

Однородная изотропная турбулентность: Геометрия и допускаемая группа преобразований*

В. Н. ГРЕБЕНЁВ, С. Б. МЕДВЕДЕВ

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: vngrebenev@gmail.com, serbormed@gmail.com

Изучается лагранжева система, определённая на пространстве корреляционных векторов, метрика переменной сигнатуры $ds^2(t)$ которого порождается двухточечным корреляционным тензором флуктуаций поля скорости однородного изотропного турбулентного потока. Вводится в рассмотрение функционал простого действия (длины) между двумя лагранжевыми точками данного турбулентного потока, и исследуется группа преобразований, оставляющая статистику расстояния инвариантной. Показано, что по пространственным переменным данное преобразование совпадает с псевдогруппой Ли для сигнатуры $(++)$ метрики $ds^2(t)$ и группой конформных преобразований пространства $R_{1,1}^2$ для сигнатуры $(+-)$.

Ключевые слова: однородная изотропная турбулентность, двухточечный корреляционный тензор, лагранжева система, преобразование эквивалентности, геометрия коореляционного пространства.

Введение

Методы описания геометрии турбулентных потоков в основном представлены визуализацией расчётов, получаемых в результате прямого численного моделирования турбулентности. Отметим, что реализация геометрии потока связана с такими трудностями как статистическое представление траекторий частиц потока, нахождение размера “облака” частиц потока и его формы, описание совместного (кооперативного) поведения частиц и их конфигурации [1, 2]. При этом возникает необходимость вычисления расстояния между движущимися частицами потока в каждый момент времени, в частности, определения геометрии потока. Полученные многочисленные результаты по визуализации различных турбулентных потоков свидетельствуют о возникновении структур с нетривиальной геометрией в потоке, что ведёт к проблеме нахождения метрики для вычисления расстояния между частицами потока, согласованной с его геометрией. В общем случае, без спецификации турбулентного потока, эта проблема представляется весьма сложной. При однородном изотропном турбулентном потоке метрика $ds^2(t)$ корреляционного пространства была определена в работе [3] исходя из двухточечного корреляционного тензора, который для данного вида потока является диагональным тензором с корреляционными функциями (продольная и поперечная), являющимися его диагональными элементами. Эволюция по времени продольной корреляционной функции определяется из уравнения Кармана — Ховарта, тогда как поперечная

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00648-а), гранта Правительства РФ для господдержки научных исследований коллективами под руководством приглашенных исследователей по соглашению № 12.740.11.1430.

корреляционная функция находится из известного дифференциально-алгебраического соотношения между этими двумя корреляционными функциями (см. ниже раздел 1). Таким образом, изменение по времени метрики (однопараметрического семейства метрик), а следовательно, и расстояния между частицами потока определяется эволюцией продольной корреляционной функции. Более того, в рамках данной метрики в [3] была изучена геометрия однородного изотропного потока. Вопрос о физической реализации геометрии потока связан с построением однопараметрического семейства изометрических вложений $\iota(t) = \iota_t$ в евклидово пространство R^3 такого, что $\iota_t^* h^2 = ds^2(t)$, где h — евклидова метрика. Потоки Риччи на римановом многообразии являются наиболее известным примером реализации такого вида вложений [4]. Концептуально применение двухточечного корреляционного тензора для описания геометрии однородного изотропного потока подобно визуализации потока Риччи в евклидовом пространстве. Сложность реализации данной процедуры в сравнении с потоками Риччи состоит в том, что уравнение Кармана — Ховарта, отвечающее за эволюцию метрического тензора, является незамкнутым, что представляет отдельную тему исследований, которая в данной работе не рассматривается. Таким образом, мы будем использовать $ds^2(t)$ в качестве метрики для определения геометрии однородного изотропного потока в рамках риманова многообразия с метрикой, определяемой двухточечным корреляционным тензором, связь которой с визуализацией (физической реализацией) потока определяется через семейство вложений $\iota(t)$. Как было отмечено выше, построение изометрических вложений в R^3 является открытой проблемой, связанной как со спецификацией корреляционных функций, так и с проверкой критерия изометрического (локального) вложения метрики $ds^2(t)$ в евклидово (физическое) пространство.

Основная цель данной работы состоит в изучении групп преобразований, которые оставляют статистику расстояния (определяемую метрикой $ds^2(t)$) между точками однородного изотропного потока инвариантной. В разделе 1 в кратком виде представлены результаты работы [3] по геометрии корреляционного пространства и исследуется лагранжева система с функционалом простого действия (длины). В разделе 2 рассматриваются симметрии функционала простого действия, которые сохраняют длину касательного вектора вдоль геодезических кривых или оставляют инвариантной статистику расстояния между двумя близкими точками однородного изотропного потока. Исследование ведётся в рамках преобразований эквивалентности введённого лагранжиана, что позволяет расширить группу симметрий функционала простого действия.

1. Геометрия корреляционного пространства для однородной изотропной турбулентности

1.1. Двухточечный корреляционный тензор

Двухточечный корреляционный тензор флуктуаций турбулентного поля скорости, параметризованный временем t , является физическим объектом, компоненты которого определяются формулой

$$B_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \overline{(u'_i(\mathbf{x}, t))(u'_j(\mathbf{x}', t))}, \quad (1)$$

где $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}'(\mathbf{x}', t)$ — флуктуации скорости в точках (\mathbf{x}, t) и (\mathbf{x}', t) , $t \in R_+$, \mathbf{x} , \mathbf{x}' , являются точками трёхмерного пространства, заполненного турбулентным потоком. Напомним, что статистическое описание турбулентности основано на разложении Рейнольдс-

са турбулентного поля скорости \mathbf{u} на осреднённую и флуктуирующую компоненты: $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$, где $(\bar{\mathbf{u}})$ означает среднюю скорость, а \mathbf{u}' есть его пульсационная составляющая. Компоненты тензора могут быть переписаны в виде

$$B_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = \overline{(u'_i(\mathbf{x}, t))(u'_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t))},$$

где вектор \mathbf{r} определяется парой точек (x, x') или $\mathbf{r} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$, что позволяет ввести в рассмотрение аффинное пространство K^3 с присоединённым векторным пространством корреляционных векторов $\mathbf{K}^3 \equiv \{\mathbf{r} = (r^1, r^2, r^3)\}$. Предположения об однородности и изотропности турбулентного потока, т. е. инвариантности относительно вращения, отражения и сдвига, подразумевает, что тензор зависит только от длины корреляционного вектора \mathbf{r} и времени t :

$$B_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = B_{ij}(|\mathbf{r}|, t). \quad (2)$$

Изотропия турбулентного потока ведёт к тому, что $B_{ij}(|\mathbf{r}|, t)$ является симметрическим тензором и корреляции B_{ij} могут быть выражены через продольную $B_{LL}(|\mathbf{r}|, t)$ и поперечную $B_{NN}(|\mathbf{r}|, t)$ корреляционные функции [5], т. е. корреляционный тензор B_{ij} в данном случае диагональный с компонентами $B_{11} = B_{LL}$ и $B_{22} \equiv B_{33} = B_{NN}$ в системе координат присоединённого векторного пространства, в которой вектор \mathbf{r} сонаправлен с осью \mathbf{r}^1 . Отметим, что тогда $|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}^1|$ ($\mathbf{r} = |\mathbf{r}^1|\mathbf{e}_1$). Далее вместо корреляционных функций B_{LL} и B_{NN} мы используем их нормализованные представления f и g : $B_{LL} = \overline{u'^2(t)}f(|\mathbf{r}^1|, t)$, $B_{NN} = \overline{u'^2(t)}g(|\mathbf{r}^1|, t)$, где $\overline{u'^2(t)} = B_{LL}(0, t)$. Тогда соответствующая квадратичная форма (линейный элемент) принимает вид

$$dl^2(t) = \overline{u'^2(t)}f(|\mathbf{r}^1|, t)dr^{1^2} + \overline{u'^2(t)}g(|\mathbf{r}^1|, t)(dr^{2^2} + dr^{3^2}),$$

где $dl^2(t)$ является индефинитной квадратичной формой. Нормализованная поперечная корреляционная функция g удовлетворяет соотношению (следует из уравнения неразрывности) [6]

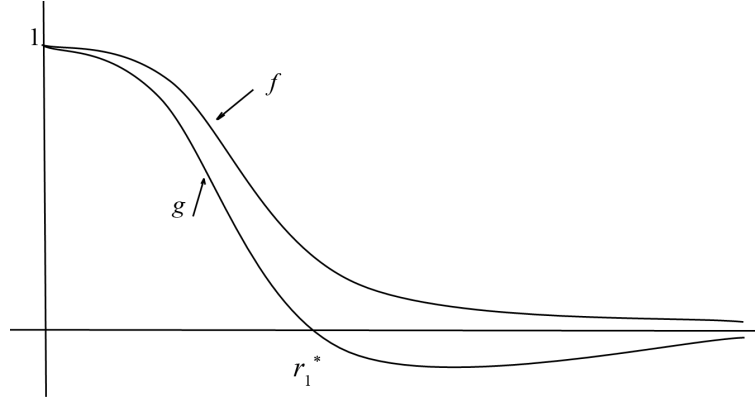
$$g(|\mathbf{r}_1|, t) = f(|\mathbf{r}_1|, t) + \frac{r_1}{2} \frac{\partial}{\partial r_1} f(|\mathbf{r}_1|, t). \quad (3)$$

Если f убывает быстрее чем $|\mathbf{r}_1|^{-2}$ на бесконечности, то из формулы (3) непосредственно получается равенство [6]

$$\int_0^\infty |\mathbf{r}_1|g(|\mathbf{r}_1|, t)d|\mathbf{r}_1| = 0. \quad (4)$$

Следовательно, $g(|\mathbf{r}_1|, t)$ — знакопеременная функция. На рисунке приведены графики экспериментально измеренных функций f и g , вид которых используется для определения качественного поведения, в частности, алгебраических свойств данных функций. Таким образом, будем предполагать, что f является положительной функцией, g меняет знак только на интервале $(-\varepsilon + |\mathbf{r}_1^*|, |\mathbf{r}_1^*| + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $g > 0$ на интервалах $[0, \pm|\mathbf{r}_1^*|)$, $g < 0$ вне интервала $[-|\mathbf{r}_1^*|, |\mathbf{r}_1^*|]$. Изменение знака g означает, что квадратичная форма $dl^2(t)$ имеет переменную сигнатуру. Нормализованная продольная корреляционная функция $f(|\mathbf{r}_1|, t)$ удовлетворяет уравнению Кармана — Ховарта [7]

$$\frac{\partial \overline{u'^2(t)}f(|r_1|, t)}{\partial t} = \frac{1}{r_1^4} \frac{\partial}{\partial r_1} r_1^4 \left(\overline{u'^2(t)}^{3/2} h(|r_1|, t) + 2\nu \frac{\partial}{\partial r_1} \overline{u'^2(t)}f(|r_1|, t) \right), \quad (5)$$



Типичный вид нормализованных продольной и поперечной корреляционных функций

где h — нормализованная функция тройных корреляций, $\overline{u'^2(t)}$ — интенсивность турбулентности (положительная функция, стремящаяся к нулю при бесконечном возрастании времени), или масштаб скорости кинетической энергии турбулентности, $\overline{u'^2(t)}^{3/2}$ определяет масштаб переноса турбулентности. Уравнение Кармана — Ховарта является прямым следствием уравнений Навье — Стокса (см, например, [5]) и содержит две неизвестные функции f , h , которые не могут быть определены одновременно из уравнения (5) без привлечения дополнительных гипотез.

