theta) \right) = \left(\frac{(U_\theta + \omega r)^2}{r} + \nu \left(\nabla^2 U_r - \frac{U_r}{r^2} - \frac{2R}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta R} \right), \right. \\ \left. - \frac{U_r U_\theta}{r} - 2U_r \omega + \nu \left(\nabla^2 U_\theta - \frac{U_\theta}{r^2} + \frac{2R}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta R} \right) \right).$$

На границе с цилиндром 1 из тех же условий для t из $[0, T]$ граничные условия в сопутствующей с этим цилиндром системе координат примут вид

$$U_r(t, R, \theta) = 0, \quad U_\theta(t, R, \theta) = 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}(t, R, \theta) = \omega^2 R + \nu \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2}(t, R, \theta).$$

При этом координата θ будет изменяться в пределах соприкасания рассматриваемой области жидкости с цилиндром 1.

На свободной границе необходимо поставить условия для компонент скорости, для каждого момента времени определяемые из следующих условий согласования тензоров напряжений на свободной границе (отсутствие взаимодействия с внешней средой): $\partial \mathbf{U}_\tau / \partial \mathbf{n} = \mathbf{0}$, $\partial \mathbf{U}_n / \partial \mathbf{n} = \mathbf{0}$, где \mathbf{U}_τ — тангенсальный вектор скорости на границе жидкости, \mathbf{U}_n — вектор скорости по нормали к границе. При этом давление на свободных границах для всех t из $[0, T]$ определяется из упрощённого динамического условия (8).

При использовании уравнения (3) для определения поля давления во всей расчётной области течения жидкости Ω его обычно дополняют эволюционным членом $\partial P / \partial t$ в виде

$$\varepsilon_p \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{U} = (U_R, U_\theta), \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{R}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta R},$$

$\varepsilon_p > 0$ — параметр, оптимально выбираемый при численных расчётах для сходимости решения и приближения (9) к уравнению (3).

2. Конечно-разностные методы решения

Для численного решения уравнений (1), (2), (9) вводится новая полярная система координат x, y , преобразованная из полярной системы координат r, θ и соответствующая $(R\theta, R - r)$, в которой граница цилиндра 1 проходит по оси Ox , а у цилиндра 2 центр перемещается при $y < 0$ от $R\varphi_0$ справа налево со скоростью $R\omega$. В этой системе координат расчётную область \mathbf{W} представим в форме прямоугольника с регулярной сеткой и равномерными шагами h_x, h_y (N_x, N_y — число узлов по координатам x, y). На фиксированной сетке применяются конечно-разностные методы с вводом подвижных граничных узлов для границы цилиндра 2 и свободной границы жидкости, которая в начальный момент находится на цилиндре 1 без относительного движения. В новой системе координат обозначим компоненты скорости $(U_\theta, -U_r)$ через $(u, v) = \mathbf{V}$.

В принятых в системе координат x, y обозначениях векторов скорости (что удобно для привязки к размерной длине области жидкости при графическом отображении в прямоугольной расчётной области) уравнения (1)–(3) после перестановки (1) и (2) и при отсутствии углового ускорения ε примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{uR}{R-y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{vu}{R-y} - 2v\omega = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{R}{R-y} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{(R-y)^2} - \frac{2R}{(R-y)r^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{uR}{R-y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{(u + \omega(R-y))^2}{R-y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\nabla^2 v - \frac{v}{(R-y)^2} + \frac{2R}{(R-y)^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{R-y} + \frac{R}{R-y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

где

$$\nabla^2 U = -\frac{1}{R-y} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{R^2}{(R-y)^2} \frac{\partial^2 U}{(\partial x)^2}.$$

Для расчёта в уравнениях (10) и (11) конвективно-диффузионных членов использовалась схема стабилизирующей поправки [2] с итерационным шагом по времени τ

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1/2} - \mathbf{V}^n}{\tau} = \Lambda_1(\mathbf{V}^{n+1/2} - \mathbf{V}^n) + \Lambda \mathbf{V}^n + \Lambda_0 \mathbf{V}^n - \Gamma p^{n+1}/\rho + \mathbf{F}^n, \quad (13)$$

