

Численно-аналитическое моделирование газовых течений, примыкающих к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса*

С. Л. ДЕРЯБИН, А. В. МЕЗЕНЦЕВ

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия
e-mail: SDeryabin@math.usurt.ru, AMezentsev@math.usurt.ru

Рассматриваются трехмерные течения идеального политропного газа, примыкающие к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса. Решение задач о распаде разрыва и о гладком примыкании строится в виде сходящихся рядов. В параметрической форме и численно строится закон движения свободной поверхности газ-вакуум.

Ключевые слова: идеальный политропный газ, сила Кориолиса, свободная поверхность газ-вакуум, сходящиеся ряды.

Задачи об истечении газа в вакуум исследовались ранее в работах [1–11]. Подробный обзор полученных результатов можно найти в [2, 3].

В [1] решение задачи об истечении в вакуум впервые было построено в виде степенных рядов в окрестности звуковой характеристики, отделяющей исходное фоновое течение от искомой волны разрежения. В [4] показано, что при схлопывании одномерной полости свободная поверхность некоторое время движется с постоянной скоростью. Этот результат обобщен на случай двумерных и трехмерных течений [5, 6] и одномерных течений в условиях самогравитации [7–9]. Изучались также трехмерные течения в условиях действия внешних массовых сил, зависящих от пространственных переменных [10], в том числе эволюция закрученных течений под действием силы тяготения [11]. В данной работе рассматривается трехмерная задача, когда плотность массовой силы является суммой кориолисова ускорения и ускорения свободного падения. В природе имеются примеры таких течений. Так, если снаружи от некоторой поверхности находится газ, а по другую от нее сторону — вакуум, то возникающее течение, согласно гипотезе из [12], можно использовать для приближенного моделирования средней вертикальной части восходящих закрученных потоков типа торнадо.

1. Задача о распаде специального разрыва

Пусть в момент времени $t = 0$ трехмерная поверхность Γ с уравнением $z = \phi(x, y)$ отделяет идеальный политропный газ от вакуума. Предполагается, что газ находится снаружи, а вакуум — внутри полости. Рассматриваются изоэнтропические течения идеального политропного газа, т. е. $S = S_0 = \text{const}$. Тогда, не нарушая общности, уравнение состояния берется в виде $p = S_0^2 \frac{\rho^\gamma}{\gamma}$. Здесь p — давление, ρ — плотность газа,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00052).

$\gamma = \text{const} > 1$ — показатель политропы газа. Отсюда следует, что скорость звука в газе $c = S_0 \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$.

В момент времени $t = 0$ известны распределения параметров газа: $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0(\mathbf{x}) = \{u_0(\mathbf{x}), v_0(\mathbf{x}), w_0(\mathbf{x})\}$ — векторы скорости газа, где u_0, v_0, w_0 — проекции вектора скорости на декартовы координаты, $c = c_0(\mathbf{x})$ — скорость звука в газе, $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$. Также предполагается, что на газ действует массовая сила с плотностью, являющейся суммой кориолисова ускорения и ускорения свободного падения.

Функция $\phi(x, y)$, задающая поверхность Γ , а также функции \mathbf{V}_0, c_0 приняты аналитическими. Будем считать, что скорость звука в газе всюду больше нуля, в том числе $c_0(\mathbf{x})|_{\Gamma} > 0$.

В момент $t = 0$ начинается движение газа, определяемое заданными при $t = 0$ распределениями \mathbf{V}_0, c_0 , которое в дальнейшем будем называть фоновым течением.

Кроме того предполагается, что в момент $t = 0$ поверхность Γ мгновенно разрушается и начинается истечение части газа в вакуум. Возмущения, возникшие в фоновом течении в результате мгновенного разрушения поверхности Γ , распространяются по газу в виде волны разрежения, отделенной от фонового течения границей Γ_1 , являющейся поверхностью слабого разрыва. С другой стороны волна разрежения примыкает к вакууму: $c(\mathbf{x})|_{\Gamma_0} = 0$, где Γ_0 — свободная поверхность, отделяющая волну разрежения от вакуума.

Требуется построить как фоновое течение, так и волну разрежения, а также найти законы движения Γ_1 и Γ_0 , т.е. построить решение задачи о распаде специального разрыва в случае, когда в начальный момент времени стенка Γ отделяет от вакуума газ со строго положительными значениями плотности.

Далее изоэнтропические течения идеального политропного газа, примыкающие к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса, как и в [12], будут строиться в относительной декартовой системе координат с осями Ox, Oy, Oz , направленными соответственно на восток, север, и вверх от поверхности. Будем полагать, что точка O — начало декартовой системы координат — находится на поверхности Земли в Северном полушарии на параллели с широтой ψ (рис. 1). Тогда в относительной системе координат постоянный вектор $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор угловой скорости Земли, имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega_2, \Omega_3), \quad \Omega_2 = \Omega \cos \psi, \quad \Omega_3 = \Omega \sin \psi,$$

где Ω — модуль вектора $\boldsymbol{\Omega}$; $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$ определяется по формуле

$$\Omega = \frac{2\pi}{24} \frac{1}{\text{ч}} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60^2} \frac{1}{\text{с}}.$$

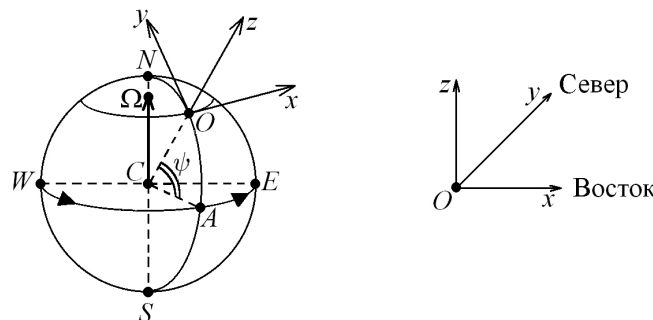


Рис. 1. Относительная декартова система координат

Система уравнений, описывающая изоэнтропические течения идеального политропного газа в условиях действия сил тяготения и Кориолиса, имеет вид [12]

$$\begin{aligned} c_t + c_x u + c_y v + c_z w + \frac{\gamma - 1}{2} c(u_x + v_y + w_z) &= 0, \\ u_t + u_x u + u_y v + u_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c c_x &= 2\Omega_3 v - 2\Omega_2 w, \\ v_t + v_x u + v_y v + v_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c c_y &= -2\Omega_3 u, \\ w_t + w_x u + w_y v + w_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c c_z &= 2\Omega_2 u - g, \end{aligned} \quad (1)$$