1.2. Аффинная связность, совместная с двухточечным корреляционным тензором

Аналогом прямой линии, соединяющей точки \mathbf{x} и \mathbf{x}' в евклидовом пространстве R^3 , для аффинной связности Γ_{ij}^k присоединённого пространства \mathbf{K}^3 для каждого фиксированного момента времени t служат геодезические кривые $\gamma(s)$ (параметризованы натуральным параметром — длиной дуги геодезической кривой). Напомним, что геодезическая кривая определяется аффинной связностью Γ_{ij}^k : $\nabla_{\gamma_s}(\gamma_s) = 0$, где γ_s — поле скорости траектории $\gamma(s)$. Двухточечный корреляционный тензор B_{ij} для однородной изотропной турбулентности является метрическим тензорным полем, параметризованным временем t . Определим аффинную связность присоединённого пространства \mathbf{K}^3 с помощью компонент тензорного поля B_{ij} согласно формуле

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} B^{kl} \left(\frac{\partial B_{ij}}{\partial r^i} + \frac{\partial B_{il}}{\partial r^j} - \frac{\partial B_{lj}}{\partial r^i} \right).$$

Линейный элемент dl^2 векторного пространства \mathbf{K}^3 определяет структуру псевдориманова многообразия для корреляционного пространства K^3 .

Рассмотрим в корреляционном пространстве K^3 с присоединённым векторным пространством \mathbf{K}^3 со стандартным (евклидовым) скалярным произведением цилиндрическую область (выделенную область турбулентного потока в фиксированный момент времени). Тогда метрика, индуцированная метрическим тензором B_{ij} , поверхности цилиндрической области имеет вид

$$ds^2(t) = \overline{u'^2(t)} f(|\mathbf{r}_1|, t) dr_1^2 + \overline{u'^2(t)} g(|\mathbf{r}_1|, t) \rho^2 d\phi^2, \quad (6)$$

где ρ — (евклидовый) радиус сечения $\{a\} \times S^1(\rho)$ поверхности $R \times S^1(\rho)$, $a \in R$. Можем считать, что $\rho = 1$ и цилиндрическая поверхность совпадает с $R \times S^1(1)$. Следующие две

величины этого многообразия M^t характеризуют метрические свойства выделенного объёма в рамках метрики, порождённой метрическим тензором B_{ij} : длина $\mathbf{L}(t)$ вдоль меридиана цилиндрической поверхности и радиус $\mathbf{R}_a(t)$ сечения $\{a\} \times S^1(1)$, которые определяются формулами

$$\mathbf{L}(t) = 2 \int_0^\infty \sqrt{u^2(t)f(|\mathbf{r}_1|, t)} d|\mathbf{r}_1|, \quad \mathbf{R}_a(t) = \sqrt{|u^2(t)g(|a|, t)|}. \quad (7)$$

Безразмерные функции f, g таковы, что $f(0, t) = g(0, t) = 1$, f является положительной функцией такой, что $f \rightarrow 0$ ($g \rightarrow 0$) при неограниченном возрастании $|\mathbf{r}_1|$. Более того, f и g — чётные функции такие, что $f \leq 1$, $|g| \leq 1$. Интеграл в (7) сходится при $|\mathbf{r}_1| \rightarrow \infty$ при каждом фиксированном моменте времени $t \in R_+$ при условии, что f убывает быстрее, чем $|\mathbf{r}_1^{-2}|$, когда $|\mathbf{r}_1|$ стремится к бесконечности. Как показано в [6], такое убывание на бесконечности является физически реализуемым, и в этом случае функция

$$q(a, t) = \int_0^a \sqrt{f(|\mathbf{r}_1|, t)} d|\mathbf{r}_1|, \quad a \in R,$$

отображает $(-\infty, \infty) \mapsto [-\mathbf{L}^*(t), \mathbf{L}^*(t)]$, $\mathbf{L}^*(t) = \mathbf{L}(t)/2\sqrt{u^2(t)}$. Таким образом, деформирование во времени выделенного объёма турбулентного потока можно описать в терминах изменения величин $\mathbf{L}(t)$ и $\mathbf{R}_a(t)$ (меридиональный и радиальный размеры соответственно) при действии турбулентного поля скорости на частицы потока.

1.3. Геометрическая реализация и изометрии метрики $ds^2(t)$

Приведём в кратком виде геометрическую реализацию метрики $ds^2(t)$ (подробности см. в [3]). Метрика $ds^2(t)$ в терминах переменной q принимает вид

$$ds^2(t) = \overline{u^2(t)} \{dq^2 + G(q, t)d\phi^2\}, \quad G(q, t) = g(|\mathbf{r}_1|, t). \quad (8)$$

Дадим следующее определение [8]: точка p_0 называется полюсом псевдориманова многообразия M , если p_0 является неподвижной точкой группы диффеоморфизмов $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r)$, действующей на многообразии M .

Метрика (8) допускает однопараметрическую группу движений (изометрий) $\mathbf{g}_\tau(\mathbf{p}) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{p}, a_1)$, $\mathbf{p} = (q, \phi)$, вида

$$\mathbf{g}_\tau : (q, \phi) \mapsto (q, \phi + \chi\tau), \quad \chi = \text{const}$$

с инфинитезимальным оператором

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial p^i} \equiv \chi \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Скалярное произведение оператора X

$$X^2 = \langle X, X \rangle = \left\langle \chi \frac{\partial}{\partial \phi}, \chi \frac{\partial}{\partial \phi} \right\rangle \equiv \chi^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \phi} \right\rangle = \overline{u^2(t)} \chi^2 G(q, t) \quad (9)$$

для каждого момента времени t . Отметим, что если $p = p_0$ (p_0 совпадает с полюсом \mathbf{g}_τ), то $X^2(p_0) = 0$ и ввиду (9) p_0 — это корни уравнения $G(q, \cdot) = 0$. Таким образом, точки $q^* \in [-\mathbf{L}^*(t), \mathbf{L}^*(t)]$, в которых G обращается в ноль, являются полюсами \mathbf{g}_τ . В силу предположений относительно $g(|\mathbf{r}_1|, t)$ уравнение $G(q, \cdot) = 0$ имеет только четыре корня q_i^* , $i = 1, \dots, 4$, таких, что $|q_1^*| = q_4^* = \mathbf{L}^*(t)$ и $|q_2^*| = q_3^*$. Следовательно, (8) является метрикой переменной сигнатуры для $q \in I_1 = (q_2^*, q_3^*)$, $q \in I_2 = (-\mathbf{L}^*(t), q_2^*)$ и $q \in I_3 = (q_3^*, \mathbf{L}^*(t))$, где q_i^* зависят от t . Эта метрика при $q \in I_1$ определяет элемент длины поверхности вращения в R^3 и её радиус-вектор $\mathbf{R} = (q, \phi, \cdot)$ задаётся формулой

$$\mathbf{R}(q, \phi, \cdot) = \left(q, \{\overline{u^2(t)G}\}^{1/2}(q, \cdot) \cos \phi, \{\overline{u^2(t)G}\}^{1/2}(q, \cdot) \sin \phi \right).$$

Таким образом, многообразие, определённое (8) (реализация метрики), для $q \in I_1$ представляет собой поверхность цилиндрического вида $M_{I_1}^t = (q_2^*, q_3^*) \times S^1(1)$ с радиусом сечения $\{q\} \times S^1(1)$, равным $G^{1/2}(q, t)$. При $q \in I_i$, $i = 2, 3$, для которых $G < 0$, положительно определённая метрика

$$ds^2(t) = \overline{u^2(t)}\{dq^2 - |G(q, t)|d\phi^2\}, \quad G(q, t) = g(|\mathbf{r}_1|, t), \quad (10)$$

может быть реализована (см. [3]) как поверхность вращения (для каждого момента времени) в пространстве Минковского $R_{1,2}^3$ с элементом длины [9]

$$d\rho^2 = dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2.$$

Вращение представляет собой движение вдоль псевдоокружности радиуса $|G(q, \cdot)|^{1/2}$, $q \in I_i$. Длина смещения точки p (или длина орбиты) при действии диффеоморфизма $\mathbf{g}_\tau(p)$ на точку p определяется формулой

$$\lambda(\phi_a, \phi_b) = \int_{\phi_a}^{\phi_b} \chi \sqrt{u^2(t)|G(q, t)|} d\phi \equiv \chi \sqrt{u^2(t)|G(q, t_c)|} (\phi_b - \phi_a), \quad \chi = \text{const},$$

и для каждого момента времени t масштаб длины орбиты $\mathbf{O}_p : \tau \mapsto \mathbf{g}_\tau(p)$

$$\lambda_{\mathbf{O}_p} = \chi \sqrt{u^2(t)|G(q, t)|} 2\pi\phi, \quad q \in (q_3^*, \mathbf{L}^*(t)), \quad \chi = 1.$$

Константа χ фиксируется путём нормализации вектора ξ .

Гауссова кривизна K_{++} многообразия $M_{I_1}^t$ допускает сингулярное поведение в полюсах q_2^* и q_3^* , где G принимает нулевые значения, если $G_q(q_i^*, t) \neq 0$, $i = 2, 3$. В случае, когда полюсы являются мультипликативными нулями, т. е. $G(q_i^*, t) = G_q(q_i^*, t) = \dots G_{q\dots q}(q_i^*, t_c) = 0$, простые вычисления показывают, что K_{++} есть снова сингулярная функция в точках q_i^* для всех t . Если порядок нуля полюса является бесконечным, то $G(q, t) \equiv 0$ в окрестности q_2^* (q_3^*) при предположении, что G — аналитическая функция. Подобным образом анализируется поведение гауссовой кривизны многообразия $M_{I_3}^t$ ($M_{I_2}^t$) для полюсов q_3^* (q_2^*). В случае полюса $q_4^* = \mathbf{L}^*(t)$ ($q_1^* = -\mathbf{L}^*(t)$) учитывается, что f и соответственно g убывают быстрее, чем $|\mathbf{r}_1|^{-2}$, когда $|\mathbf{r}_1| \rightarrow \infty$. Применяя формулу $G_q = f^{-1/2}g_r$, $r = |\mathbf{r}_1|$, и используя предположения относительно поведения f (и G) при $|\mathbf{r}_1| \rightarrow \infty$ ($q \rightarrow \pm\mathbf{L}^*(t)$), легко получить, что (в терминах переменной $|\mathbf{r}_1|$) $|K|$ растёт быстрее, чем $|\mathbf{r}_1|^2$, когда $|\mathbf{r}_1| \rightarrow \infty$ ($q \rightarrow \pm\mathbf{L}^*(t)$).