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2(\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^n), \quad (14)$$

где

$$\Lambda_1 = uR/(R-y) \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h_x} + \nu R^2/(R-y)^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_x^2}, \quad \Lambda_2 = v \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h_y} + \nu \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_y^2},$$

$$\begin{aligned} \Lambda_0 \mathbf{V}^n = \nu \left(-2R/(R-y)^2 \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h_x} v^n - 1/(R-y) \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h_y} u^n - \right. \\ \left. -1/(R-y)^2 u^n, 2R/(R-y)^2 \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h_x} u^n - 1/(R-y) \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h_y} v^n - 1/(R-y)^2 v^n \right) + \end{aligned}$$

$$+ \left(1/(R-y)v^n u^n, -1/(R-y)u^n u^n \right),$$

$$\mathbf{F}^n = \left(2v^n \omega, -2u^n \omega - \omega^2(R-y) \right),$$

$\Delta_1, \Delta_{-1}, \Delta_2, \Delta_{-2}$ — операторы сдвига функции на шаг сетки вверх или вниз по осям координат x, y .

Оператор Λ в (13) является суммой $\Lambda_1 + \Lambda_2$. Порядок аппроксимации в операторах Λ и Λ_0 не больше двух (т.е. $O(h_x^2, h_y^2)$), а порядок аппроксимации градиента давления (Γp^{n+1} в (13)) и дивергенции скорости в (9) в случае применения трехточечных шаблонов в каждом пространственном направлении может быть повышен до четырёх. Для градиента давления используется следующее математическое представление в окрестности узла (x_i, y_j) :

$$\Gamma p^{n+1}|_{i,j} \simeq \left(R/(R-y) \left(\frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h_x} p_{i,j}^{n+1} - \frac{h_x^2}{6} p_{xxx,i,j}^{n+1} \right), \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h_y} p_{i,j}^{n+1} - \frac{h_y^2}{6} p_{yyy,i,j}^{n+1} \right). \quad (15)$$

Для аппроксимации третьих производных по x и y от давления второго порядка на компактном шаблоне (с использованием трёх узлов в каждом направлении) вначале произведём замены этих производных в виде

$$p_{xxx} = ((R-y)^2/R^2) (\rho G_x - p_{yyx} + R/(R-y)p_{yx}), \quad (16)$$

$$p_{yyy} = \rho G_y - 2R^2/(R-y)^3 p_{xx} - R^2/(R-y)^2 p_{xxy} + 1/(R-y)^2 p_y + 1/(R-y)p_{yy}, \quad (17)$$

где G следует из подстановки $\partial U_r/\partial t$ и $\partial U_\theta/\partial t$ из уравнений (1) и (2) в (3) и равняется всем слагаемым без функции давления после преобразования координат и компонент скорости ($(\theta R, R-r)$ в (x, y) и $(U_\theta, -U_r)$ в (u, v)):

$$G(x, y, u, v) = -v_y^2 + 1/(R-y)(vv_y - 2uu_y - 2ru_yv_x) +$$

$$+ R/(R-y)^2(uv_x + u_xv - Ru_x^2) + 2\omega^2 - 2\omega u_y + 2\omega/(R-y)(u + Rv_x). \quad (18)$$

Аналогично строится аппроксимация дивергенции скорости четвёртого порядка на компактном шаблоне

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1}|_{i,j} \simeq R/(R-y) \left(\frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h_x} u_{i,j}^{n+1} - \frac{h_x^2}{6} u_{xxx,i,j}^{n+1} \right) -$$

$$- 1/(R-y)v_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h_y} v_{i,j}^{n+1} - \frac{h_y^2}{6} v_{yyy,i,j}^{n+1} \quad (19)$$

с использованием замен для третьих производных и с последующей аппроксимацией первых и вторых производных по каждому пространственному направлению центральными разностями второго порядка

$$u_{xxx} = -(R-y)/Rv_{yx} + 1/Rv_{xx}, \quad (20)$$

$$v_{yyy} = 2/(R-y)^3(v - Ru_x) + 2/(R-y)^2(v_y - Ru_{xy}) + 1/(R-y)(v_{yy} - Ru_{xyy}). \quad (21)$$

