

## Построение эффективных моделей покрытия при мониторинге протяженных объектов\*

С. Н. АСТРАКОВ<sup>1</sup>, А. И. ЕРЗИН<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Конструкторско-технологический институт вычислительной техники СО РАН, Новосибирск, Россия*

<sup>2</sup>*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*  
e-mail: astrakov90@gmail.com, adilerzin@math.nsc.ru

Рассматривается проблема наименее плотного покрытия полосы кругами одного, двух и трех радиусов. Предложены и исследованы новые модели регулярных покрытий. Разработанные методы и полученные результаты имеют фундаментальное значение, а также могут быть использованы как инструментарий для энергоэффективного мониторинга сенсорными сетями протяженных объектов.

*Ключевые слова:* мониторинг, энергоэффективность, беспроводные сенсорные сети.

### Введение

Проблемы поиска эффективных покрытий плоских областей кругами различного радиуса возникают во многих практических приложениях [1–5]. В данной работе эта проблема рассматривается в применении к сенсорным сетям, осуществляющим мониторинг полосы. Как и в [4], предполагается, что область мониторинга сенсора является кругом определенного радиуса с центром в месте расположения сенсора. Будем полагать, что сенсор покрывает часть плоскости, находящуюся внутри его круга мониторинга. Плоская область считается покрытой множеством сенсоров  $S$ , если каждая точка области покрыта хотя бы одним сенсором из  $S$ .

Плотностью покрытия плоской области кругами называется отношение суммы площадей кругов покрытия к площади области. Очевидно, что плотность не может быть меньше единицы и отклонение ее значения от единицы характеризует эффективность покрытия. Так как энергозатраты сенсора на мониторинг пропорциональны покрытой им площади, основная задача сенсорных сетей — максимизация времени жизни — сводится к решению задачи построения наименее плотного покрытия.

Существует много способов покрытия плоской области кругами различных радиусов. В связи с этим в большинстве работ по данной тематике [4–8] авторы рассматривают так называемые регулярные покрытия, что существенно сужает множество допустимых покрытий и позволяет осуществлять анализ определенного класса покрытий. В регулярном покрытии плоская область (виртуально) замощается одинаковыми многоугольниками (плитками) и все многоугольники покрываются кругами одинаково. При

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-07-92650-ИНД\_а) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (гос. контракт 14.740.11.0362).

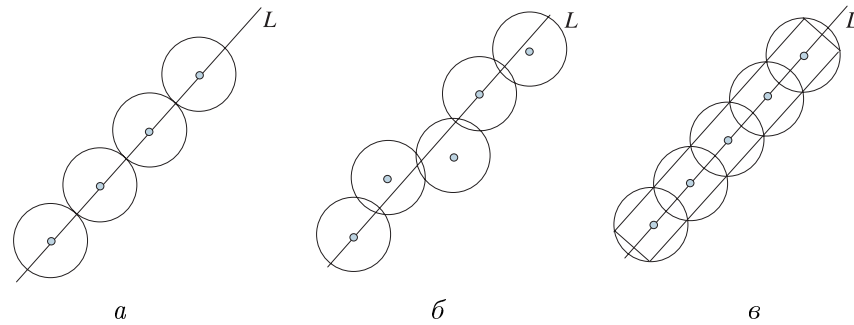


Рис. 1. Покрытие прямой линии кругами: *a* — регулярное без пересечения кругов, *b* — нерегулярное, *v* — регулярное гарантированное

этом сенсоры (центры кругов) располагаются в определенных местах плиток и определяются оптимальные радиусы мониторинга сенсоров [4, 5].

Покрытию кругами всей плоскости посвящено значительное число публикаций. При покрытии ограниченных областей основные трудности возникают на границе области. В настоящей работе рассматривается практически не изученная проблема наименее плотного покрытия бесконечной полосы кругами. Предложены покрытия, использующие круги одного, двух и трех радиусов. Учтены возникающие при этом граничные эффекты и проведен анализ эффективности предложенных покрытий.