Кроме того, отметим связь между гауссовой кривизной K_{++} поверхности $M_{I_1}^t$ и поперечным тейлоровским микромасштабом λ_g (см., например, [5]), который определяется формулой $\lambda_g^2(t) = -2(g_{r_1, r_1}(0, t))^{-1}$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$K_{++} = \frac{1}{\lambda_{g(t)}^2} = 2 \left(\frac{1}{\lambda_{f(t)}^2} \right) \quad \text{для сечения } \{0\} \times S^1, \quad (11)$$

где $\lambda_{f(t)}^2 = 2\lambda_{g(t)}^2$ — продольный тейлоровский микромасштаб. Из этой формулы следует, что гауссова кривизна $M_{I_1}^t$ положительна для малых значений $|q|$. Формула (11) также указывает на связь между геометрией $M_{I_1}^t$ и тейлоровским микромасштабом, возникающим в турбулентности. Используя хорошо известное соотношение между масштабами турбулентности (см., например, [5])

$$\lambda_{g(t)} = \sqrt{10}\eta^{2/3}\ell_t^{1/3},$$

где η — колмогоровский масштаб длины, ℓ_t — интегральный масштаб, характеризующий размер вихря, получаем

$$K_{++} = \frac{1}{10\eta^{4/3}\ell_t^{2/3}} \quad \text{для сечения } \{0\} \times S^1.$$

Колмогоровский масштаб η варьируется с изменением как вязкости ν , так и диссипации энергии турбулентности ε : $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$. В пределе больших чисел Рейнольдса или исчезающей вязкости ν гауссова кривизна K_{++} неограниченно возрастает на сечении $\{0\} \times S^1$. Это свойство устанавливает связь между геометрическими и гидродинамическими характеристиками потока.

Замечание 1. Особенность представленной метрики состоит в возникновении также сингулярности типа *сжатой шейки цилиндра в точку*, которая порождается изменением знака продольной корреляционной функции B_{NN} , т. е. наличием полюсов метрики ds^2 .

1.4. Геодезические кривые

Прежде всего представим метрику $ds^2(t)$ в конформном виде для $q \in I_1$. Для этого на интервале I_1 рассмотрим новую меру $d\zeta$ с плотностью $\sigma(q, t) = 1/\sqrt{u'^2(t)G(q, t)}$ для каждого фиксированного момента времени и перепишем $ds^2(t)$ как

$$ds^2(t) = F(\zeta, t) (d\zeta^2 + d\phi^2), \quad (12)$$

где $F(\zeta, t) = \overline{u'^2(t)G(q, t)}$. Для $q \in I_i$, $i = 2, 3$, эта метрика принимает вид

$$ds^2(t) = F(\zeta, t) (d\zeta^2 - d\phi^2). \quad (13)$$

Здесь $d\zeta = \sqrt{u'^2(t)G(q, t)}dq$. Уравнения геодезических кривых на поверхности $M_{I_1}^t$ для метрики (12) записываются в виде

$$\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \frac{F_\zeta}{2F} \left[\left(\frac{d\zeta}{d\theta} \right)^2 - \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right)^2 \right] = 0, \quad \frac{d^2\phi}{d\theta^2} + \frac{F_\zeta}{F} \frac{d\zeta}{d\theta} \frac{d\phi}{d\theta} = 0. \quad (14)$$

Для метрики (13), заданной на M_i^t , $i = 2, 3$, имеем

$$\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \frac{F_\zeta}{2F} \left[\left(\frac{d\zeta}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right)^2 \right] = 0, \quad \frac{d^2\phi}{d\theta^2} + \frac{F_\zeta}{F} \frac{d\zeta}{d\theta} \frac{d\phi}{d\theta} = 0. \quad (15)$$

Используем координаты (ζ, θ) для каждой карты многообразия M^t . Интегрируемость этих систем уравнений устанавливается стандартным образом. Системы уравнений (14) и (15) допускают следующие первые интегралы:

$$F(\zeta, t)\phi_\theta = \mathbf{M}, \quad F(\zeta, t)(\zeta_\theta^2 + \phi_\theta^2) = \mathbf{N}$$

и

$$-F(\zeta, t)\phi_\theta = \mathbf{M}, \quad F(\zeta, t)(\zeta_\theta^2 - \phi_\theta^2) = -\mathbf{N}$$

соответственно, где \mathbf{M} и \mathbf{N} , вообще говоря, зависят от времени t . Можно считать, что $\mathbf{N} = 1$, если выберем θ как натуральный параметр геодезической кривой. Рассмотрим $\mathbf{M} = F(\zeta, t)\phi_\theta[d\zeta, d\phi]$ — так называемый вектор момента, принадлежащий кокасательному векторному пространству однопараметрической группы (изометрий) движений \mathbf{g}_τ . Скобки $[\cdot, \cdot]$ означают векторное произведение относительно метрики $d\zeta^2 \pm d\phi^2$. Равенство $\pm F(\zeta, t_c)\phi_\theta \equiv \mathbf{M} = \text{const}$ означает, что вектор \mathbf{M} является инвариантным, т. е. $d\mathbf{M}/d\theta = 0$ для каждого фиксированного времени t . На плоскости $(d\zeta, d\phi)$ вектор \mathbf{M} вычисляется по формуле $\mathbf{M} = [\mathbf{p}, \mathbf{p}]_{d\tau^2}$, $\mathbf{p}(\theta, t) = (\zeta(\theta, t), \phi(\theta, t))$. Без потери общности (в силу инвариантности $ds^2(t)$ относительно действия группы \mathbf{g}_τ) имеем $\mathbf{p}(\theta, t) = F^{1/2}(\zeta, t)d\zeta$ и $d\mathbf{p}/d\theta = (F^{1/2})_\theta d\zeta + F^{1/2}d\zeta_\theta = (F^{1/2})_\theta d\zeta + F^{1/2}\phi_\theta d\phi$. Следовательно,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}, (F^{1/2})_\theta d\zeta] + [\mathbf{p}, F^{1/2}\phi_\theta d\phi] = F\phi_\theta[d\zeta, d\phi],$$

где выражение в первой скобке равно нулю, а длина вектора $[d\zeta, d\phi]_{d\tau^2}$ равна 1 (−1) для сигнатуры $(++)$ ($(+-)$). При использовании первых интегралов или дифференциальных связей, совместных с (14), (15), редукция (14) на инвариантных многообразиях, определяемых этими связями, ведёт к уравнениям

$$\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \frac{F_\zeta}{2F} \left(\frac{\pm\mathbf{N} \mp 2\mathbf{M}^2 F^{-1}}{F} \right) = 0,$$

где верхний знак \pm , \mp соответствует сигнатуре $(++)$, нижний — сигнатуре $(+-)$. Второе уравнение системы (14), (15) удовлетворяется тождественно на множестве $\pm F(\zeta, t)\phi_\theta = \mathbf{M}$. Как результат, получаем

$$\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} = -\frac{dV}{d\zeta}, \quad \text{где } V = \mp \frac{\mathbf{N}}{2F(\zeta, t)} \pm \frac{\mathbf{M}^2}{2F^2(\zeta, t)} + \text{const}. \quad (16)$$

Уравнение (16) совпадает с уравнением движения материальной точки единичной массы в потенциальном поле с эффективной потенциальной энергией V (используется терминология ньютоновской механики). Тогда лагранжиан $\mathbf{S}_{M_i^t}$ и “полная механическая” энергия $E_{M_i^t}$ записываются в виде

$$\mathbf{S}_{M_i^t} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\zeta}{d\theta} \right)^2 - V, \quad E_{M_i^t} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\zeta}{d\theta} \right)^2 + V,$$

где $E_{M_{I_i}^t}$ является инвариантной величиной на решениях уравнения (16) при каждом фиксированном значении t . Таким образом, пара $(M_{I_i}^t, ds^2(t))$ порождает лагранжеву систему с одной степенью свободы. Отсюда

$$d\theta = \frac{d\zeta}{\sqrt{2(E_{M_{I_i}^t} - V)}}, \quad d\phi = \pm \frac{\mathbf{M}d\theta}{F(\zeta, t)}. \quad (17)$$

Исключая величину $d\theta$, получаем следующее уравнение для $\zeta = \zeta(\phi)$:

$$\frac{d\zeta}{d\phi} = \frac{F(\zeta, t_c)}{\pm \mathbf{M}} \sqrt{2(E_{M_{I_i}^t} - V)}.$$

Геометрически параметр θ является длиной дуги неизотропной геодезической кривой. Таким образом, при изменении этой длины “полная механическая” энергия и вектор момента сохраняются вдоль геодезических кривых. Угол α между вектором

$$\boldsymbol{\xi}(p) = \left. \frac{d\mathbf{g}_\tau(p)}{d\tau} \right|_{\tau=0}$$

и вектором скорости $\mathbf{v}_\gamma = (\zeta_\theta, \phi_\theta)$ геодезической кривой γ составляет величину, равную

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{v}_\gamma, \boldsymbol{\xi}(p) \rangle_{ds^2}}{\sqrt{|\langle \mathbf{v}_\gamma, \mathbf{v}_\gamma \rangle_{ds^2} \langle \boldsymbol{\xi}(p), \boldsymbol{\xi}(p) \rangle_{ds^2}|}} = \frac{\phi_\theta F}{\sqrt{|F(\zeta_\theta^2 \pm \phi_\theta^2)|}} = \frac{\pm \mathbf{M}}{\sqrt{|\pm \mathbf{N}F|}},$$

или

$$\sqrt{F} \cos \alpha = \pm \mathbf{M} / \sqrt{|\pm \mathbf{N}|}.$$

Равенство $\cos \alpha = 0$ соответствует движению вдоль орбиты \mathbf{O}_p , где $\boldsymbol{\xi}^2(\mathbf{g}_\tau(p)) = \text{const}$ ($F \equiv \text{const}$). Орбита представляет собой незамкнутую кривую в случае $(M_{I_i}^t, ds^2(t))$ для $i = 2, 3$. Нулевое значение длины вектора $|\boldsymbol{\xi}^2(\mathbf{g}_\tau(p))|$ означает, что орбита \mathbf{O}_p принадлежит изотропной кривой ($ds^2(t) = 0$), которая задаётся в виде $\phi = \zeta - \zeta_0$ (или $\phi = -(\zeta - \zeta_0)$). Эта кривая совпадает с псевдоокружностью нулевого радиуса. Натуральный параметр θ (длина дуги изотропной кривой) определяется формулой

$$\theta = \int_{\zeta_0}^{\zeta} F(\zeta, t) d\zeta, \quad \text{или для переменной } q \quad \theta = \int_{q_0}^q \sqrt{u'^2(t) |G(q, t)|} dq, \quad (18)$$

где $(\zeta_0, 0)$ — координата соответствующего полюса для $M_{I_3}^{t_c}$ ($M_{I_2}^t$). Существование замкнутых геодезических кривых зависит от вида потенциала V .