Аппроксимация производных в (15) и (19) производится в узлах с индексами i, j , где $i = 1, \dots, N_x - 1$, $j = 1, \dots, N_y - 1$. Для расчёта давления уравнение (9) представляется в конечно-разностном виде

$$\varepsilon_p \frac{p^{n+1,k+1} - p^{n+1,k}}{\tau} + \nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1,k+1} = 0, \quad (22)$$

где дивергенция скорости заменяется по (19) при использовании (20), (21) с заменой частных производных первого и второго порядка на конечно-разностные аналоги со вторым порядком аппроксимации на трехточечных шаблонах. При каждом расчёте давления необходим дополнительный расчёт данного параметра на твёрдых границах по уравнениям движения (10) и (11). Для этого вблизи твёрдых границ в дополнительных узлах на расстоянии в полшага от стенок используется аналог условия Тома для производных от компонент скорости и для их значений в виде (на примере граничного узла $(0, j)$)

$$\left(\frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} \right)_{i,j} = \frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{h_x^2}, \quad v_{1/2,j} = \frac{(3v_{0,j} + 6v_{1,j} - v_{2,j})}{8}.$$

На каждой $n + 1$ -й итерации по времени по (22) определяется давление с помощью отдельного итерационного процесса при $k = 0, 1, \dots, N(\varepsilon)$, где ε — малая величина, не превышающая по норме приращения давления на N -й итерации. При этом на каждой итерации по k проводится перерасчёт вектора скорости $\mathbf{V}^{n+1,k}$ при изменённом давлении $p^{n+1,k}$. Данный алгоритм был применён в работе [3] для тестового расчёта вязкой несжимаемой жидкости. В такой постановке моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости производится до определённого значения времени t , пока цилиндр 2 находится в зоне контакта с жидкостью, первоначально расположенной на цилиндре 1 и при начальном времени вступающей в контакт с цилиндром 2.

3. Расчёт движения границы жидкости

Для расчёта перемещений условной границы жидкости, не проходящей через узлы сетки, вводятся дополнительные узлы на линиях между внутренними и внешними узлами, как это показано на рис. 2. Их смещение за шаг по времени τ с учётом с каким-либо приближением кривизны границы можно определить по компонентам скорости $(u_{i,j}, v_{i,j})$

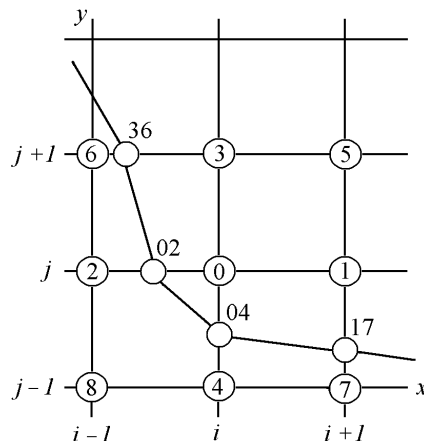


Рис. 2. Сеточный шаблон около подвижной границы

в прилегающем к границе расчётном (i, j) -м узле. Для этой цели можно пронумеровать окрестные узлы от 0 (центральный (i, j) -й узел) до 8 и произвести построение параболической интерполяции для кривой границы по трём дополнительным узлам, находящимся на пересечениях с узловыми линиями. В таком случае разрешение малых структур для областей, занимаемых жидкостью, будет ограничиваться шагами по сетке h_x и h_y . Как и центральный узел, указанные три узла выбираются на данной узловой и двух соседних линиях.

Из рис. 2 видно, что для узловой линии такие узлы по оси x имеют номера 36, 02 и 04, по оси y — 02, 04, 17. Пусть при рассмотрении дополнительного узла по оси x будут заданы координаты этих узлов $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Тогда интерполяцию можно записать в следующем виде:

$$x = x_2 + (y - y_2) \left(\frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1} \right) + \frac{(y - y_2)^2}{y_3 - y_1} \left(\frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2} - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \right). \quad (23)$$

Аналогично интерполяция строится и для дополнительного узла по оси y . В новых координатах такие интерполянты вместо $f(t, r, \theta)$ для кинематического условия (7) можно рассматривать как отдельные функции свободной границы $f_1(t, x, y)$ и $f_2(t, x, y)$, причём одна из них представляет перемещение свободной границы по оси x , другая — по оси y .