где g — ускорение свободного падения, c — скорость звука в газе, u, v, w , — проекции вектора скорости в декартовой системе координат x, y, z . Перепишем систему (1) в цилиндрических координатах [12]:

$$\begin{aligned} c_t + c_r u + \frac{1}{r} c_\varphi v + c_z w + \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_r + \frac{1}{r} (u + v_\varphi) + w_z \right] &= 0, \\ u_t + u_r u + \frac{1}{r} u_\varphi v + u_z w - \frac{1}{r} v^2 + \frac{2}{\gamma - 1} c c_r &= 2\Omega_3 v - (2\Omega_2 \cos \varphi) w, \\ v_t + v_r u + \frac{1}{r} v_\varphi v + v_z w + \frac{1}{r} u v + \frac{2}{(\gamma - 1)r} c c_\varphi &= -2\Omega_3 u + (2\Omega_2 \sin \varphi) w, \\ w_t + w_r u + \frac{1}{r} w_\varphi v + w_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c c_z &= (2\Omega_2 \cos \varphi) u - (2\Omega_2 \sin \varphi) v - g. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь для удобства восприятия сохраним обозначения u, v, w для проекций вектора скорости газа на координатные оси r, φ, z соответственно. Начальные данные при $t = 0$ для системы (2) в цилиндрических координатах перепишутся в виде

$$\begin{aligned} c(0, r, \varphi, z) &= c_0(r, \varphi, z), \\ \mathbf{V}(0, r, \varphi, z) &= \mathbf{V}_0(r, \varphi, z). \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда исходная поверхность раздела Γ в цилиндрических координатах будет задаваться уравнением $r = f(z, \varphi)$

Поскольку (2) является системой типа системы Ковалевской, а начальные данные — аналитические функции, то задача Коши (2), (3) по теореме Ковалевской [13] имеет при малых t единственное аналитическое решение, которое и задает фоновое течение. По построенному фоновому течению строится (например, в виде рядов по степеням t) закон движения поверхности слабого разрыва Γ_1 ($r = r_1(t, \varphi, z)$) как аналитическое решение соответствующей [14] задачи Коши

$$[r_1(u - r_{1t}) - r_{1\varphi} v - r_{1z} w]^2 = c^2(r_1^2 + r_{1\varphi}^2 + r_{1z}^2), \quad r_1(0, \varphi, z) = f(z, \varphi).$$

Имея закон движения поверхности Γ_1 , являющийся звуковой характеристикой фонового течения, получим значения параметров газа на ней:

$$\begin{aligned} c|_{\Gamma_1} &= c^0(t, r, \varphi, z)|_{r=r_1(t, \varphi, z)}, \\ \mathbf{V}|_{\Gamma_1} &= \mathbf{V}^0(t, r, \varphi, z)|_{r=r_1(t, \varphi, z)}. \end{aligned} \quad (4)$$

В дальнейшем предполагаются известными фоновое течение, поверхность Γ_1 , значения c^0 , \mathbf{V}^0 , заданные с помощью аналитических функций.

Для построения волны разрежения, как и в [2–11], поменяем ролями одну из независимых переменных r и одну из неизвестных функций c , т. е. за независимые переменные примем t , c , φ , а за неизвестные функции — r , \mathbf{V} . Якобиан такого преобразования $J = r_c$. В результате этой замены вместо (1) получим следующую систему:

$$\begin{aligned} r_t + \frac{v}{r}r_\varphi + r_z w &= u + \frac{\gamma - 1}{2}c \left[u_c + r_c \left(\frac{u + v_\varphi}{r} + w_z \right) - \frac{r_\varphi}{r}v_c - r_z w_c \right], \\ r_c \left[u_t + \frac{v}{r}u_\varphi + w u_z \right] + [u - r_t - \frac{v}{r}r_\varphi - w r_z]u_c + \frac{2}{\gamma - 1}c &= r_c \left[\frac{v^2}{r} + 2\Omega_3 v - (2\Omega_2 \cos \varphi)w \right], \\ r_c \left[v_t + \frac{v}{r}v_\varphi + w v_z \right] + [u - r_t - \frac{v}{r}r_\varphi - w r_z]v_c - \frac{2}{\gamma - 1}c \frac{r_\varphi}{r} &= \\ &= r_c \left[-\frac{uv}{r} - 2\Omega_3 u + (2\Omega_2 \sin \varphi)w \right], \\ r_c \left[w_t + \frac{v}{r}w_\varphi + w w_z \right] + [u - r_t - \frac{v}{r}r_\varphi - w r_z]w_c - \frac{2}{\gamma - 1}c r_z &= \\ &= r_c [(2\Omega_2 \cos \varphi)u - (2\Omega_2 \sin \varphi)v - g]. \end{aligned} \quad (5)$$

Течение в области между Γ_1 и Γ_0 (т. е. в области волны разрежения) будем строить как решение системы (5) с данными (4) на характеристике Γ_1 . Поскольку Γ_1 — характеристика кратности равной единице, то для получения единственного локально-аналитического решения необходимо задать одно дополнительное условие [2]. Если бы поверхность Γ убиралась медленно, то таким условием было бы условие непротекания на стенке. Если же поверхность Γ убирается мгновенно, этим условием в пространстве переменных (t, c, φ, z) является [2–11] соотношение

$$r(0, c, \varphi, z) = f(z, \varphi). \quad (6)$$

Это условие получается следующим образом: если функцию r , получившуюся при решении задачи о распаде разрыва, рассмотреть при изменении времени от $t > 0$ к $t = 0$, то при $t \rightarrow +0$ поверхность $r = r(t, c, \varphi, z)$ вне зависимости от c перейдет в начальную поверхность $\Gamma : r = f(z, \varphi)$. Таким образом, для описания волны разрежения между Γ_1 и Γ_0 имеем начально-краевую задачу (4)–(6), которая в дальнейшем будет называться задачей о распаде специального разрыва.

Теорема 1. *Существует $t_0 > 0$ такое, что при $0 \leq t \leq t_0$ в некоторой окрестности Γ_1 существует единственное локально-аналитическое решение задачи (4)–(6) о распаде разрыва.*

Доказательство теоремы, как и в [2–11], состоит в сведении к теореме о существовании единственного аналитического решения у характеристической задачи Коши стандартного вида [2].

Для выяснения вопроса о том, входит ли поверхность Γ_0 в область существования решения задачи (4)–(6), разложим его в ряд по степеням t :

$$\mathbf{g}(t, c, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{g}_k(c, \varphi, z) \frac{t^k}{k!}, \quad \mathbf{g}_k = \{r_k, u_k, v_k, w_k, \}, \quad (7)$$

что при малых t возможно в силу аналитичности решения задачи о распаде разрыва в некоторой окрестности Γ_1 .