Замечание 2. Полученные выше законы сохранения являются следствием инвариантности турбулентного потока относительно групп вращений и переноса. Например, сохранение величины $F(\zeta, t)(\zeta_\theta^2 \pm \phi_\theta^2)$ означает, что вдоль геодезических кривых длина касательного вектора не изменится. Совместно с длиной вектора момента \mathbf{M} эти законы представляют собой “новые” законы сохранения, возникающие в однородной изотропной турбулентности.

2. Бесконечномерные алгебры Ли, порождённые метрикой ds^2

В данном разделе рассмотрим функционал простого действия (длины), порождённый двухточечным корреляционным тензором, и изучим инфинитезимальные преобразования, допускаемые данным функционалом. Особенность вычисления этих функционалов состоит в том, что они ищутся в классе преобразований эквивалентности, сохраняющих длину касательного вектора $F(\zeta, t)(\zeta_\theta^2 \pm \phi_\theta^2)$ вдоль геодезических кривых с фиксированными концами.

2.1. Преобразования эквивалентности

Вместо полярной системы координат (ρ, ϕ) рассмотрим

$$\xi = e^\zeta \cos \phi, \quad \eta = e^\zeta \sin \phi.$$

Тогда

$$ds^2 = \Lambda^2(\rho, t)(d\xi^2 + d\eta^2)$$

и

$$ds^2 = \Lambda^2(\rho, t)(d\xi^2 - d\eta^2), \quad \Lambda^2(\rho, t) \equiv F(\zeta, t)$$

для $\xi = e^\zeta \cosh \phi$, $\eta = e^\zeta \sinh \phi$.

Рассмотрим далее множество кусочно-гладких кривых $\Omega(M_{I_i}^t, v, w): \gamma_{I_i} : J \rightarrow M_{I_i}^t$ с фиксированными концами $\gamma_{I_i}(0) = v_i$ и $\gamma_{I_i}(1) = w_i$. Через $L_{\gamma_{I_i}}^t : \Omega(M_{I_i}^t, v_i, w_i) \rightarrow R$ обозначим функционал простого действия (длины). Тогда формула

$$d_{I_i}^t(v, w) = \min_{\gamma_{I_i} \in \Omega(M_{I_i}^t, v_i, w_i)} L_{\gamma_{I_i}}^t(\gamma), \quad L_{\gamma_{I_i}}^t = \int_{\gamma_{I_i}} \sqrt{\Lambda^2(\rho, t)(\xi_\tau^2 + \eta_\tau^2)} d\tau$$

определяет функцию расстояния $d_{I_i}^t : M_{I_i}^t \times M_{I_i}^t \rightarrow R$. Пусть τ — натуральный параметр, т. е.

$$\Lambda^2(\rho, t)(\xi_\tau^2 \pm \eta_\tau^2) = 1 \quad \text{вдоль кривой } \gamma_{I_i}. \quad (19)$$

Следовательно,

$$L_{\gamma_{I_i}}^t = \int_{\gamma_{I_i}} 1 \cdot d\tau = \tau_{\gamma_{I_i}},$$

где $\tau_{\gamma_{I_i}}$ означает длину кривой γ_{I_i} .

Обозначим через $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\xi, \eta)$ локальную реализацию $M_{I_i}^t$ в карте (ξ, η) . Рассмотрим инфинитезимальное преобразование переменных ξ и η

$$\xi^* = \xi + \delta\xi, \quad \eta^* = \eta + \delta\eta, \quad (20)$$

предполагая, что \mathbf{r}_i является дифференцируемой вектор-функцией. Тогда

$$\mathbf{r}_i(\xi^*, \eta^*) = \mathbf{r}_i(\xi, \eta) + \mathbf{X}\delta\xi + \mathbf{Y}\delta\eta, \quad (21)$$

или

$$\mathbf{r}_i^*(\xi, \eta) = \mathbf{r}_i(\xi, \eta) + \mathbf{U}(\xi, \eta), \quad (22)$$

где $\mathbf{U}(\xi, \eta)$ — вектор деформации поверхности с радиус-вектором $\mathbf{r}_i(\xi, \eta)$. Можно считать, что $\mathbf{r}_i^*(\xi, \eta)$ является радиус-вектором деформированной поверхности, а γ_{I_i} преобразовывается в кривую $\gamma_{I_i}^*$, которая принадлежит тому же классу функций, что и γ_{I_i} . Для изучения инвариантности $d_{I_i}^t$ относительно действия инфинитезимальных преобразований достаточно доказать, что длина экстремалей функционала является инвариантной величиной. Вместо единичного касательного вектора (ξ, η) рассмотрим единичный касательный ковектор (τ_ξ, τ_η) , который определяется формулой (индекс γ_{I_i} для τ будем опускать)

$$\xi_\tau = \frac{\tau_\xi}{\Lambda^2}, \quad \eta_\tau = \frac{\tau_\eta}{\Lambda^2}.$$

Тогда (19) преобразуется в уравнения

$$\tau_\xi^2 + \tau_\eta^2 = \Lambda^2(\rho, t), \quad \tau_\xi^2 - \tau_\eta^2 = \Lambda^2(\rho, t), \quad (23)$$

первое из которых — уравнение эйконала, тогда как второе называется релятивистским уравнением эйконала для сигнатуры $(+-)$ метрики ds^2 . Таким образом, чтобы вычислить симметрии функционала $L_{\gamma_{I_i}}^t$, найдем группы преобразований, допускаемые уравнением (23) такие, что τ является инвариантом группы преобразований (23). Переформулировка вариационных симметрий в терминах группы преобразований уравнений (23) позволяет расширить класс симметрий, допускаемых функционалом $L_{\gamma_{I_i}}^t$. Более точно, рассмотрим преобразования эквивалентности уравнений (23). Под (обобщённым) преобразованием эквивалентности заданного дифференциального уравнения понимается замена всех входящих в него переменных (как зависимых и независимых переменных, так и произвольных функций и параметров), сохраняющая вид уравнения [10, 11]. Преобразование эквивалентности уравнения (23) — это точечное преобразование, заданное на пространстве переменных (ξ, η, u^1, u^2) , где $u^1 = \tau$, $u^2 = \Lambda^2$, определяемое инфинитезимальным оператором

$$Y = \mu(\xi, \eta, u^1, u^2) \frac{\partial}{\partial \xi} + \nu(\xi, \eta, u^1, u^2) \frac{\partial}{\partial \eta} + \lambda^i(\xi, \eta, u^1, u^2) \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad (24)$$

где координаты оператора определяются из уравнения

$$Y_1|_{(23)} = 0. \quad (25)$$

Здесь Y_1 означает первое продолжение оператора Y на дифференциальные переменные (23). В случае сигнатуры $(++)$ метрики ds^2 , т. е. уравнения эйконала, координаты оператора Y вычислены в [10]. Для релятивистского уравнения эйконала (сигнатура $(+-)$) результаты вычислений представлены в приложении к настоящей работе. Как результат, инфинитезимальный оператор Y имеет вид

$$Y = \Phi(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} + \Psi(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} + \gamma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} + 2 \left(\frac{d\gamma}{d\tau} - \Phi_\xi(\xi, \eta) \right) \Lambda^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda^2},$$

который порождает бесконечномерную алгебру Ли, подалгебра которой определяется оператором

$$X = \Phi(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} + \Psi(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} - 2\Phi_\xi(\xi, \eta) \Lambda^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda^2}, \quad (26)$$

и τ есть скалярный инвариант X . Таким образом, X является оператором симметрии, допускаемым функционалом $L_{\gamma_{I_i}}^t$. Функции $\Phi(\xi, \eta)$ и $\Psi(\xi, \eta)$ удовлетворяют условиям

Коши—Римана в случае уравнения эйконала, т.е. $\Phi_\xi = \Psi_\eta$ и $\Phi_\eta = -\Psi_\xi$, и условиям h -аналитичности [12]: $\Phi_\xi = \Psi_\eta$, $\Phi_\eta = \Psi_\xi$, для релятивистского уравнения эйконала. Построим базисные операторы подалгебры Ли инфинитезимального оператора X сначала в случае сигнатуры $(++)$. Введем комплексные координаты для каждой карты: $z = \xi + i\eta$ и $\bar{z} = \xi - i\eta$. Тогда

$$ds^2 = \Lambda^2(z\bar{z})dzd\bar{z},$$

или более точно

$$ds^2 = \frac{\Lambda^2(z\bar{z})}{2} (dz \otimes d\bar{z} + d\bar{z} \otimes dz).$$

Оператор X переписывается как

$$X_1 = F(z)\frac{d}{dz} + \bar{F}(\bar{z})\frac{d}{d\bar{z}} - F_z(z)\Lambda^2(z\bar{z})\frac{d}{\partial\Lambda^2} - \bar{F}_{\bar{z}}(\bar{z})\Lambda^2(z\bar{z})\frac{d}{\partial\Lambda^2},$$

где $F = \Phi + i\Psi$, $\bar{F} = \Phi - i\Psi$, а $F(z, \bar{z}) \equiv F(z)$, $\bar{F}(z, \bar{z}) \equiv \bar{F}(\bar{z})$ для аналитической функции F . Векторы касательного пространства определяются формулами

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial\xi} - i \frac{\partial}{\partial\eta} \right), \\ \frac{d}{d\bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial\xi} + i \frac{\partial}{\partial\eta} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим инфинитезимальные аналитические преобразования переменных z и \bar{z}

$$z^* = z + \epsilon(z) = z + F(z)\delta s, \quad \bar{z}^* = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}) = \bar{z} + \bar{F}(\bar{z})\delta s, \quad (27)$$

которые порождаются векторным полем

$$\left(F(z)\frac{d}{dz}, \bar{F}(\bar{z})\frac{d}{d\bar{z}} \right).$$

Выполним разложения в ряд Лорана $\epsilon(z)$, $\bar{\epsilon}(\bar{z})$

$$\epsilon(z) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n z^{n+1}, \quad \bar{\epsilon}(\bar{z}) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\epsilon}_n \bar{z}^{n+1}.$$