Многие реальные объекты моделируются бесконечно длинными полосами. Это автомобильные дороги и железнодорожное полотно, различные линии связи, государственные границы, трубопроводы и прочие сооружения, имеющие незначительную кривизну, длина которых существенно превышает ширину. Задачи мониторинга подобных объектов требуют построения эффективных моделей покрытия, удовлетворяющих определенным требованиям.

Рассмотрим, например, прямую  $L$ , которую необходимо покрыть одинаковыми кругами радиуса  $R$ . На рис. 1 показаны три варианта покрытия. В случае *a* линия покрыта касающимися кругами, однако точки касания входят в покрытие без своих окрестностей, и такое покрытие может оказаться недостаточно надежным. В случае *v* линия  $L$  находится в некоторой полосе, границы которой проходят через точки пересечения окружностей, что обеспечивает гарантированное покрытие. Таким образом, задача о покрытии полосы становится эквивалентна задаче о гарантированном покрытии прямой линии.

С другой стороны, практически любой физический предмет имеет ширину (толщину). Поэтому далее будем рассматривать регулярные покрытия полосы, отождествляя эффективность покрытия с его плотностью. Напомним, что в регулярном покрытии область мониторинга разбивается на равные одинаково покрытые многоугольники. Далее в работе рассматриваются только регулярные покрытия.

Назовем покрытие  $n$ -слойным, если центры всех его кругов располагаются на  $n$  прямых, параллельных границам полосы. В работе предложены и исследованы регулярные многослойные покрытия полосы кругами одного, двух и трех радиусов. При этом радиусы кругов — регулируемые параметры покрытий. В каждом классе покрытий выделены наиболее эффективные и показаны их преимущества. Приведенные результаты, не претендуя на полный анализ многообразия возможных вариантов покрытий, демонстрируют общие методы построения эффективных покрытий, которые могут быть использованы при решении практических задач.

## 1. Покрывтия полосы кругами одного радиуса

Существует большое число регулярных покрытий полосы кругами одного радиуса. При этом эффективность покрытия зависит как от числа его слоев, так и от расположения кругов. Далее будут рассмотрены наиболее перспективные с точки зрения авторов покрытия.

### 1.1. Однослойные покрытия

**Модель 1.** Рассмотрим регулярное покрытие полосы шириной  $h$  (рис. 2) и найдем радиус круга  $R$ , при котором плотность такого покрытия минимальна. Покрытие является однослойным, так как центры кругов располагаются на одной прямой.

Пусть точки  $A$  и  $B$  — центры двух соседних кругов покрытия. Через эти точки проведем диаметры, перпендикулярные отрезку  $AB$  (и сторонам полосы), а через точки пересечения окружностей — отрезки  $CD$  и  $EF$ , параллельные  $AB$ . Прямоугольник  $CDFE$  является частью полосы и покрывается двумя полукругами с суммарной площадью  $\pi R^2$ . Плотность покрытия всей полосы совпадает с плотностью покрытия прямоугольника и равна  $D = S_d/S_r$ , где  $S_d = \pi R^2$  — площадь кругов, покрывающих  $CDFE$ , а  $S_r$  — площадь прямоугольника  $CDFE$ . Оптимальным является покрытие, имеющее минимальную плотность. Найдем оптимальные значения радиуса круга  $R$  и расстояние  $d$  между центрами соседних кругов в зависимости от ширины полосы  $h$ . Согласно обозначениям рис. 2

$$d = |AB| = 2R \cos \alpha, \quad h = 2R \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$S_r = dh = 4R^2 \cos \alpha \sin \alpha = 2R^2 \sin 2\alpha, \quad D(\alpha) = \pi/(2 \sin 2\alpha).$$

Плотность  $D(\alpha)$  представляет собой дифференцируемую функцию одной переменной и ее минимум  $\pi/2 \approx 1.5708$  достигается при  $\alpha = \pi/4$ . Следовательно, оптимальные значения  $R = h/\sqrt{2}$  и  $d = h$ .

### 1.2. Двухслойные покрытия

Плотность покрытия может быть уменьшена путем введения дополнительных слоев. Двухслойные покрытия кругами одного радиуса могут быть построены по-разному. Рассмотрим случай, когда используется треугольная решетка (рис. 3).