Из первого уравнения системы (5) выразим слагаемые $\left(u - r_t - \frac{v}{r}r_\varphi - wr_z\right)$ через другие функции, входящие в (5), и полученное выражение подставим в остальные уравнения системы. В результате будем иметь

$$\begin{aligned}
 r_t - u + \frac{1}{r}r_\varphi v + r_z w &= \frac{\gamma - 1}{2}c \left[u_c + r_c \left(\frac{u + v_\varphi}{r} + w_z \right) - \frac{r_\varphi}{r}v_c - r_z w_c \right], \\
 r_c \left[u_t + \frac{v}{r}u_\varphi + wu_z \right] - \frac{\gamma - 1}{2}c \left[u_c + r_c \left(\frac{u + v_\varphi}{r} + w_z \right) - \frac{r_\varphi}{r}v_c - r_z w_c \right] u_c + \\
 &+ \frac{2}{\gamma - 1}c = r_c \left[\frac{v^2}{r} + 2\Omega_3 v - (2\Omega_2 \cos \varphi)w \right], \\
 r_c \left[v_t + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z \right] - \frac{\gamma - 1}{2}c \left[u_c + r_c \left(\frac{u + v_\varphi}{r} + w_z \right) - \frac{r_\varphi}{r}v_c - r_z w_c \right] v_c - \\
 &- \frac{2}{(\gamma - 1)}c \frac{r_\varphi}{r} = r_c \left[-\frac{uv}{r} - 2\Omega_3 u + (2\Omega_2 \sin \varphi)w \right], \\
 r_c \left[w_t + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z \right] - \frac{\gamma - 1}{2}c \left[u_c + r_c \left(\frac{u + v_\varphi}{r} + w_z \right) - \frac{r_\varphi}{r}v_c - r_z w_c \right] w_c - \\
 &- \frac{2}{\gamma - 1}cr_z = r_c [(2\Omega_2 \cos \varphi)u - (2\Omega_2 \sin \varphi)v - g]
 \end{aligned} \tag{8}$$

— систему, более удобную для вычисления коэффициентов рядов (7). В системе (8) положим $t = 0$ и, учитывая (6), получим

$$\begin{aligned}
 r_1 &= u_0 - \frac{r_{0\varphi}}{r_0}v_0 - r_{0z}w_0 + \frac{\gamma - 1}{2}c \left[u_{0c} - \frac{r_{0\varphi}}{r_0}v_{0c} - r_{0z}w_{0c} \right], \\
 \left[u_{0c} - \frac{r_{0\varphi}}{r_0}v_{0c} - r_{0z}w_{0c} \right] u_{0c} &= \frac{4}{(\gamma - 1)^2}, \\
 \left[u_{0c} - \frac{r_{0\varphi}}{r_0}v_{0c} - r_{0z}w_{0c} \right] v_{0c} &= -\frac{4}{(\gamma - 1)^2} \frac{r_{0\varphi}}{r_0}, \\
 \left[u_{0c} - \frac{r_{0\varphi}}{r_0}v_{0c} - r_{0z}w_{0c} \right] w_{0c} &= -\frac{4}{(\gamma - 1)^2} r_{0z}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Умножая третье уравнение системы (9) на $-\frac{r_{0\varphi}}{r_0}$, четвертое на $-r_{0z}$ и складывая три последних уравнения, получим

$$\left[u_{0c} - \frac{r_{0\varphi}}{r_0}v_{0c} - r_{0z}w_{0c} \right]^2 = \frac{4}{(\gamma - 1)^2} \left[1 + \frac{r_{0\varphi}^2}{r_0^2} + r_{0z}^2 \right],$$

или

$$u_{0c} - \frac{r_{0\varphi}}{r_0}v_{0c} - r_{0z}w_{0c} = \pm \frac{2}{\gamma - 1} \sqrt{1 + \frac{r_{0\varphi}^2}{r_0^2} + r_{0z}^2}.$$

Подставляя полученное выражение в (9) и интегрируя, имеем

$$\begin{aligned} r_1 &= \pm 2\alpha c \sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2} + u_{00} - \frac{f_\varphi}{f} v_{00} - f_z w_{00}, \quad 2\alpha = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \\ u_0 &= \pm \frac{2}{\gamma - 1} c \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2}} + u_{00}(\varphi, z), \\ v_0 &= \mp \frac{2}{\gamma - 1} c \frac{f_\varphi}{f \sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2}} + v_{00}(\varphi, z), \\ w_0 &= \mp \frac{2}{\gamma - 1} c \frac{f_z}{\sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2}} + w_{00}(\varphi, z). \end{aligned}$$

Далее в формулах выбирается верхний знак, соответствующий схлопыванию полости.

Произвольные функции $u_{00}(\varphi, z)$, $v_{00}(\varphi, z)$, $w_{00}(\varphi, z)$ определим из условий (4):

$$\mathbf{V}_{00} = \mathbf{V}_0|_\Gamma - \frac{2c_0|_\Gamma}{\gamma - 1} \mathbf{n}|_\Gamma,$$

где \mathbf{n} — единичный нормальный вектор поверхности Γ . В координатной форме \mathbf{V}_{00} имеет вид

$$\begin{aligned} u_{00} &= u_0|_\Gamma - \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2}} c_0|_\Gamma, \\ v_{00} &= v_0|_\Gamma + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{f_\varphi}{f \sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2}} c_0|_\Gamma, \\ w_{00} &= w_0|_\Gamma + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{f_z}{\sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2}} c_0|_\Gamma. \end{aligned}$$

Продифференцируем систему (8) по t , положим $t = 0$. Тогда, учитывая (6) и ранее полученные выражения r_1, u_0, v_0, w_0 , получим

$$\begin{aligned} r_2 &= u_1 - \frac{1}{r_0} r_{0\varphi} v_1 - r_{0z} w_1 + \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_{1c} - \frac{r_{0\varphi}}{r_0} v_{1c} - r_{0z} w_{1c} \right] + G_{11}(c, \varphi, z), \\ r_{1c} u_1 - \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_{0c} - \frac{r_{0\varphi}}{r} v_{0c} - r_{0z} w_{0c} \right] u_{1c} - \\ &- \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_{1c} - \frac{r_{0\varphi}}{r} v_{1c} - r_{0z} w_{1c} \right] u_{0c} = G_{21}(c, \varphi, z), \\ r_{1c} v_1 - \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_{0c} - \frac{r_{0\varphi}}{r} v_{0c} - r_{0z} w_{0c} \right] v_{1c} - \\ &- \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_{1c} - \frac{r_{0\varphi}}{r} v_{1c} - r_{0z} w_{1c} \right] v_{0c} = G_{31}(c, \varphi, z), \end{aligned}$$