Здесь ϵ_n ($\bar{\epsilon}_n$) — бесконечно малые числа. Мы можем рассматривать $\epsilon_n z^{n+1}$, $\bar{\epsilon}_n \bar{z}^{n+1}$ как гармоники разложения $\zeta(z)$, $\bar{\zeta}(\bar{z})$ относительно базисных функций $\{z^{n+1}\}$ ($\{\bar{z}^{n+1}\}$). Каждая гармоника порождает преобразование $z \rightarrow z' \equiv z - \epsilon_n z^{n+1}$, $\bar{z} \rightarrow \bar{z}' \equiv \bar{z} - \bar{\epsilon}_n \bar{z}^{n+1}$, и соответствующие инфинитезимальные операторы имеют вид

$$l_n = -z^{n+1} \frac{d}{dz}, \quad \bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1} \frac{d}{d\bar{z}},$$

где ϵ_n , $\bar{\epsilon}_n$ — параметры преобразований, а $\{l_n, \bar{l}_n\}$ — базис бесконечномерной конформной алгебры Ли (две копии алгебры Витта)

$$Z = F(z)\frac{d}{dz} + \bar{F}(\bar{z})\frac{d}{d\bar{z}}.$$

Таким образом, базис алгебры Ли, порождённый оператором X ,

$$X = F(z) \frac{d}{dz} + \bar{F}(\bar{z}) \frac{d}{d\bar{z}} - F_z(z) \Lambda^2(z\bar{z}) \frac{d}{d\Lambda^2} - \bar{F}_{\bar{z}}(\bar{z}) \Lambda^2(z\bar{z}) \frac{d}{d\Lambda^2},$$

образован элементами $\{k_n, \bar{k}_n\}$, $n \in Z$,

$$k_n = -z^{n+1} \frac{d}{dz} - (n+1)z^n \Lambda^2 \frac{d}{d\Lambda^2}, \quad \bar{k}_n = -\bar{z}^{n+1} \frac{d}{d\bar{z}} - (n+1)\bar{z}^n \Lambda^2 \frac{d}{d\Lambda^2}.$$

Функция Λ^2 при замене переменных $z \mapsto z^*$ и $\bar{z} \mapsto \bar{z}^*$ преобразуется как

$$\Lambda^{2*} = \frac{\Lambda^2}{z_z^*}, \quad \Lambda^{2**} = \frac{\Lambda^{2*}}{\bar{z}_{\bar{z}}^*}. \quad (28)$$

Рассмотрим теперь инфинитезимальный оператор в случае сигнатуры $(+-)$ метрики ds^2 . Имеем следующее соотношение для координат оператора X :

$$\Phi_\xi = \Psi_\eta, \quad \Phi_\eta = \Psi_\xi.$$

Запишем соответствующее преобразование

$$\xi^* = u(\xi, \eta), \quad \eta^* = v(\xi, \eta), \quad (29)$$

где $u_\xi = v_\eta$, $u_\eta = v_\xi$, которое порождает группу Ли конформных диффеоморфизмов, сохраняющих ориентацию в пространстве Минковского $R_{1,1}^2$ (см., например, [13]). Эта группа с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах состоит из четырёх компонент. Каждая компонента гомеоморфна $\text{Diff}_+(R) \times \text{Diff}_+(R)$, где $\text{Diff}_+(R)$ означает группу диффеоморфизмов $\mathbf{F} : R \mapsto R$, сохраняющих ориентацию с топологией равномерной сходимости \mathbf{F} и всех её производных на компактных подмножествах $K \subset R$. Плоскость Минковского $R_{1,1}^2$ может быть отождествлена с $S^{1,1} = S^1 \times S^1$, где S^1 — окружность. Конформная группа $\text{Conf}(R_{1,1}^2)$ определяется как связная компонента единицы группы конформных диффеоморфизмов $S^{1,1} \mapsto S^{1,1}$ и изоморфна $\text{Diff}_+(S^1) \times \text{Diff}_+(S^1)$; $\text{Diff}_+(S^1)$ является группой Ли, определённой в пространстве Фреше гладких функций $\mathbf{F} : S^1 \mapsto R$ с топологией равномерной сходимости на S^1 функций \mathbf{F} и их производных. Соответствующая алгебра $\text{Lie}(\text{Diff}_+(S^1))$ является алгеброй Ли гладких векторных полей $\text{Vect}(S^1)$ (см., например, [13]). Ассоциированная с ней конечная подгруппа $\text{Conf}(S^{1,1})$ — это группа Ли $\text{SO}(2, 2)/\{\pm 1\} \subset \text{Conf}(S^{1,1})$, которая порождается преобразованиями Лоренца.

Рассмотрим пространство $C^\infty(S^1)$, т.е. пространство $C_{2\pi}^\infty(R)$ всех гладких 2π -периодических функций. Векторное поле $Y \in \text{Vect}(S^1)$ может быть записано в виде $Y = y(\theta)\partial/\partial\theta$, где $y(\theta) \in C_{2\pi}^\infty(R)$, а точка z окружности S^1 представлена как $z = e^{i\theta}$. Разложение $y(\theta)$ в ряд Фурье

$$y(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

позволяет представить базис пространства $\text{Vect}(S^1)$ в виде

$$\frac{d}{d\theta}, \quad \cos(n\theta) \frac{d}{d\theta}, \quad \sin(n\theta) \frac{d}{d\theta}.$$

Рассмотрим далее комплексификацию $\text{Vect}(S^1)$, т. е.

$$\text{Vect}^C(S^1) = \text{Vect}(S^1) \otimes C,$$

и полиномиальные векторные поля на S^1 . Определим векторные поля

$$\hat{l}_n = -z^{n+1} \frac{d}{dz} = iz^n \frac{d}{d\theta} = ie^{in\theta} \frac{d}{d\theta} \in \text{Vect}^C(S^1).$$

Тогда линейная оболочка \hat{l}_n над полем комплексных чисел C вновь порождает алгебру Витта. Алгебра Витта W является подалгеброй комплексифицированной алгебры Ли $\text{Vect}^C(S^1) \times \text{Vect}^C(S^1)$ (подробнее см. [13]). Как и в случае сигнатуры $(++)$, мы можем определить инфинитезимальные операторы

$$\hat{k}_n = \hat{l}_n - (n+1)z^n \Lambda^2 \frac{d}{d\Lambda^2}$$

с тем же правилом преобразования Λ^2 .

2.2. Алгебра \mathbf{W}

Линейную оболочку прямой суммы $k_n \oplus \bar{k}_n$ над полем комплексных чисел C обозначим через \mathbf{W} . Непосредственные вычисления дают следующие коммутационные соотношения:

$$[k_n, k_m] = (n-m)k_{n+m}, \quad [\bar{k}_n, \bar{k}_m] = (n-m)\bar{k}_{n+m}, \quad [k_n, \bar{k}_m] = 0.$$

Последнее равенство следует из формул

$$\frac{d}{d\bar{z}} z^n = 0, \quad \frac{d}{dz} \bar{z}^n = 0.$$

Алгебра \mathbf{W} изоморфна прямой сумме алгебр Витта W . Этот изоморфизм может быть определён на базисных элементах $\{k_n \oplus \bar{k}_n\}$ как проекция P на $\{l_n \oplus \bar{l}_n\}$, а коммутатору $[k_n, k_m]$ соответствует коммутатор $[l_n, l_m]$ с сохранением формул $P([k_n, k_m]) = (n-m)l_{n+m}$, $P([\bar{k}_n, \bar{k}_m]) = (n-m)\bar{l}_{n+m}$. Базисные элементы $\{k_0, k_{\pm 1}\}$ порождают подалгебру в \mathbf{W} , и её проекция на $\{l_0, l_{\pm 1}\}$ изоморфна $sl(2, C)$. Соответствующие преобразования переменных z и \bar{z} , порождённые алгеброй \mathbf{W} , являются бесконечномерной псевдогруппой Ли $\mathbf{G} = \Gamma \otimes \bar{\Gamma}$, где Γ и $\bar{\Gamma}$ — инфинитезимальные преобразования (27). Конформную группу преобразований $\varphi : z \mapsto z^*$ обозначим через Mb , она состоит из мёбиусовых преобразований φ [13]

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, C)/\{\pm 1\} \quad \text{таких, что } \varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad cz + d \neq 0. \quad (30)$$

Для преобразований $\bar{z} \mapsto \bar{z}^*$ соответствующую конформную группу будем обозначать через $\overline{\text{Mb}}$.

Рассмотрим функционал действия траектории (пути) γ_{I_i}

$$E_{\gamma_{I_i}}^t = \int_{\gamma_{I_i}} \Lambda^2(\rho, t) (\xi_\tau^2 + \eta_\tau^2) d\tau,$$

который перепишем в виде

$$E_{\gamma_{I_i}}^t = \int_{\gamma_{I_i}} \Lambda^{-2}(\rho, t) (\tau_\xi^2 \pm \tau_\eta^2) d\tau, \quad \tau_\xi^2 \pm \tau_\eta^2 = \Lambda^2(\rho, t). \quad (31)$$

Отметим, что экстремали этого функционала являются геодезическими кривыми и длина геодезической γ_{I_i} совпадает с $\tau_{\gamma_{I_i}}$ для соответствующего индекса кривой γ_{I_i} . Функционал $E_{\gamma_{I_i}}^t$ допускает ту же бесконечномерную алгебру Ли \mathbf{W} и соответствующие инфинитезимальные преобразования совпадают с \mathbf{G}_{++} для сигнатуры $(++)$ и с бесконечномерной группой Ли \mathbf{G}_{+-} , которая изоморфна $\text{Diff}(S^1) \times \text{Diff}(S^1)$. Напомним, что классический тензор энергии-импульса определяется формулой

$$T_{ik} = g_{kl} f_{x^i}^\alpha \frac{\partial L}{\partial f_{x^k}^\alpha} - g_{ik} L, \quad (32)$$

где лагранжиан $L = L(f^j, f_{x^k}^i)$ явно не зависит от x^k . Для функционала (31) со скалярным полем τ этот тензор имеет компоненты

$$T_{11} = 2\tau_\xi^2 - \Lambda^2 \cdot 1, \quad T_{22} = 2\tau_\eta^2 - \Lambda^2 \cdot 1, \quad T_{12} = T_{21} = 2\tau_\xi \tau_\eta. \quad (33)$$