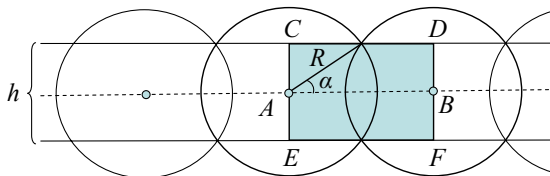


Рис. 2. Регулярное однослойное покрытие одинаковыми кругами; модель 1

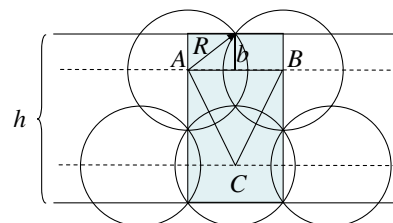


Рис. 3. Двухслойное покрытие полосы одинаковыми кругами с треугольной решеткой; модель 2

**Модель 2.** Пусть, как и прежде,  $h$  — ширина полосы,  $R$  — радиус круга,  $d = |AB|$  — расстояние между центрами соседних кругов одного слоя,  $\alpha$  — угол между радиусом, проведенным к точке пересечения двух соседних окружностей одного слоя, и прямой  $AB$ , проходящей через центры кругов этого слоя. Обозначим  $b = R \sin \alpha$ . Тогда

$$h = R + 3b = R(1 + 3 \sin \alpha), \quad d = 2R \cos \alpha,$$

$$S_r = dh = 2R^2 \cos \alpha (1 + 3 \sin \alpha), \quad S_d = 2\pi R^2.$$

Следовательно, плотность покрытия выражается в виде

$$D(\alpha) = \frac{\pi}{\cos \alpha (1 + 3 \sin \alpha)}.$$

Минимизируя функцию  $D(\alpha)$ , получим

$$\sin \alpha = (\sqrt{73} - 1)/12 \approx 0.62867, \quad \alpha \approx 38.95^\circ,$$

$$R = h/(1 + 3 \sin \alpha) = 4h/(3 + \sqrt{73}) \approx 0.3465h, \quad d = \frac{2h\sqrt{70 + 2\sqrt{73}}}{3(3 + \sqrt{73})} \approx 0.5389h.$$

Минимальная плотность такого покрытия равна

$$\min_{\alpha} D(\alpha) = \frac{48\pi}{(3 + \sqrt{73})\sqrt{70 + 2\sqrt{73}}} \approx 1.3998.$$

**Замечание 1.** Отметим нетривиальный результат. Треугольник  $ABC$ , образованный центрами трех соседних кругов, не правильный, как при покрытии плоскости одинаковыми кругами [6], а равнобедренный. Это обусловлено граничным эффектом. В случае правильной треугольной решетки плотность покрытия больше и составляет  $4\pi/(5\sqrt{3}) \approx 1.451$ .

### 1.3. Многослойные покрытия

**Модель 3.** Рассмотрим многослойные покрытия полосы кругами одного радиуса. По аналогии с моделью 2 проведем соответствующие вычисления:

если  $n = 3$ , то  $h = 2R + 4b$ ,  $S_r = d(2R + 4b) = 2R^2 \cos \alpha (2 + 4 \sin \alpha)$ ,  $S_d = 3\pi R^2$ ;

если  $n = 4$ , то  $h = 3R + 5b$ ,  $S_r = d(3R + 5b) = 2R^2 \cos \alpha (3 + 5 \sin \alpha)$ ,  $S_d = 4\pi R^2$ . В этом случае для произвольного  $n$  имеем

$$h = (n - 1)R + (n + 1)b = R((n - 1) + (n + 1) \sin \alpha),$$

$$S_r = dh = 2R^2 \cos \alpha ((n - 1) + (n + 1) \sin \alpha), \quad S_d = \pi n R^2,$$

$$D(\alpha) = \frac{S_d}{S_r} = \frac{\pi n}{2(n - 1 + (n + 1) \sin \alpha) \cos \alpha}.$$