$$r_{1c}w_1 - \frac{\gamma-1}{2}c \left[u_{0c} - \frac{r_{0\varphi}}{r}v_{0c} - r_{0z}w_{0c} \right] w_{1c} - \frac{\gamma-1}{2}c \left[u_{1c} - \frac{r_{0\varphi}}{r}v_{1c} - r_{0z}w_{1c} \right] w_{0c} = G_{41}(c, \varphi, z), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} G_{11} &= -\frac{1}{r_0}r_{1\varphi}v_0 + r_{1z}w_0 + \frac{1}{r_0^2}r_1r_{0\varphi}v_0 + \\ &+ \frac{\gamma-1}{2}c \left[r_{1c} \left(\frac{u_0 + v_{0\varphi}}{r_0} + w_{0z} \right) - \frac{r_{1\varphi}}{r_0}v_{0c} + \frac{r_{0\varphi}}{r_0^2}r_1v_{0c} - r_{1z}w_{0c} \right], \\ G_{21} &= -r_{1c} \left[\frac{v_0}{r_0}u_{0\varphi} + w_0u_{0z} \right] + \\ &+ \frac{\gamma-1}{2}c \left[r_{1c} \left(\frac{u_0 + v_{0\varphi}}{r_0} + w_{0z} \right) - \frac{r_{1\varphi}}{r_0}v_{0c} + \frac{r_{0\varphi}}{r_0^2}r_1v_{0c} - r_{1z}w_{0c} \right] u_{0c} + \\ &+ r_{1c} \left[\frac{v_0^2}{r_0} + 2\Omega_3v_0 - (2\Omega_2 \cos \varphi)w_0 \right], \\ G_{31} &= -r_{1c} \left[\frac{v_0}{r_0}v_{0\varphi} + w_0v_{0z} \right] + \\ &+ \frac{\gamma-1}{2}c \left[r_{1c} \left(\frac{u_0 + v_{0\varphi}}{r_0} + w_{0z} \right) - \frac{r_{1\varphi}}{r_0}v_{0c} + \frac{r_{0\varphi}}{r_0^2}r_1v_{0c} - r_{1z}w_{0c} \right] v_{0c} + \\ &+ \frac{2}{(\gamma-1)}c \left[\frac{r_{1\varphi}}{f} - \frac{f_\varphi}{f^2}r_1 \right] + r_{1c} \left[-\frac{u_0v_0}{r_0} - 2\Omega_3u_0 + (2\Omega_2 \sin \varphi)w_0 \right], \\ G_{41} &= -r_{1c} \left[\frac{v_0}{r_0}w_{0\varphi} + w_0w_{0z} \right] + \\ &+ \frac{\gamma-1}{2}c \left[r_{1c} \left(\frac{u_0 + v_{0\varphi}}{r_0} + w_{0z} \right) - \frac{r_{1\varphi}}{r_0}v_{0c} + \frac{r_{0\varphi}}{r_0^2}r_1v_{0c} - r_{1z}w_{0c} \right] w_{0c} + \\ &+ \frac{2}{\gamma-1}cr_{1z} + r_{1c}[(2\Omega_2 \cos \varphi)u_0 - (2\Omega_2 \sin \varphi)v_0 - g]. \end{aligned}$$

Введем вспомогательную функцию $W_1 = u_1 - \frac{1}{r_0}r_{0\varphi}v_1 - r_{0z}w_1$. Преобразуем систему (10) так же, как систему (9), получим дифференциальное уравнение для W_1 :

$$cW_{1c} - \alpha W_1 = F_1(c, \varphi, z).$$

Здесь

$$F_1 = -\frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2}} \left(G_{21} - \frac{f_\varphi}{f}G_{31} - f_zG_{41} \right).$$

Интегрируя уравнение, будем иметь

$$W_1 = c^\alpha \left[W_{10}(\varphi, z) + \int F_1(c, \varphi, z)c^{-\alpha-1}dc \right].$$

Подставляя полученное выражение для W_1 в систему (10), получим

$$r_2 = W_1 + \frac{\gamma - 1}{2} c W_{1c} + G_{11},$$

$$c u_{1c} - 2\alpha u_1 = F_{21}, \quad c v_{1c} - 2\alpha v_1 = F_{31}, \quad c w_{1c} - 2\alpha w_1 = F_{41},$$

где

$$F_{21} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2}} \left[G_{21} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2}} (\alpha W_1 + F_1) \right],$$

$$F_{31} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2}} \left[G_{31} + \frac{f_\varphi}{f\sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2}} (\alpha W_1 + F_1) \right],$$

$$F_{41} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2}} \left[G_{41} + \frac{f_z}{\sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2}} (\alpha W_1 + F_1) \right].$$

Интегрируя три последних уравнения системы, будем иметь

$$u_1 = c^{2\alpha} \left[u_{10}(\varphi, z) + \int F_{21}(c, \varphi, z) c^{-2\alpha-1} dc \right],$$

$$v_1 = c^{2\alpha} \left[v_{10}(\varphi, z) + \int F_{31}(c, \varphi, z) c^{-2\alpha-1} dc \right],$$

$$w_1 = c^{2\alpha} \left[w_{10}(\varphi, z) + \int F_{41}(c, \varphi, z) c^{-2\alpha-1} dc \right].$$

Детальный анализ показал, что структура коэффициентов \mathbf{g}_1 имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \mathbf{g}_1^4(\varphi, z) c^{2\alpha} + \mathbf{g}_1^3(\varphi, z) c^\alpha + \mathbf{g}_1^2(\varphi, z) c^2 + \mathbf{g}_1^1(\varphi, z) c + \mathbf{g}_1^0(\varphi, z), \\ \alpha \neq 2, 1 \left(\gamma \neq \frac{5}{3}, 3 \right), \\ \mathbf{g}_1^4(\varphi, z) c^4 + \mathbf{g}_1^2(\varphi, z) c^2 + \mathbf{g}_1^1(\varphi, z) c + \mathbf{g}_1^5(\varphi, z) c^2 \ln c + \mathbf{g}_1^0(\varphi, z), \\ \alpha = 2 \left(\gamma = \frac{5}{3} \right), \\ \mathbf{g}_1^2(\varphi, z) c^2 + \mathbf{g}_1^1(\varphi, z) c + \mathbf{g}_1^5(\varphi, z) c^2 \ln c + \mathbf{g}_1^3(\varphi, z) c \ln c + \mathbf{g}_1^0(\varphi, z), \\ \alpha = 1 \left(\gamma = 3 \right), \end{cases}$$

где $\mathbf{g}_1^k(\varphi, z)$ — функции, известным образом зависящие от начальных данных $f(z, \varphi)$,