После перемещения границы в виде интерполянты (23) за время τ координаты рассматриваемых узлов по x и y изменятся на величины $\tau u_{i,j}$ и $\tau v_{i,j}$ и примут значения $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_3, y'_3)$. При этом интерполянта для узловой линии по оси x для определения новых координат дополнительного узла (\tilde{x}_2, y_2) сместится на величину

$$\delta x = \tau u_{i,j} - \tau v_{i,j} \left(\frac{x'_3 - x'_1}{y'_3 - y'_1} \right) + \frac{(\tau v_{i,j})^2}{y'_3 - y'_1} \left(\frac{x'_3 - x'_2}{y'_3 - y'_2} - \frac{x'_2 - x'_1}{y'_2 - y'_1} \right). \quad (24)$$

Представленный расчёт движения границ жидкости по дополнительным узлам, находящимся на узловых линиях, позволяет учесть кривизну линии границы и точнее вычислять смещение последней при её произвольных ориентациях и произвольных направлениях вектора скорости.

4. Результаты расчётов

Для рассмотренной постановки задачи приведём результаты расчётов по конечно-разностной схеме (13), (14), (22) на равномерной сетке при $N_x = N_y = 80$ и ν в пределах от $0.2 \cdot 10^{-5}$ до $0.2 \cdot 10^{-3}$. Для определения числа Рейнольдса используем такие параметры как начальная толщина слоя жидкости и начальная радиальная скорость схождения цилиндров в области жидкости. При выбранных значениях этих параметров течение будет соответствовать числам Re от 1 до 100, причём скорость между цилиндрами в малой области их контакта с жидкостью по мере вращения цилиндров может изменяться в несколько раз.

Для итерационного шага τ значения выбирались из условий устойчивости расчётной схемы в пределах от $0.5 \cdot 10^{-7}$ до $0.5 \cdot 10^{-6}$ при следующих параметрах задачи: начальные размеры области жидкости $\delta_L = 0.008$ и $\delta_S = 0.004$, коэффициент поверхностного натяжения $C_n = 0.03$, $r_1 = r_2 = 0.05$. Размерности всех величин здесь соответствуют