После элементарных вычислений получим условие оптимальности

$$2 \sin^2 \alpha + \frac{n - 1}{n + 1} \sin \alpha - 1 = 0.$$

Из решения последнего уравнения находим требуемые значения тригонометрических показателей

$$\sin \alpha = 0.25 \left( \sqrt{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 + 8} - \frac{n-1}{n+1} \right) = 0.25 \left( \sqrt{p^2 + 8} - p \right),$$

$$\cos \alpha = 0.25 \left( \sqrt{8 - 2p^2 + 2p\sqrt{p^2 + 8}} \right),$$

где  $p = \frac{n-1}{n+1}$ . Это дает возможность вычислить оптимальное значение плотности покрытия  $D(\alpha)$  и определить соотношение между радиусом и шириной полосы

$$R = \frac{h}{n-1 + (n+1) \sin \alpha}.$$

При  $n \rightarrow \infty$  получим предельные значения  $p = 1$  и  $\sin \alpha = 1/2$ , что соответствует  $\alpha = \pi/6$ . Предельное значение плотности

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \approx 1.2092.$$

**Замечание 2.** Данная асимптотическая оценка соответствует классическому результату для покрытия всей плоскости кругами одного радиуса [6], который объясняется тем, что при большой ширине полосы влияние границ несущественно.

## 2. Покрытие полосы кругами двух и трех радиусов

**Модель 4.** Пусть центры кругов радиуса  $R$  расположены на средней линии полосы и два соседних круга пересекаются, оставляя непокрытой область около границы полосы, покрываемой кругами радиуса  $r$  (рис. 4). Плотность такого покрытия зависит от параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , где  $\alpha$  — угол между прямой, проведенной из центра круга радиуса  $R$  в точку пересечения соседних кругов радиуса  $R$ , и средней линией полосы,  $\beta$  — угол между прямой, проведенной из центра круга радиуса  $R$  в точку пересечения круга радиуса  $R$  с границей, и вертикалью (см. рис. 4). Площадь прямоугольника  $ABCD$  и другие характеристики покрытия определяются уравнениями

$$S_r = 4R^2 \cos \alpha \cos \beta,$$

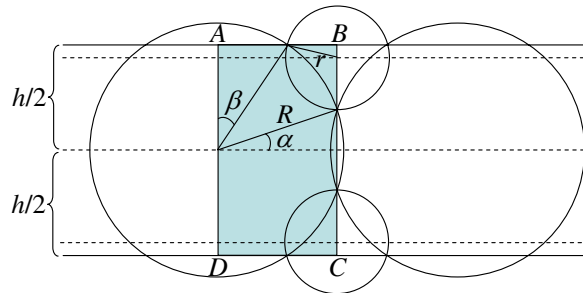


Рис. 4. Трехслойное покрытие кругами двух радиусов; модель 4

$$r = R \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \alpha \right),$$

$$S_d = \pi R^2 + 2\pi r^2 = \pi R^2 \left( 2 + 2 \sin^2 \alpha + \sin(\alpha - \beta) - 4 \sin \alpha \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right).$$

Отсюда плотность покрытия

$$D(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{4 \cos \alpha \cos \beta} \left( 2 + 2 \sin^2 \alpha + \sin(\alpha - \beta) - 4 \sin \alpha \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right).$$

Минимум функции  $D(\alpha, \beta)$  не удается найти аналитически, а численные расчеты при  $R \approx 0.6266h$ ,  $r \approx 0.1825h$ ,  $\alpha \approx 27^\circ$ ,  $\beta \approx 37^\circ$  дают

$$\min_{\alpha, \beta} D(\alpha, \beta) \approx 1.294.$$

**Модель 5.** Рассмотрим четырехслойное покрытие (рис. 5). Три соседних круга радиуса  $R$  (два с одного слоя и один с другого) пересекаются в единственной общей точке и их центры являются вершинами правильного треугольника. Круги радиуса  $r$  покрывают оставшиеся непокрытыми граничные участки полосы.

Пусть центральный угол дуги окружности радиуса  $R$ , отсекаемой окружностью радиуса  $r$ , равен  $2\varphi$ . Тогда плотность покрытия

$$D(\varphi) = \frac{\pi}{\sqrt{3}(3 + 4 \sin(\pi/6 + 2\varphi))} \left( 4 + \left( \sqrt{3} \tan\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) - 1 \right)^2 \right).$$

В результате численного решения при  $\varphi \approx 11.5^\circ$ ,  $R \approx 0.3229h$ ,  $r \approx 0.0859h$  находим оптимальное значение:

$$\min_{\varphi} D(\varphi) \approx 1.2542.$$

**Замечание 3.** Добавление кругов радиуса  $r$  позволило существенно уменьшить плотность покрытия по сравнению с моделью 2.