Тензор T_{ik} имеет нулевой след ввиду равенства $T_{11} \pm T_{22} = 2(\tau_\eta^2 \pm \tau_\xi^2 - \Lambda^2) = 0$. Введём обозначения: $\omega = (\xi, \eta)$ и $\delta\omega = (\delta\xi, \delta\eta)$. Тогда ток определяется формулой $j_\mu = T_{\mu\nu} \delta\omega^\nu$ и имеет нулевую дивергенцию, т.е. $\partial \cdot j = (1/2) T_\mu^\mu (\partial \cdot \delta\omega) = 0$, так как T_{ik} “бесследовый” тензор. Бесконечномерная псевдогруппа Ли \mathbf{G}_{++} порождает бесконечное число законов сохранения для токов j_μ , тогда как конформная группа порождает конечное число сохраняющихся величин j_μ . Запишем функционал (31) для $M_{I_1}^t$ в комплексных переменных:

$$E_{\gamma_{I_1}}^t = 4 \int_{\gamma_{I_1}} \Lambda^{-2}(z\bar{z}, t) \partial_z \tau(z, \bar{z}) \cdot \partial_{\bar{z}} \tau(z, \bar{z}) d\tau. \quad (34)$$

Поскольку T_{ik} имеет нулевой след, то получаем $T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0$, что ведёт к равенствам $\partial_{\bar{z}} T_{zz} = \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0$. Таким образом, существуют только две ненулевые компоненты тензора момента-импульса: $T(z) = T_{zz}(z) = 1/4(T_{11} - 2iT_{12} - T_{22})$ и $\bar{T}(\bar{z}) = T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) = 1/4(T_{11} + 2iT_{12} - T_{22})$. Кроме того, $T_{zz} = (\partial_z \tau)^2$ и $T_{\bar{z}\bar{z}} = (\partial_{\bar{z}} \tau)^2$. Сохраняющиеся токи $j_\mu = T_{\mu\nu} \delta\omega^\nu$ переписываются в виде $j_z = T_{zz} \epsilon(z)$ и $j_{\bar{z}} = T_{\bar{z}\bar{z}} \bar{\epsilon}(\bar{z})$. Следовательно, $\partial_z j_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} j_z = 0$. Разложение $\epsilon(z)$ и $\bar{\epsilon}(\bar{z})$ в ряды Лорана

$$\epsilon(z) = \sum_n \epsilon_n z^{n+1}, \quad \bar{\epsilon}(\bar{z}) = \sum_n \bar{\epsilon}_n \bar{z}^{n+1}$$

даёт явное представление для токов $j_z^n = T_{zz} \epsilon_n z^{n+1}$ и $j_{\bar{z}}^n = T_{\bar{z}\bar{z}} \bar{\epsilon}_n \bar{z}^{n+1}$. В соответствии с методологией конформной теории поля рассмотрим следующие конструкции: $T(z)$ и $\bar{T}(\bar{z})$ являются аналитическими функциями. Тогда, раскладывая в ряд Лорана

$$T(z) = \sum_n L_n z^{-n-2}, \quad \bar{T}(\bar{z}) = \sum_n \bar{L}_n \bar{z}^{-n-2}, \quad (35)$$

где степень $(-n-2)$ выбрана так, что масштабные преобразования $z \mapsto \lambda^{-1}z$, $T(z) \mapsto \lambda^2 T(\lambda^{-1}z)$ ведут к калибровке $L_{-n} \mapsto \lambda^n L_{-n}$ и $\bar{L}_{-n} \mapsto \bar{\lambda}^n \bar{L}_{-n}$, и обращая выражения в (35), получим следующие представления:

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \int T(z) z^{n+1} dz, \quad \bar{L}_n = \frac{1}{2\pi i} \int \bar{T}(\bar{z}) \bar{z}^{n+1} d\bar{z}.$$

Данные формулы позволяют определить конформные заряды Q_ϵ , $Q_{\bar{\epsilon}}$ согласно представлениям

$$Q_\epsilon = \sum_n \epsilon_n L_n, \quad Q_{\bar{\epsilon}} = \sum_n \bar{\epsilon}_n \bar{L}_n.$$

Ввиду независимости интегралов от контура интегрирования получаем сохраняющиеся величины L_n и \bar{L}_n .

Найдём операторы инвариантного дифференцирования, при этом используем символы $++$ и $+-$, которые соответствуют рассмотрению \mathbf{G}_{++} и \mathbf{G}_{+-} . В переменных ξ и η операторы инвариантного дифференцирования определяются как [14]

$$S_{++}^i = \boldsymbol{\lambda}^i \cdot (D_\xi + D_\eta), \quad S_{+-}^i = \boldsymbol{\mu}^i \cdot (D_\xi + D_\eta), \quad D = D_\xi + D_\eta, \quad i = 1, 2,$$

где векторы $\boldsymbol{\lambda}^i$ и $\boldsymbol{\mu}^i$ вычисляются исходя из уравнений

$$J^{++}(\boldsymbol{\lambda}^i) = \mathbf{c}^i, \quad J^{+-}(\boldsymbol{\mu}^i) = \mathbf{c}^i, \quad \mathbf{c}^i \in R^3,$$

а векторы \mathbf{c}^1 есть $\mathbf{c}^1 = (0, 1, 0)$ и $\mathbf{c}^2 = (0, 1, 1)$ соответственно; J^{++} и J^{+-} находятся как решения уравнений

$$[X_1^{++} + (\boldsymbol{\lambda}^i \cdot D)\boldsymbol{\chi} \cdot \partial_\lambda] J^{++} = 0, \quad (36)$$

$$[X_1^{+-} + (\boldsymbol{\mu}^i \cdot D)\boldsymbol{\chi} \cdot \partial_\mu] J^{+-} = 0, \quad (37)$$

где $\partial_\lambda = \lambda_1 \partial / \partial \lambda_1 + \lambda_2 \partial / \partial \lambda_2$, $\partial_\mu = \mu_1 \partial / \partial \mu_1 + \mu_2 \partial / \partial \mu_2$. Здесь $\boldsymbol{\chi} = (\Phi, \Psi, 0)$, X_1^{++} и X_1^{+-} означают первое продолжение оператора X для сигнатур $(++)$ и $(+-)$ соответственно:

$$\begin{aligned} X_1^{++} &= \Phi \frac{\partial}{\partial \xi} + \Psi \frac{\partial}{\partial \eta} - \Phi_\xi \left(2\Lambda^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda^2} + \tau_\xi \frac{\partial}{\partial \tau_\xi} + \tau_\eta \frac{\partial}{\partial \tau_\eta} + 3\Lambda_\xi^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda_\xi^2} + 3\Lambda_\eta^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda_\eta^2} \right) - \\ &- \Psi_\xi \left(\tau_\eta \frac{\partial}{\partial \tau_\xi} - \tau_\xi \frac{\partial}{\partial \tau_\eta} + \Lambda_\eta^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda_\xi^2} - \Lambda_\xi^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda_\eta^2} \right) - 2\Phi_{\xi\xi} \Lambda^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda_\xi^2} - 2\Phi_{\xi\eta} \Lambda^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda_\eta^2}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} X_1^{+-} &= \Phi \frac{\partial}{\partial \xi} + \Psi \frac{\partial}{\partial \eta} - \Phi_\xi \left(2\Lambda^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda^2} + \tau_\xi \frac{\partial}{\partial \tau_\xi} + \tau_\eta \frac{\partial}{\partial \tau_\eta} + 3\Lambda_\xi^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda_\xi^2} + 3\Lambda_\eta^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda_\eta^2} \right) - \\ &- \Psi_\xi \left(\tau_\eta \frac{\partial}{\partial \tau_\xi} + \tau_\xi \frac{\partial}{\partial \tau_\eta} + \Lambda_\eta^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda_\xi^2} - \Lambda_\xi^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda_\eta^2} \right) - 2\Phi_{\xi\xi} \Lambda^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda_\xi^2} - 2\Phi_{\xi\eta} \Lambda^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda_\eta^2} \end{aligned}$$

при записи которых использовались условия Коши—Римана $\Phi_\xi = \Psi_\eta$, $\Phi_\eta = -\Psi_\xi$ для оператора X_1^{++} и условия h -аналитичности $\Phi_\xi = \Psi_\eta$, $\Phi_\eta = \Psi_\xi$ в случае оператора X_1^{+-} . Уравнение (36) имеет функционально независимые решения

$$J_1^{++} = \Lambda^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2), \quad J_2^{++} = \lambda_1 \tau_\eta - \lambda_2 \tau_\xi,$$

где векторы $\boldsymbol{\lambda}^i$ имеют вид

$$\boldsymbol{\lambda}^1 = \left(\frac{\tau_\xi}{\Lambda^2}, \frac{\tau_\eta}{\Lambda^2}, 0 \right), \quad \boldsymbol{\lambda}^2 = \left(\frac{\tau_\eta}{\Lambda^2}, -\frac{\tau_\xi}{\Lambda^2}, 0 \right).$$

Для уравнения (37) получаем

$$J_1^{+-} = \Lambda^2(\mu_1^2 - \mu_2^2), \quad J_2^{+-} = \mu_1\tau_\eta + \mu_2\tau_\xi,$$

где векторы μ^i

$$\mu^1 = \left(\frac{\tau_\xi}{\Lambda^2}, -\frac{\tau_\eta}{\Lambda^2}, 0 \right), \quad \mu^2 = \left(-\frac{\tau_\eta}{\Lambda^2}, \frac{\tau_\xi}{\Lambda^2}, 0 \right).$$

Прокомментируем полученные соотношения. Для этого рассмотрим нетривиальные решения уравнения

$$J_1^{+-}(\mu^1) \equiv \Lambda^2(\mu_1^2 - \mu_2^2) = 1 \quad (\text{вторая компонента вектора } \mathbf{c}^1). \quad (38)$$

Подставляя вектор μ^1 в (38), имеем

$$\tau_\xi^2 - \tau_\eta^2 = \Lambda^2.$$

Следовательно, уравнение (38) удовлетворяется тождественно. Для функции $J_2^{+-}(\mu^2)$ и вектора μ^2 вычисления аналогичны.

В результате получаем следующие операторы инвариантного дифференцирования:

$$S_1^{++} = \frac{1}{\Lambda^2}(\tau_\xi D_\xi + \tau_\eta D_\eta), \quad S_2^{++} = \frac{1}{\Lambda^2}(\tau_\eta D_\xi - \tau_\xi D_\eta), \quad (39)$$

$$S_1^{+-} = \frac{1}{\Lambda^2}(\tau_\xi D_\xi - \tau_\eta D_\eta), \quad S_2^{+-} = \frac{1}{\Lambda^2}(-\tau_\eta D_\xi + \tau_\xi D_\eta), \quad (40)$$

где $S_2^{++} = -S_2^{+-}$.