$V^0(z, \varphi)$, $c^0(z, \varphi)$. Функции, не имеющие сомножителя c , имеют вид

$$\mathbf{g}_1^0 = \begin{pmatrix} R_1^0 \\ U_1^0 \\ V_1^0 \\ W_1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{00} - \frac{f_\varphi}{f} v_{00} - f_z w_{00}, \\ \frac{1}{f} v_{00} (u_{00\varphi} - v_{00}) - (2\Omega_3 v_{00} - 2\Omega_2 \cos \varphi w_{00}), \\ \frac{1}{f} (v_{00\varphi} + u_{00}) v_{00} + v_{00z} w_{00} + 2 (\Omega_3 u_{00} - \Omega_2 \sin \varphi w_{00}), \\ \frac{1}{f} w_{00\varphi} v_{00} + w_{00z} w_{00} + 2\Omega_2 \sin \varphi v_{00}(\varphi, z) + g. \end{pmatrix}$$

Продифференцируем систему (8) k раз по t , положим $t = 0$. Тогда, учитывая (6) и ранее полученные выражения для $\mathbf{g}_l = \{r_l, u_l, v_l, w_l\}$ ($l < k$), имеем для очередного номера k

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= u_k - \frac{1}{r_0} r_{0\varphi} v_k - r_{0z} w_k + \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_{kc} - \frac{r_{0\varphi}}{r_0} v_{kc} - r_{0z} w_{kc} \right] + G_{1k}(c, \varphi, z), \\ &\quad kr_{1c} u_k - \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_{0c} - \frac{r_{0\varphi}}{r} v_{0c} - r_{0z} w_{0c} \right] u_{kc} - \\ &\quad - \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_{kc} - \frac{r_{0\varphi}}{r} v_{kc} - r_{0z} w_{kc} \right] u_{0c} = G_{2k}(c, \varphi, z), \\ &\quad kr_{1c} v_k - \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_{0c} - \frac{r_{0\varphi}}{r} v_{0c} - r_{0z} w_{0c} \right] v_{kc} - \\ &\quad - \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_{kc} - \frac{r_{0\varphi}}{r} v_{kc} - r_{0z} w_{kc} \right] v_{0c} = G_{3k}(c, \varphi, z), \\ &\quad kr_{1c} w_k - \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_{0c} - \frac{r_{0\varphi}}{r} v_{0c} - r_{0z} w_{0c} \right] w_{kc} - \\ &\quad - \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_{kc} - \frac{r_{0\varphi}}{r} v_{kc} - r_{0z} w_{kc} \right] w_{0c} = G_{4k}(c, \varphi, z). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь G_{1k} , G_{2k} , G_{3k} , G_{4k} — функции, известным образом зависящие от \mathbf{g}_l ($l < k$), их вид не приводится ввиду громоздкости.

Вводя вспомогательную функцию $W_k = u_k - \frac{1}{r_0} r_{0\varphi} v_k - r_{0z} w_k$, и преобразуя систему (11) так же, как (10), получим

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= W_k + \frac{\gamma - 1}{2} c W_{kc} + G_{1k}, \\ cu_{kc} - 2\alpha k u_k &= F_{2k}, \quad cv_{kc} - 2\alpha k v_k = F_{3k}, \quad cw_{kc} - 2\alpha k w_k = F_{4k}, \end{aligned}$$

где

$$F_{2k} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2}} \left[G_{2k} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2}} (\alpha k W_k + F_k) \right],$$

$$F_{3k} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2}} \left[G_{3k} + \frac{f_\varphi}{f\sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2}} (\alpha k W_k + F_k) \right],$$

$$F_{4k} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2}} \left[G_{4k} + \frac{f_z}{\sqrt{1 + \frac{f_\varphi^2}{f^2} + f_z^2}} (\alpha k W_k + F_k) \right].$$

Интегрируя три последних уравнения системы, будем иметь

$$u_k = c^{2k\alpha} \left[u_{k0}(\varphi, z) + \int F_{2k}(c, \varphi, z) c^{-2\alpha k - 1} dc \right],$$

$$v_k = c^{2k\alpha} \left[u_{k0}(\varphi, z) + \int F_{3k}(c, \varphi, z) c^{-2\alpha k - 1} dc \right],$$

$$w_k = c^{2k\alpha} \left[u_{k0}(\varphi, z) + \int F_{4k}(c, \varphi, z) c^{-2\alpha k - 1} dc \right].$$

Произвольные функции u_{k0} , v_{k0} , w_{k0} , появившиеся в результате интегрирования системы (11), определяются при помощи условий (4). Для этого $c^0(t, \varphi, z)$ подставляется в правые части рядов (7), а $\mathbf{V}^0(t, \varphi, z)$, — в левые их части. Раскладывая получившиеся коэффициенты по степеням t и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим линейные алгебраические системы. Условие $c^0(0, \varphi, z) > 0$ гарантирует, что главные определители этих систем отличны от нуля и, следовательно, u_{k0} , v_{k0} , w_{k0} определяются однозначно.

Детальное исследование структуры коэффициентов рядов (7) приводит к следующей лемме.

Лемма 1. При $1 < \gamma < 3$ коэффициенты рядов (7) при $k > 1$ имеют вид

$$r_{k+1} = e_k(z, \varphi) + cP_{1k}(c, c \ln c, c^\lambda), \quad u_k = a_k(z, \varphi) + cP_{2k}(c, c \ln c, c^\lambda),$$

$$v_k = b_k(z, \varphi) + cP_{3k}(c, c \ln c, c^\lambda), \quad w_k = d_k(z, \varphi) + cP_{4k}(c, c \ln c, c^\lambda),$$

где P_{ik} — многочлены от указанных аргументов, их степени не превышают Ak , коэффициенты многочленов есть аналитические функции от z и φ , $\lambda > 0$, $A, \lambda = \text{const}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Доказательство леммы аналогично соответствующим доказательствам из [2–11] и проводится индукцией по k . Сначала доказывается, что G_{ki} обладают нужной структурой, а затем непосредственным интегрированием выясняется, что \mathbf{g}_k обладают указанной структурой. Отметим, что в отличие от [2–6] в данном случае, как и в задаче об истечении самогравитирующего газа [7–9, 11], в коэффициентах ряда (7) присутствуют слагаемые, у которых нет множителя c . Это требует более детального исследования структуры коэффициентов. На основании леммы можно утверждать, что решение задачи о распаде разрыва представимо в виде

$$r = r^0(t, z, \varphi) + cr^1(t, c, \varphi, z), \quad u = U^0(t, z, \varphi) + cU^1(t, c, \varphi, z),$$

$$v = V^0(t, z, \varphi) + cV^1(t, c, \varphi, z), \quad w = W^0(t, z, \varphi) + cW^1(t, c, \varphi, z).$$