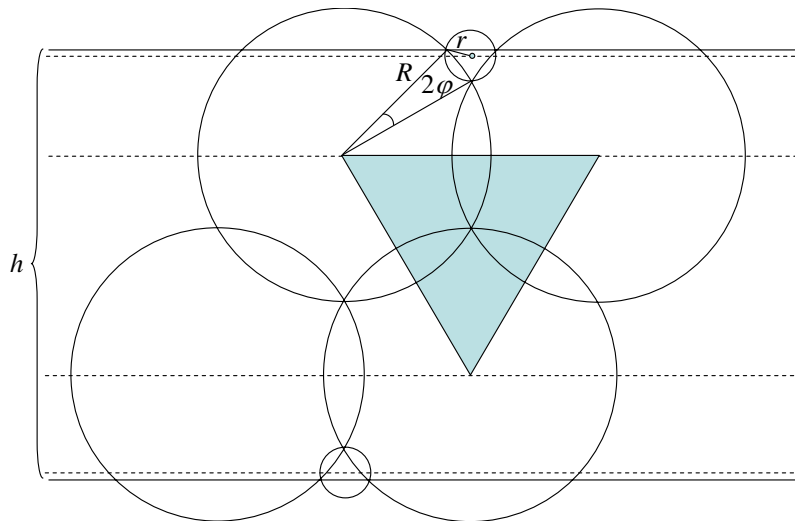


Рис. 5. Четырехслойное покрытие кругами двух радиусов; модель 5

**Модель 6.** Рассмотрим покрытие (рис. 6), состоящее из кругов трех радиусов. Круги радиуса  $R$  определяют основную прямоугольную структуру, радиуса  $r_1$  — используются в центральной части полосы, радиуса  $r_2$  — находятся на границах полосы. Такое построение позволяет провести оптимизацию за счет изменений нескольких характеристик покрытия.

Выделим прямоугольник, образованный границами полосы и прямыми, проходящими через центры соседних кругов радиуса  $R$ . Для удобства вычислений выразим искомые величины через радиус круга  $R$ :

$$h = 2R \cos \alpha + 2R \cos(\pi/2 - \alpha - 2\varphi) = 2R(\cos \alpha + \sin(\alpha + 2\varphi)),$$

$$r_1 = R(\cos \alpha - \sin \alpha), \quad r_2 = R(\cos \alpha \tan(\alpha + \varphi) - \sin \alpha), \quad d = 2R \cos \alpha,$$

где  $d$  — расстояние между центрами двух соседних кругов одного уровня радиуса  $R$ ,  $2\alpha$  и  $2\varphi$  — центральные углы окружности радиуса  $R$ , соответствующие дугам при пересечении соседних окружностей. Приведем расчеты плотности:

$$S_r = hd = 4R^2 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin(\alpha + 2\varphi)),$$

$$S_d = 2\pi R^2 + \pi r_1^2 + 2\pi r_2^2 = \pi R^2 (3 - \sin 2\alpha + 2(\sin(\alpha + \varphi) - \sin \alpha)^2),$$

$$D(\alpha, \varphi) = \frac{S_d}{S_r} = \frac{\pi(3 - \sin 2\alpha + 2(\cos \alpha \tan(\alpha + \varphi) - \sin \alpha)^2)}{4 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin(\alpha + 2\varphi))}.$$

В этом случае минимальная плотность

$$\min_{\alpha, \varphi} D(\alpha, \varphi) \approx 1.2335$$

достигается при  $\alpha \approx 26.36^\circ$ ,  $\varphi \approx 13, 18^\circ$ ,  $R \approx 0.2956h$ ,  $r_1 \approx 0.1336h$ ,  $r_2 \approx 0.0874h$ .