Скалярные инварианты первого порядка для \mathbf{G}_{++} и \mathbf{G}_{+-} определяются исходя из уравнений

$$X_1^{++}I^{++} = 0, \quad X_1^{+-}I^{+-} = 0,$$

функционально независимые решения которых легко находятся:

$$I_1^{++} = \tau, \quad I_2^{++} = \frac{1}{\Lambda^2}(\tau_\xi^2 + \tau_\eta^2), \\ I_1^{+-} = \tau, \quad I_2^{+-} = \frac{1}{\Lambda^2}(\tau_\xi^2 - \tau_\eta^2).$$

Таким образом, универсальные дифференциальные инварианты первого порядка J_1^{++} и J_1^{+-} псевдогруппы Ли \mathbf{G}_{++} и группы Ли \mathbf{G}_{+-} имеют вид

$$J_1^{++} = (I_1^{++}, S_1^{++}I_1^{++}), \quad J_1^{+-} = (I_1^{+-}, S_1^{+-}I_1^{+-}), \quad I_1^{++} = I_1^{+-}.$$

Отметим, что J_1^{++} был вычислен в работе [10].

Действия операторов S_2^{++} и S_2^{+-} на I_1^{++} и I_1^{+-} геодезической кривой ведёт к сохранению длины касательного вектора (ξ, η) к геодезической длины τ .

Согласно теореме Трессе [14], используя операторы $S_i^{++}, S_j^{+-}, i, j = 1, 2$, и скалярный инвариант $I_1^{++} = I_1^{+-} = \tau$, можно построить конечномерный базис дифференциальных инвариантов для \mathbf{G}_{++} и \mathbf{G}_{+-} с помощью операторов инвариантного дифференцирования и функциональных операций. В частности, для гауссовой кривизны имеем следующее представление:

$$K_{++} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta \ln \Lambda^2}{\Lambda^2} \quad \text{для } M_{I_1}^t \quad \text{и} \quad K_{+-} = \frac{1}{2} \frac{\Delta \ln \Lambda^2}{\Lambda^2} \quad \text{для } M_{I_i}^t, \quad i = 2, 3,$$

где K_{++} , K_{+-} — дифференциальные инварианты второго порядка для \mathbf{G}_{++} и \mathbf{G}_{+-} соответственно. Данный факт может быть проверен непосредственными вычислениями, которые показывают, что

$$X_2^{++}K_{++} = 0, \quad X_2^{+-}K_{+-} = 0,$$

где X_2^{++} и X_2^{+-} — вторые продолжения оператора X для сигнатур $(++)$ и $(+-)$. Дифференциальные инварианты K_{++} и K_{+-} записываются в виде

$$K_{++} = V(S_i^{++}I_1^{++}) \quad K_{+-} = -V(S_i^{+-}I_1^{+-}), \quad i = 1, 2,$$

где $V(S_i^{++}I_1^{++})$ и $V(S_i^{+-}I_1^{+-})$ — дифференциально-алгебраические выражения. Формула (11), связывающая K_{++} и тейлоровский микромасштаб λ_g , совместно с вышеприведёнными соотношениями показывает, что тейлоровский микромасштаб является дифференциальным инвариантом псевдогруппы \mathbf{G}_{++} .

2.3. Классификация $M_{I_i}^t$

Сначала рассмотрим многообразие $M_{I_1}^t$. В предыдущем разделе было показано, что действие псевдогруппы Ли \mathbf{G}_{++} на $M_{I_1}^t$ сохраняет конформный вид метрики и порождает инфинитезимальные деформации многообразия $M_{I_1}^t$, т. е. $\mathbf{r}_1^* = \mathbf{r}_1 + \mathbf{U}(\xi, \eta)$, где $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(\xi, \eta)$ является локальной реализацией $M_{I_1}^t$ в карте (ξ, η) . Эта деформация вызвана конформными преобразованиями

$$\xi^* = \xi + \delta\xi, \quad \eta^* = \eta + \delta\eta,$$

или в комплексных переменных

$$z^* = z - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n z^n, \quad \bar{z}^* = \bar{z} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n \bar{z}^n.$$

Таким образом, имеем бесконечное число конформных преобразований вида

$$z_n^* = z - \epsilon_n z^n, \quad \bar{z}_n^* = \bar{z} - \epsilon_n \bar{z}^n.$$

Покажем, что эти преобразования порождают так называемое скольжение $M_{I_1}^t$ вдоль себя. Другими словами, не существует деформации $M_{I_1}^t$ по направлению нормали к этому многообразию в соответствующих точках деформации. Для доказательства этого факта предположим противное, т. е.

$$\mathbf{U}(\xi, \eta) = h \cdot \mathbf{n} + g \cdot \mathbf{k},$$

где первое слагаемое отвечает за деформацию в направлении нормали, а второе слагаемое соответствует скольжению $M_{I_1}^t$ вдоль себя. Тогда метрика деформированной поверхности принимает вид

$$ds^{*2} = (\Lambda^{*2} + 2hL + (2HL - K\Lambda^{*2})h^2 + h_{\xi^*}^2) d\xi^{*2} + 2(2hM + 2HMh^2 + h_{\xi^*\eta^*}) d\xi^{*2} d\eta^{*2} + (\Lambda^{*2} + 2hN + (2HN - K\Lambda^{*2})h^2 + h_{\eta^*}^2) d\eta^{*2},$$

где H , K означают среднюю и гауссову кривизны, а L , M и N — коэффициенты второй квадратичной формы. Так как конформные преобразования сохраняют вид метрики, то

$h \equiv 0$. Последнее равенство следует из известного результата о приведении метрики к каноническому (конформному) виду посредством квазиконформных отображений $\omega = \omega(z^*)$:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}^*} = p(z^*) \frac{\partial \omega}{\partial z^*}, \quad (41)$$

где

$$p(z^*) = \frac{(L - N + 2iM)h + H(L - N + 2iM)h^2 + 2(\partial h / \partial \bar{z}^*)^2}{(1 + 2Hh + (2H^2 - K)h^2 + 2|\partial h / \partial z^*|^2)\Lambda^{-2} + \sqrt{\Delta}\Lambda^2},$$

$$\Delta = 1 + 4Hh + (4H^2 + 2K)h^2 + 4|\partial h / \partial z^*|^2\Lambda^{-2} +$$

$$+ 4KHh^3 + K^2h^4 + 2(Lh_{\eta^*} - 2Mh_{\xi^*}h_{\eta^*} +$$

$$+ Nh_{\xi^*}^2)\Lambda^{-4} + ((2HL - K\Lambda^2 - 4HMh_{\eta^*}h_{\xi^*} + (2HN - K\Lambda^2)h_{\xi^*}^2)h^2\Lambda^{-4}$$

и

$$\Lambda^{*2}(\xi^*, \eta^*) = \Lambda^2(\xi, \eta) \frac{1 + 2Hh + (2H^2 - K)h^2 + 2|\partial h / \partial z^*|^2\Lambda^{-2} + \sqrt{\Delta}}{2(\partial z^* / \partial z) \cdot (\partial \bar{z}^* / \partial \bar{z})}.$$

Ввиду конформности отображения $\xi \mapsto \xi^*$, $\eta \mapsto \eta^*$ (или $z \mapsto z^*$, $\bar{z} \mapsto \bar{z}^*$) функция p тождественно равна нулю, кроме того $\partial h / \partial z^* = 0$. Следовательно, $h = 0$. Функция $\Lambda^2(\xi, \eta)$ преобразуется в $\Lambda^{*2}(\xi^*, \eta^*)$ согласно формуле

$$\Lambda_1^{*2}(\xi^*, \eta^*) = \frac{\Lambda^2(\xi, \eta)}{(\partial z^* / (\partial z)) \cdot (\partial \bar{z}^* / \partial \bar{z})},$$

которая совпадает с (28).

Полученное свойство позволяет, по крайней мере локально, классифицировать в терминах алгебраических функций поверхность $M_{I_1}^t$. Введём следующие обозначения: пусть u_α , $\alpha = 1, 2$, — касательная компонента вектора смещения $\mathbf{U}(\xi, \eta)$. Тогда $\mathbf{U} = u_\alpha \boldsymbol{\tau}^\alpha$, где $\boldsymbol{\tau}^1 = (1, 0)$, $\boldsymbol{\tau}^2 = (0, 1)$. Кинематическая система уравнений поля смещений в случае скольжения поверхности $M_{I_1}^t$ вдоль себя имеет вид (см. [15])

$$\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (42)$$

где $\nabla_\alpha u_\beta = \partial u_\beta / \partial x^\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda u_\lambda$. Рассмотрим комплексную функцию смещения $w = u_1 + iu_2$ и определим для положительной гауссовой кривизны $K_{++} > 0$ функцию

$$W = \frac{w(z)}{\sqrt{aK^{1/2}}}, \quad a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad a_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta, \quad \mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta},$$

которая удовлетворяет уравнению [15]

$$\partial_{\bar{z}} W + B\bar{W} = 0, \quad (43)$$

где

$$B = \frac{1}{4} (\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{11}^1 + 2\Gamma_{12}^2) - \frac{i}{4} (\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{12}^1). \quad (44)$$

Вывод уравнения (43) из кинематической системы (42) представлен в [15]. Непосредственные вычисления символов Кристоффеля в формуле (44) дают следующие равенства:

$$\frac{1}{4} (\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{11}^1 + 2\Gamma_{12}^2) = 0, \quad \frac{i}{4} (\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{12}^1) = 0.$$

Следовательно, W является аналитической функцией и функция смещения $w = w(z)$ имеет вид

$$w(z) = \sqrt{aK_{++}^{1/2}\Theta(z)},$$

где $\Theta(z)$ — аналитическая функция. В случае, когда $W_{I_1}^t$ есть часть сферической поверхности, имеем $w(z) = (1 + z\bar{z})^{-2}\Theta(z)$. В общем случае справедлива следующая классификационная теорема.

Теорема. *Условие $B \equiv 0$ выполнено для алгебраических поверхностей второго порядка положительной гауссовой кривизны и только для них.*

Таким образом, для каждой карты многообразия $M_{I_1}^t$ с положительной гауссовой кривизной поверхность $M_{I_1}^t$ принимает форму либо части эллипсоида, в частности сферы, либо двухполостного гиперболоида, либо параболоида. Отметим, что в случае отрицательной гауссовой кривизны $K_{++} < 0$ аналог вышеприведённой теоремы о классификации отсутствует. Известно, что алгебраическую поверхность вращения второго порядка положительной гауссовой кривизны $K_{++} > 0$ инфинитезимальным деформированием (продавливанием в направлении нормали) вдоль любой параллели можно преобразовать в поверхность переменной гауссовой кривизны. Если рассматриваемое преобразование отлично от преобразования растяжения, то деформированная поверхность не будет алгебраической поверхностью второго порядка.