Здесь

$$\begin{aligned} r^0(t, z, \varphi) &= f(z, \varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} e_k(z, \varphi) \frac{t^k}{k!}, & U^0(t, z, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z, \varphi) \frac{t^k}{k!}, \\ V^0(t, z, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z, \varphi) \frac{t^k}{k!}, & W^0(t, z, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} d_k(z, \varphi) \frac{t^k}{k!}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для функций $r^0(t, z, \varphi)$, $U^0(t, z, \varphi)$, $V^0(t, z, \varphi)$, $W^0(t, z, \varphi)$ справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Ряды (12) решают вспомогательную задачу*

$$\begin{aligned} r_t + \frac{1}{r} r_\varphi v + r_z W &= U, \\ U_t + \frac{1}{r} U_\varphi v + U_z W &= \frac{V^2}{r} + 2\Omega_3 V - (2\Omega_2 \cos \varphi) W, \\ V_t + \frac{1}{r} V_\varphi V + V_z W &= -\frac{UV}{r} - 2\Omega_3 U + (2\Omega_2 \cos \varphi) W, \\ W_t + \frac{1}{r} W_\varphi V + W_z W &= (2\Omega_2 \cos \varphi) U - (2\Omega_2 \sin \varphi) V - g, \\ r(0, z, \varphi) &= f(z, \varphi), & U(0, z, \varphi) &= u_{00}(z, \varphi), \\ V(0, z, \varphi) &= v_{00}(z, \varphi), & W(0, z, \varphi) &= w_{00}(z, \varphi). \end{aligned} \quad (13)$$

Лемма доказывается разложением в ряд по степеням t решения задачи (13) и сравнением полученных рядов с рядами (12). Ряды оказываются равными.

Система (13) не имеет особенностей в предположении, что точки с $r = 0$ не рассматриваются. Поэтому задача (13) по теореме Ковалевской [14] имеет единственное локально-аналитическое решение, которое можно представить рядами (12). Следовательно, ряды (12) сходятся.

На основании приведенных лемм доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Для $1 < \gamma < 3$ при $0 \leq t \leq t_0$ область сходимости рядов (7), а также рядов, задающих \mathbf{g}_t , \mathbf{g}_c , \mathbf{g}_φ , \mathbf{g}_z , покрывает всю область течения от Γ_1 до Γ_0 включительно. При этом закон движения свободной поверхности определяется из решения задачи (13).*

Доказательство теоремы аналогично доказательствам из [2–11] и проводится по методике [2], позволяющей установить неограниченность области сходимости рядов по соответствующей переменной в случае полиномиальной структуры коэффициентов ряда. Локальная сходимость рядов (7) в области

$$|z - z_0| < r_1, \quad |\varphi - \varphi_0| < r_2, \quad |c - c_0| < r_3, \quad |t| < r_4, \quad r_1, r_2, r_3, r_4 = \text{const} > 0$$

следует из теоремы 1. Поскольку коэффициенты рядов (7) есть многочлены от c , $c \ln c$, c^λ и степени многочленов не выше Ak , то доказывается, что существует постоянная $M > 0$ такая, что ряды (7) сходятся в области $M \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3 \cdot |t| < 1$, где

$$\xi_1 = \max\{c, |c \ln c|, c^\lambda, 1\}, \quad \xi_2 = \max\left\{1, \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{r_1}}\right\}, \quad \xi_3 = \max\left\{1, \frac{1}{1 - \frac{\varphi - \varphi_0}{r_2}}\right\}.$$

Поэтому для $0 \leq c \leq c_0$ точка $c = 0$, определяющая закон движения свободной поверхности Γ_0 , включается в область сходимости рядов (7).

Таким образом, на основании теоремы 2 получено решение задачи о распаде специального разрыва в виде рядов (7), сходящихся при малых t во всей области волны разряжения от Γ_1 до Γ_0 включительно.

Замечание 1. Из построенного решения (7) следует, что с помощью начальных условий невозможно получить осесимметричные течения газа, т. е. учет сил Кориолиса делает задачу принципиально трехмерной.

Замечание 2. В работах [7–9, 11] закон движения свободной поверхности находилась из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В данной работе этот закон находится из решения нелинейной системы уравнений с частными производными (13), даже численный анализ которой представляет определенные трудности.

2. Задача о непрерывном примыкании газа к вакууму

Из замечаний 1, 2 следует, что исследуемая задача принципиально трехмерна и моделирование закона движения свободной поверхности в цилиндрических координатах представляет большие трудности. Поэтому задачу о непрерывном примыкании газа к вакууму будем исследовать в декартовой системе координат.

Пусть в момент времени $t = t_0$ трехмерная поверхность Γ с уравнением $z = \phi(x, y)$ отделяет идеальный политропный газ от вакуума. Предполагается, что газ находится снаружи, а вакуум — внутри полости. В момент времени $t = t_0$ известны распределения параметров газа: $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0(\mathbf{x}) = \{u_0(\mathbf{x}), v_0(\mathbf{x}), w_0(\mathbf{x})\}$ — векторы скорости газа, где u_0, v_0, w_0 — проекции вектора скорости на декартовы координаты; $c = c_0(\mathbf{x})$ — скорости звука газа.

Далее задача исследуется при условии, что плотность газа, а следовательно, и скорости звука в газе c во все моменты времени равны нулю на свободной поверхности газ—вакуум Γ_0 : $c(t, \mathbf{x})|_{\Gamma_0} = 0$. Закон движения поверхности Γ_0 ($\Gamma_0|_{t=t_0} = \Gamma$) заранее неизвестен и определяется в ходе решения задачи, т. е. исследуется задача со свободной границей. К сожалению, для задачи о непрерывном примыкании газа к вакууму мы не можем в качестве начальных условий взять решение задачи о распаде специального разрыва, поскольку метод характеристических рядов [3] требует аналитических начальных данных, а построенное решение задачи о распаде специального разрыва заведомо не аналитично в окрестности свободной поверхности ($c = 0$). Поэтому функция $\phi(x, y)$, задающая поверхность Γ , а также функции \mathbf{V}_0, c_0 предполагаются аналитическими.

В системе (1) введем новую независимую переменную $\eta = z - z_0(t, x, y)$, где $z = z_0(t, x, y)$ — неизвестный закон движения свободной поверхности Γ_0 . Поскольку в начальный момент времени Γ_0 совпадает с Γ , то $z_0(t_0, x, y) = \phi(x, y)$. Заметим, что введя новую независимую переменную таким образом, мы приняли поверхность Γ_0 за новую координатную плоскость $\eta = 0$.