**Замечание 4.** Если принять  $r_1 = r_2 = r$ , то получим более простую модель с плотностью

$$D(\alpha) = \frac{\pi(5 - 3 \sin 2\alpha)}{4(1 + \cos 2\alpha)}, \quad \min_{\alpha} D(\alpha) \approx 1.2566$$

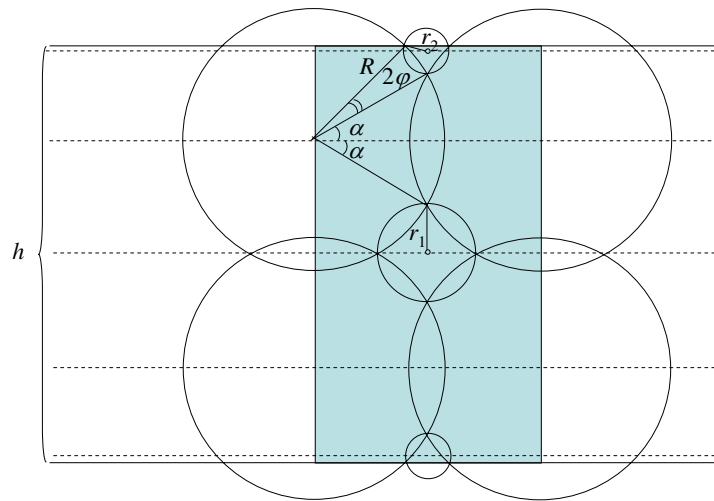


Рис. 6. Пятислойное покрытие полосы кругами трех радиусов; модель 6

при  $\alpha \approx 30.94^\circ$ ,  $R \approx 0.2915h$ ,  $r \approx 0.1001h$ . Несмотря на то что плотность увеличилась, в некоторых случаях данной модели может быть отдано предпочтение в сравнении с моделью 6.

**Модель 7.** Рассмотрим покрытие, состоящее из кругов трех радиусов (рис. 7). Центры кругов радиуса  $R$  определяют основную треугольную решетку и эти круги оставляют непокрытыми внутренние и граничные части полосы. Круги радиуса  $r_1$  покрывают внутренние криволинейные треугольники, радиуса  $r_2$  — граничные части полосы. Покрытие в этом случае является шестислойным.

Используя обозначения углов, принятые в модели 6, получим следующее выражение для плотности покрытия:

$$D(\alpha, \varphi) = \frac{\pi(1 + (\cos \alpha / \sqrt{3} - \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha \tan(\alpha + \varphi) - \sin \alpha)^2)}{\cos \alpha (\sqrt{3} \cos \alpha + 2 \sin(\alpha + 2\varphi))}.$$

Минимальная плотность для данной модели

$$\min_{\alpha, \varphi} D(\alpha, \varphi) \approx 1.2039$$

достигается при  $\alpha \approx 21.77^\circ$ ,  $\varphi \approx 14.32^\circ$ ,  $R \approx 0.3175h$ ,  $r_1 \approx 0.0525h$ ,  $r_2 \approx 0.0972h$ .

**Замечание 5.** Если упростить модель, положив  $r_1 = r_2 = r$ , то плотность покрытия зависит от одной переменной  $r$  и минимум плотности увеличивается, оставаясь вместе с тем достаточно малым:

$$D(\alpha) = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{7 - 2 \cos 2\alpha - 2\sqrt{3} \sin 2\alpha}{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}, \quad \min_{\alpha} D(\alpha) \approx 1.2339$$

при  $\alpha \approx 17.72^\circ$ ,  $r \approx 0.3338h$ ,  $r \approx 0.2457R \approx 0.082h$ .