Рассмотрим многообразия $M_{I_j}^t$, $j = 2, 3$, которые имеют метрику сигнатуры $(+-)$. Введём новые координаты, являющиеся стандартными в конформной теории поля:

$$\xi^+ = \xi + \eta, \quad \xi^- = \xi - \eta. \quad (45)$$

Такую замену переменных можно ассоциировать с вращением на угол $\pi/2$. Далее выполним преобразование (вращение) Вика $\eta \mapsto i\eta$, $i^2 = -1$. Тогда

$$\xi^+ \mapsto z = \xi + i\eta, \quad \xi^- \mapsto \bar{z} = \xi - i\eta.$$

Обозначим через $iM_{I_j}^t$, $i^2 = -1$, $j = 2, 3$, преобразование $M_{I_j}^t$ относительно действия $\eta \mapsto i\eta$. Многообразия $iM_{I_j}^t$ может быть рассмотрено как комплексная реализация $M_{I_j}^t$ в новой карте (z, \bar{z}) . Тогда классифицирующая теорема для $M_{I_j}^t$ может быть сформулирована в терминах многообразия $iM_{I_j}^t$, для которого справедливы те же рассуждения, что и для $M_{I_1}^t$.

Заключение

Рассматривая элемент длины $ds^2(t)$, полученный на основе двухточечного корреляционного тензорного поля (параметризованного переменной t), определённого в пространстве корреляционных векторов K^3 , был построен функционал длины (простого действия) для лагранжевых частиц однородного изотропного турбулентного потока. Показано, что в терминах данной метрики возможно моделирование деформации выделённого объёма однородного изотропного турбулентного потока, получение физической реализации которого требует построения изометрического однопараметрического семейства вложений $(M^t, ds^2(t))$ в евклидово пространство R^3 , снабжённое стандартной метрикой. Такое построение осталось вне рамок исследований, представленных в

данной работе. Кроме этого, для псевдориманова многообразия $(M^t, ds^2(t))$ было показано, что данным функционалом допускаются преобразования \mathbf{G}_{++} и \mathbf{G}_{+-} . Установлена связь тейлоровского микромасштаба с дифференциальным инвариантом второго порядка псевдогруппы Ли \mathbf{G}_{++} . Как следствие конформной инвариантности функционала длины, была дана локальная классификация многообразия $M_{I_1}^t$, $i = 2, 3$. Подобный результат получен только в терминах преобразованных переменных, ассоциированных с преобразованием Вика. Отметим также важность изучения построенной алгебры Ли \mathbf{W} для дальнейшего анализа операторов L_n и \bar{L}_n при построении так называемого центрального расширения \mathbf{W} .

Авторы благодарны Г.Г. Черных за полезные дискуссии.

Приложение

Рассмотрим релятивистское уравнение эйконала

$$\tau_\xi^2 - \tau_\eta^2 = \Lambda^2(\rho, t) \quad (46)$$

и найдём группу преобразований, допускаемую этим уравнением, где преобразуемые переменные — ξ , η , τ и Λ^2 . Введём обозначения: $x^1 = \xi$, $x^2 = \eta$, $u^1 = \tau$, $u^2 = \Lambda^2$. Запишем инфинитезимальный оператор

$$Y = \mu^i(x^1, x^2, u^1, u^2) \frac{\partial}{\partial x^i} + \lambda^i(x^1, x^2, u^1, u^2) \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad i = 1, 2. \quad (47)$$

Первое продолжение оператора Y имеет вид

$$Y_1 = Y + \zeta_i^k \frac{\partial}{\partial u_i^k}, \quad i, k = 1, 2, \quad (48)$$

где

$$\zeta_i^k = \frac{\partial \lambda^k}{\partial u^i} + u_i^l \frac{\partial \mu^k}{\partial u^l} - u_j^l \frac{\partial \mu^j}{\partial x^i} - u_i^l u_j^k \frac{\partial \mu^j}{\partial u^l}, \quad i, k, l = 1, 2.$$

Тогда условие инвариантности (46) относительно действия оператора (48) принимает форму

$$Y_1|_{(46)} \equiv 2u_1^1 \zeta_1^1 - 2u_2^1 \zeta_2^1 - \lambda^2 = 0,$$

или

$$Y_1|_{(46)} = 2u_1^1 \left\{ \frac{\partial \lambda^1}{\partial x^1} + u_1^1 \frac{\partial \lambda^1}{\partial u^1} + u_1^2 \frac{\partial \lambda^1}{\partial u^2} - u_j^1 \left(\frac{\partial \mu^j}{\partial x^1} + u_1^1 \frac{\partial \mu^j}{\partial u^1} + u_1^2 \frac{\partial \mu^j}{\partial u^2} \right) \right\} - \\ - 2u_2^1 \left\{ \frac{\partial \lambda^1}{\partial x^2} + u_2^1 \frac{\partial \lambda^1}{\partial u^1} + u_2^2 \frac{\partial \lambda^1}{\partial u^2} - u_j^1 \left(\frac{\partial \mu^j}{\partial x^2} + u_2^1 \frac{\partial \mu^j}{\partial u^1} + u_2^2 \frac{\partial \mu^j}{\partial u^2} \right) \right\} - \lambda^2 = 0. \quad (49)$$

Проводя расщепление по мономам $u_1^1 u_1^2$, $u_2^1 u_2^2$ и $u_1^1 u_1^2 u_1^1$, $u_2^1 u_2^2 u_1^1$, $u_2^1 u_1^2 u_2^1$, $u_1^1 u_1^2 u_2^1$, получаем

$$\frac{\partial \lambda^1}{\partial u^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mu^j}{\partial u^2} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (50)$$

Тогда из (50) следует, что $\lambda^1 = \lambda^1(x^1, x^2, u^1)$ и $\mu^j = \mu^j(x^1, x^2, u^1)$. Группируя соответствующие слагаемые и проводя простые алгебраические вычисления (49), получаем

$$\begin{aligned} Y_1|_{(46)} &= 2u_1^1 \left(\frac{\partial \lambda^1}{\partial x^1} - u^2 \frac{\partial \mu^1}{\partial u^1} \right) - 2u_2^1 \left(\frac{\partial \lambda^1}{\partial x^2} - u^2 \frac{\partial \mu^1}{\partial u^2} \right) + \\ &+ 2u_1^1 u_2^1 \left(-\frac{\partial \mu^2}{\partial x^1} + \frac{\partial \mu^1}{\partial x^2} \right) + 2(u_2^1)^2 \left(\frac{\partial \mu^2}{\partial x^2} - \frac{\partial \mu^1}{\partial x^1} \right) + \\ &+ 2u^2 \left(\frac{\partial \lambda^1}{\partial x^2} - u^2 \frac{\partial \mu^1}{\partial x^1} \right) - \lambda^2 = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Таким образом, система определяющих уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \mu^1}{\partial x^2} = \frac{\partial \mu^2}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial \mu^1}{\partial x^2} = \frac{\partial \mu^2}{\partial x^1}, \quad (52)$$

$$\frac{\partial \lambda^1}{\partial x^i} - u^2 \frac{\partial \mu^i}{\partial u^1} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (53)$$

$$2u^2 \left(\frac{\partial \lambda^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \mu^1}{\partial x^1} \right) - \lambda^2 = 0. \quad (54)$$

Расщепление (53) относительно u^2 приводит к равенствам

$$\frac{\partial \lambda^1}{\partial x^1} = \frac{\partial \lambda^1}{\partial x^2} = 0, \quad \lambda^1 = \lambda^1(u^1), \quad (55)$$

$$\frac{\partial \mu^1}{\partial u^1} = \frac{\partial \mu^2}{\partial u^1} = 0, \quad \mu^i = \mu^i(x^1, x^2). \quad (56)$$

Итак, (50), (52), (54)–(56) являются системой определяющих уравнений алгебры Ли, допускаемой уравнением (46). В терминах [12] уравнения (52) есть условия h -аналитичности функции $w = \mu^1 + j\mu^2$, где $j^2 = 1$. В исходных переменных инфинитезимальный оператор Y записывается как

$$Y = \Phi(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} + \Psi(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} + \gamma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} + 2 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} - \Phi_\xi(\xi, \eta) \right) \Lambda^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda^2},$$

где $\Phi(\xi, \eta) = \mu^1(x^1, x^2)$, $\Psi(\xi, \eta) = \mu^2(x^1, x^2)$ и $\gamma(\tau) = \lambda^1(u^1)$, Φ и Ψ — произвольные h -сопряжённые гармонические функции [12], $\gamma(\tau)$ — произвольная дифференцируемая функция. Зависимость от переменной t опущена.

Список литературы

- [1] POPE S.B. Lagrangian PDF methods for turbulent flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 1994. Vol. 26. P. 23–63.
- [2] POPE S.B. On the relationship between stochastic Lagrangian models of turbulence and second-moment closure // Phys. Fluids. 1994. Vol. 6. P. 973–985.
- [3] GREBENEV V.N., OBERLACK M. Geometric realization of the two-point correlation tensor for isotropic turbulence // J. Nonl. Math. Phys. 2011. Vol. 18. P. 109–120.

- [4] RUBINSTEIN J.H., SINCLAIR R. Visualizing Ricci flow of manifolds of revolution // *Exper. Math.* 2005. Vol. 14. P. 285–298.
- [5] МОНИН А.С., ЯГЛОМ А.М. Статистическая гидромеханика. СПб: Гидрометеиздат, 1994.
- [6] ROTTA J.C. *Turbulente Strömungen*. Teubner, 1972.
- [7] VON KÁRMÁN TH., HOWARTH L. On the statistical theory of isotropic turbulence // *Proc. Roy. Soc.* 1938. Vol. A164. P. 192–215.
- [8] КАМЫШАНСКИЙ N.R., СОЛОДОВНИКОВ A.S. Semireducible analytic spaces “in the large” // *Rus. Math. Surv.* 1980. Vol. 5. P. 1–56.
- [9] EISENHART L.P. *Riemannian Geometry*. Princeton Univ. Press, 1926.
- [10] МЕГРАВОВ А.Г. Group splitting and Lax representation // *Dokl. Math.* 2003. Vol. 67(3). P. 335–349.
- [11] МЕЛЕШКО S.V. Homogeneous autonomic systems with three independent variables // *J. Appl. Math. Mech.* 1994. Vol. 58. P. 857–863.
- [12] ЛАВРЕНТЬЕВ А.М., ШАБАТ Б.В. Проблемы гидромеханики. М.: Наука, 1973.
- [13] SCHOTTENLOHER M.A. *Mathematical Introduction to Conformal Field Theory. Lectures Notes in Physics*. Berlin; Heiderberg: Springer, 2008.
- [14] ОВСЯННИКОВ Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [15] ВЕКУА И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 4 мая 2012 г.