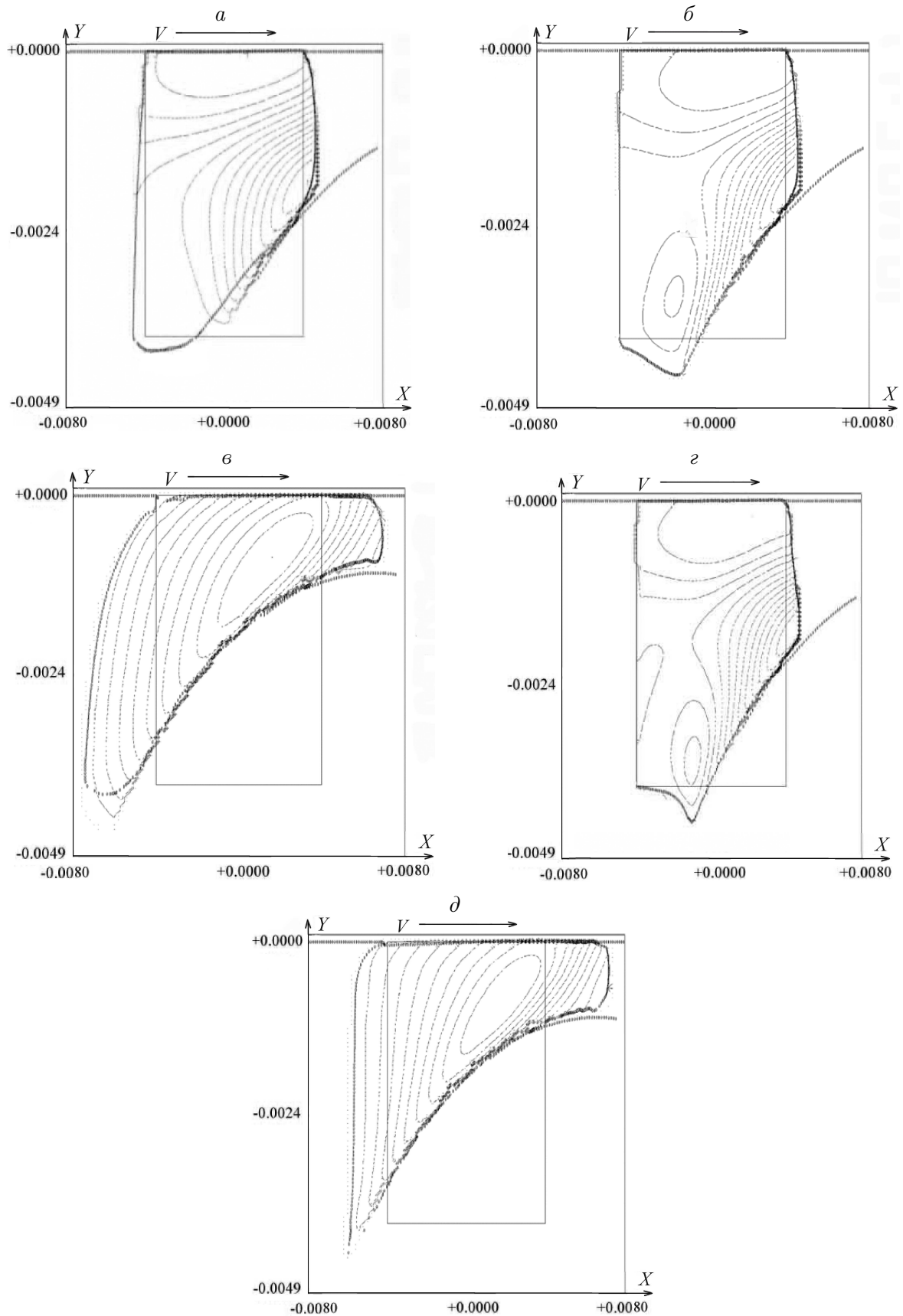


Рис. 3. Границы области течения жидкости при $t = 0.1 \cdot 10^{-2}$, $Re = 1$ (*a*), $t = 0.1 \cdot 10^{-2}$, $Re = 10$ (*б*), $t = 0.2 \cdot 10^{-2}$, $Re = 10$ (*в*), $t = 0.1 \cdot 10^{-2}$, $Re = 100$ (*г*) и $t = 0.2 \cdot 10^{-2}$, $Re = 100$ (*д*); $\omega = 100$

размерностям физических величин в системе СИ. Расчётная сетка рассматривалась для области, включающей начальную область жидкости Ω , с координатами x от -0.008 до 0.008 и y от -0.0049 до 0.0001 .

На рис. 3 показаны численные решения с мгновенными линиями тока, полученными при задании на одной границе $\psi = 0$ из поля скоростей путём интегрирования в расчётной области с точностью $O(h_x^2 + h_y^2)$ следующих соотношений:

$$\frac{R-y}{R} \frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v. \quad (25)$$

Визуализация течения жидкости между двумя вращающимися цилиндрами, представленная на рис. 3, показывает возможные перемещения свободных границ жидкости для разных чисел Re на моменты времени $t = 0.1 \cdot 10^{-2}$ и $t = 0.2 \cdot 10^{-2}$. При этом движение свободных границ при числах $Re = 1$ и 10 по сравнению с расчётами для $Re = 100$ соответствует течению с большей вязкостью и существенным изменением всей свободной границы на начальном промежутке времени движения цилиндров.

Таким образом, показаны возможности применения рассмотренного метода для моделирования течений несжимаемой жидкости с движущимися и свободными границами на заданной регулярной сетке.

Список литературы

- [1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
- [2] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 196 с.
- [3] Паничкин А.В. Ускорение сходимости в расчётах стационарных течений жидкости при больших числах Рейнольдса // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13. Спец. выпуск № 3. С. 38–44.

*Поступила в редакцию 7 декабря 2012 г.,
с доработки — 25 февраля 2013 г.*