Перепишем систему (1) в новых независимых переменных

$$c_t + c_x u + c_y v + (w - z_{0t} - z_{0x}u - z_{0y}v)c_\eta + \frac{\gamma - 1}{2}c(u_x + v_y + w_\eta - z_{0x}u_\eta - z_{0y}v_\eta) = 0,$$

$$u_t + u_x u + u_y v + (w - z_{0t} - z_{0x}u - z_{0y}v)u_\eta + \frac{2}{\gamma - 1}c(c_x - z_{0x}c_\eta) = 2\Omega_3 v - 2\Omega_2 w,$$

$$\begin{aligned} v_t + v_x u + v_y v + (w - z_{0t} - z_{0x} u - z_{0y} v) v_\eta + \frac{2}{\gamma - 1} c(c_y - z_{0y} c_\eta) &= -2\Omega_3 u, \\ w_t + w_x u + w_y v + (w - z_{0t} - z_{0x} u - z_{0y} v) w_\eta + \frac{2}{\gamma - 1} c c_\eta &= 2\Omega_2 u - g. \end{aligned} \quad (14)$$

Для системы (14) при $t = t_0$ имеем условия:

$$\begin{aligned} c(t_0, x, y, \eta) &= c_0(x, y, \eta + \phi(x, y)), \\ u(t_0, x, y, \eta) &= u_0(x, y, \eta + \phi(x, y)), \\ v(t_0, x, y, \eta) &= v_0(x, y, \eta + \phi(x, y)), \\ w(t_0, x, y, \eta) &= w_0(x, y, \eta + \phi(x, y)), \end{aligned} \quad (15)$$

а также условие на свободной поверхности Γ_0 , т.е. при $\eta = 0$:

$$c(t, x, y, 0) = 0. \quad (16)$$

Чтобы решить поставленную начально-краевую задачу (14)–(16), необходимо, в частности, найти закон движения свободной поверхности Γ_0 (т.е. функцию $z = z_0(t, x, y)$), а также значения газодинамических параметров на ней. Для этого в системе (14) положим $\eta = 0$ и, учитывая условие (16), получим

$$\begin{aligned} z_{0t} + z_{0x} u_0 + z_{0y} v_0 &= w_0, \\ u_{0t} + u_{0x} u_0 + u_{0y} v_0 &= 2\Omega_3 v_0 - 2\Omega_2 w_0, \\ v_{0t} + v_{0x} u_0 + v_{0y} v_0 &= -2\Omega_3 u_0, \\ w_{0t} + w_{0x} u_0 + w_{0y} v_0 &= 2\Omega_2 u_0 - g. \end{aligned} \quad (17)$$

Из условий (15) при подстановке $\eta = 0$ получаются начальные условия для системы (17):

$$\begin{aligned} z_0(t_0, x, y) &= \phi(x, y), \\ u_0(t_0, x, y) &= u_0(x, y, \phi(x, y)), \\ v_0(t_0, x, y) &= v_0(x, y, \phi(x, y)), \\ w_0(t_0, x, y) &= w_0(x, y, \phi(x, y)). \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку система (17) аналитическая и начальные условия (18) задаются аналитическими функциями, то по теореме Ковалевской [13] задача (17), (18) имеет единственное аналитическое решение

$$z_0 = z_{00}(t, x, y), \quad u_0 = u_{00}(t, x, y), \quad v_0 = v_{00}(t, x, y), \quad w_0 = w_{00}(t, x, y). \quad (19)$$

Теперь для системы (14), используя решение (19), ставим другую начально-краевую задачу — с данными на свободной поверхности Γ_0 ($\eta = 0$)

$$\begin{aligned} c(t, x, y, 0) &= 0, \\ u(t, x, y, 0) &= u_{00}(t, x, y), \\ v(t, x, y, 0) &= v_{00}(t, x, y), \\ w(t, x, y, 0) &= w_{00}(t, x, y) \end{aligned} \quad (20)$$

и с начальными условиями (15).

Теорема 2. *Существует $t_* > t_0$ такое, что при $t_0 \leq t \leq t_*$ в некоторой окрестности Γ_0 существует единственное локально-аналитическое решение задачи (14), (15), (20).*

Доказательство данной теоремы сводится, как и в [2], к теореме о существовании единственного аналитического решения у характеристической задачи Коши стандартного вида [2]. Задача (14), (20) является характеристической задачей Коши с данными на характеристике кратности, равной пяти, поэтому для построения единственного локально-аналитического решения надо задать пять дополнительных условий. Этими условиями и являются (15).

Для конструктивного представления решения задачи (14), (15), (20) разложим его в ряд по степеням η :

$$\mathbf{q}(t, x, y, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{q}_k(t, x, y) \frac{\eta^k}{k!}, \quad \mathbf{q} = \{c, u, v, w\}, \quad (21)$$

что при малых η возможно в силу аналитичности решения задачи (14), (15), (20) в некоторой окрестности Γ_0 .

В системе (14) положим $\eta = 0$ и, учитывая (20), получим тождество.

Если продифференцировать систему (14) по η и положить $\eta = 0$, то будем иметь систему транспортных уравнений (см. [2–10])

$$\begin{aligned} c_{1t} + c_{1x}u_0 + c_{1y}v_0 + \frac{\gamma+1}{2}(w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)c_1 + \frac{\gamma-1}{2}(u_{0x} + v_{0y})c_1 &= 0, \\ u_{1t} + u_{1x}u_0 + u_{1y}v_0 + (w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)u_1 - \frac{2}{\gamma-1}z_{0x}c_1^2 + \\ &+ u_{0x}u_1 + (u_{0y} - 2\Omega_3)v_1 + 2\Omega_2w_1 = 0, \\ v_{1t} + v_{1x}u_0 + v_{1y}v_0 + (w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)v_1 - \frac{2}{\gamma-1}z_{0y}c_1^2 + \\ &+ (v_{0x} + 2\Omega_3)u_1 + v_{0y}v_1 = 0, \\ w_{1t} + w_{1x}u_0 + w_{1y}v_0 + (w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)w_1 + \frac{2}{\gamma-1}c_1^2 + \\ &+ (w_{0x} - 2\Omega_2)u_1 + w_{0y}v_1 = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

решение которой описывает поведение первых выводящих с Γ_0 производных газодинамических параметров.

Продифференцируем систему (14) по η k раз, положим $\eta = 0$ и, учитывая уже найденные коэффициенты ряда (21), будем иметь

$$\begin{aligned} c_{kt} + c_{kx}u_0 + c_{ky}v_0 + \left(\frac{\gamma-1}{2}k + 1\right)c_1(w_k - z_{0x}u_k - z_{0y}v_k) + \\ + \left(\frac{\gamma-1}{2} + k\right)c_k(w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1) + \frac{\gamma-1}{2}c_k(u_{0x} + v_{0y}) = F_{1k}(t, x, y), \\ u_{kt} + u_{kx}u_0 + u_{ky}v_0 + k(w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)u_k + u_{0x}u_k + u_{0y}v_k + \\ + (w_k - z_{0x}u_k - z_{0y}v_k)u_1 - \frac{2}{\gamma-1}(k+1)z_{0x}c_1c_k - 2\Omega_3v_k + 2\Omega_2w_k = F_{2k}(t, x, y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v_{kt} + v_{kx}u_0 + v_{ky}v_0 + k(w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)v_k + v_{0x}u_k + v_{0y}v_k + \\
& + (w_k - z_{0x}u_k - z_{0y}v_k)v_1 - \frac{2}{\gamma - 1}(k + 1)z_{0y}c_1c_k + 2\Omega_2u_k = F_{3k}(t, x, y), \\
& w_{kt} + w_{kx}u_0 + w_{ky}v_0 + k(w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)w_k + w_{0x}u_k + w_{0y}v_k + \\
& + (w_k - z_{0x}u_k - z_{0y}v_k)w_1 + \frac{2}{\gamma - 1}(k + 1)c_1c_k - 2\Omega_2u_k = F_{4k}(t, x, y). \quad (23)
\end{aligned}$$