Исследования предложенных покрытий показали, что для уменьшения их плотности необходимо учитывать следующие факторы: 1 — количество уровней, 2 — расположение кругов, 3 — радиусы кругов, 4 — соотношения между радиусами различных кругов, 5 — структуру покрытия. При выборе покрытий предпочтение отдается тем из них, которые имеют не только низкую плотность, но и наиболее простую структуру. Исходя из

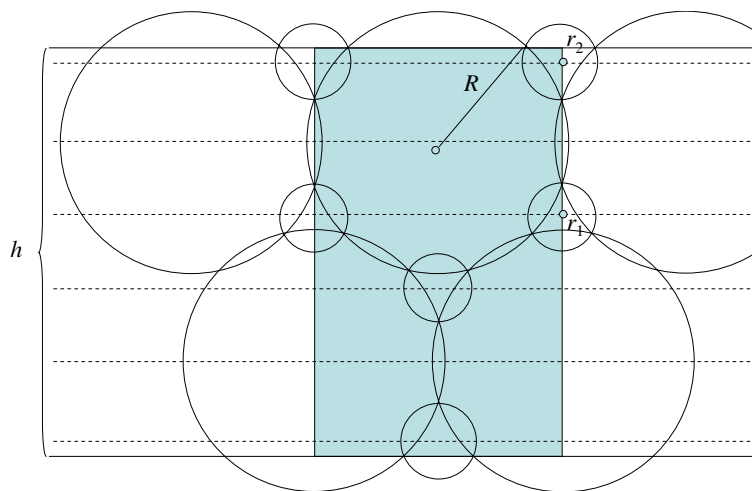


Рис. 7. Шестислойное покрытие кругами трех радиусов; модель 7



Сводная таблица результатов

Класс покрытия $P(n, k)$	Лучшая модель класса	Плотность покрытия	Структура покрытия
$P(1, 1)$	Модель 1	1.571	Однослойная
$P(2, 1)$	Модель 2	1.399	Треугольная решетка
$P(n, 1)$	Модель 3	1.209 (при $n \rightarrow \infty$ )	Многослойная
$P(3, 2)$	Модель 4	1.294	Трехслойная
$P(4, 2)$	Модель 5	1.254	Треугольная решетка
$P(5, 3)$	Модель 6	1.234	Прямоугольная решетка
$P(6, 3)$	Модель 7	1.204	Треугольная решетка

этого была проведена классификация рассмотренных моделей, согласно которой каждое покрытие относится к одному из классов  $P(n, k)$ , где  $n$  — число слоев покрытия,  $k$  — число различных радиусов кругов (см. таблицу).

В заключение отметим, что в рассмотренных моделях, как и в работах [4, 5, 9], радиусы кругов являются регулируемыми параметрами. Вместе с тем в некоторых приложениях радиусы кругов могут быть заданы и требуется найти наименее плотное покрытие полосы заданной ширины. Например, если  $2R$  меньше ширины полосы  $h$ , то однослойное покрытие полосы кругами радиуса  $R$  вообще нереализуемо. В последующих работах планируется рассмотреть способы построения наименее плотных покрытий кругами заданных радиусов.

## Список литературы

- [1] ASANO T., BRASS P., SASAHARA S. Discovering problem with application to digital half toning // LNCS 3045. 2004. P. 14–17.
- [2] BULUSU N., HEIDEMANN J., ESTRIN D. GPS-less low cost outdoor localization for very small devices. Technical Report. Computer Science Department. Univ. of Southern California, 2000.
- [3] POTTIE G.J. Wireless integrated network sensors // Communicat. CM. 2000. Vol. 43, No. 5. P. 51–58.
- [4] WU J., YANG S. Energy-efficient node scheduling models in sensor networks with adjustable ranges // Intern. J. of Foundat. of Comput. Sci. 2005. Vol. 6, No. 1. P. 3–17.
- [5] АСТРАКОВ С.Н., ЕРЗИН А.И., ЗАЛЮБОВСКИЙ В.В. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами // Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т. 16, № 3. С. 3–19.
- [6] KERSHNER R. The number of circles covering a set // Amer. J. of Math. 1939. Vol. 61, No. 3. P. 665–671.
- [7] ТОТ Л.Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Изд. физ.-мат. литературы, 1958. 365 с.
- [8] ZHANG H., HOU J.C. Maintaining sensing coverage and connectivity in large sensor networks // Ad Hoc & Sensor Wireless Networks. 2005. Vol. 1, No. (1-2). P. 89–124.
- [9] CARDEI M. Improving Network Lifetime using Sensors with Adjustable ensing Ranges // Intern. J. of Sensor Networks. 2006. No. 1. P. 41–49.

Поступила в редакцию 1 марта 2011 г.,  
с доработки — 25 октября 2011 г.