Функции $F_{ik}(t, x, y)$, $1 \leq i \leq 4$, известным образом зависят от уже найденных коэффициентов ряда (21) \mathbf{q}_l , $l < k$, и ввиду громоздкости не приводятся. Единственное решение систем (22), (23) получается при задании начальных условий $\mathbf{q}_k(t_0, x, y)$, которые однозначно определяются при разложении в ряд по степеням η условий (15).

Системы (23) линейны, поэтому первые особенности решений этих систем совпадают с особенностями решений систем (17), (22). Функции (19), задающие решение системы (17), особенностей не имеют, следовательно, для определения момента времени $t = t_*$, являющегося граничной точкой области сходимости рядов (21), необходимо исследовать систему транспортных уравнений (22).

Таким образом, решение задачи о непрерывном примыкании газа к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса построено в виде рядов, сходящихся в окрестности свободной границы газ—вакуум. Для определения закона движения свободной поверхности получена система дифференциальных уравнений с частными производными.

3. Численно-аналитическое исследование поведения свободной границы

Исследуем систему (17) с помощью семейства характеристических кривых [13], являющихся решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае уравнений (17) эта система имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{d\tau} &= 1, & \frac{dx}{d\tau} &= u_0, & \frac{dy}{d\tau} &= v_0, & \frac{dz_0}{d\tau} &= w_0, \\
\frac{du_0}{d\tau} &= 2\Omega_3v_0 - 2\Omega_2w_0, & \frac{dv_0}{d\tau} &= -2\Omega_3u_0, & \frac{dw_0}{d\tau} &= 2\Omega_2u_0 - g. \quad (24)
\end{aligned}$$

Последние три уравнения (24) совпадают с известной системой обыкновенных дифференциальных уравнений [12, 15, 16], описывающей движение отдельной материальной точки под действием сил тяготения и Кориолиса. В работах [15, 16] решение этой системы было построено в виде рядов, в [12] подробно исследовалась система для так называемой тяжелой материальной точки, в которой в первых двух уравнениях полагается $w = 0$, а третье уравнение просто исключается. В данной работе построим и проанализируем решение системы (24) без упрощающих предположений.

Проинтегрировав первое уравнение системы (24), получим $\tau = t - t_0$. Теперь в качестве начальных условий берутся координаты точки $M_0(x_{00}, y_{00}, z_{00})$, лежащей на начальной свободной поверхности Γ , и значения газодинамических параметров (15) u_{00}, v_{00}, w_{00} , вычисленные в этой точке. Тогда решение системы (24) с такими начальными условиями задает траекторию движения точки, лежащей на свободной поверхности Γ_0 .

Проинтегрируем (24), заметим, что $\Omega = \sqrt{\Omega_2^2 + \Omega_3^2}$. В итоге получим

$$\begin{aligned}
u_0 &= C_1 \cos(2\Omega\tau) + C_2 \sin(2\Omega\tau) + \frac{\cos\psi}{2\Omega}g, \\
v_0 &= -C_1 \sin\psi \sin(2\Omega\tau) + C_2 \sin\psi \cos(2\Omega\tau) - \frac{\sin 2\psi}{2}g\tau + C_3 \cos\psi, \\
w_0 &= C_1 \cos\psi \sin(2\Omega\tau) - C_2 \cos\psi \cos(2\Omega\tau) - (g \sin^2\psi)\tau + C_3 \sin\psi, \\
x &= \frac{C_1}{2\Omega} \sin(2\Omega\tau) - \frac{C_2}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) + \frac{\cos\psi}{2\Omega}g\tau + C_4, \\
y &= C_1 \frac{\sin\psi}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) + C_2 \frac{\sin\psi}{2\Omega} \sin(2\Omega\tau) - \frac{\sin 2\psi}{4}g\tau^2 + (C_3 \cos\psi)\tau + C_5, \\
z_0 &= -C_1 \frac{\cos\psi}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) - C_2 \frac{\cos\psi}{2\Omega} \sin(2\Omega\tau) - \frac{\sin^2\psi}{2}g\tau^2 + (C_3 \sin\psi)\tau + C_6. \quad (25)
\end{aligned}$$

Здесь $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$, — произвольные постоянные, появившиеся в результате интегрирования.

Учитывая начальные условия,

$$\begin{aligned}
x|_{t=t_0} &= x_{00}, & y|_{t=t_0} &= y_{00}, & z_0|_{t=t_0} &= z_{00}, \\
u_0|_{t=t_0} &= u_{00}, & v_0|_{t=t_0} &= v_{00}, & w_0|_{t=t_0} &= w_{00}, \quad (26)
\end{aligned}$$

получим выражения для констант:

$$\begin{aligned}
C_1 &= u_{00} - \frac{\cos\psi}{2\Omega}g, & C_2 &= v_{00} \sin\psi - w_{00} \cos\psi, & C_3 &= v_{00} \cos\psi + w_{00} \sin\psi, \\
C_4 &= x_{00} + \frac{1}{2\Omega}(v_{00} \sin\psi - w_{00} \cos\psi), \\
C_5 &= y_{00} - \frac{\sin\psi}{2\Omega}u_{00} + \frac{\sin 2\psi}{8\Omega^2}g, \\
C_6 &= z_{00} + \frac{\cos\psi}{2\Omega}u_{00} - \frac{\cos^2\psi}{4\Omega^2}g. \quad (27)
\end{aligned}$$

Вид решения (25), (27) подтверждает известный вывод о том, что система (24), уравнения которой описывают движение свободной поверхности Γ_0 , инвариантна относительно сдвигов вдоль оси z .

Исключим τ из четвертого и пятого уравнений (25). Для этого из формул для x, y найдем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
C_1 \sin(2\Omega\tau) - C_2 \cos(2\Omega\tau) &= 2\Omega \left(x - \frac{\cos\psi}{2\Omega}g\tau - C_4 \right), \\
C_1 \cos(2\Omega\tau) + C_2 \sin(2\Omega\tau) &= \frac{2\Omega}{\sin\psi} \left(y + \frac{1}{4} \sin(2\psi)g\tau^2 - C_3\tau - C_5 \right). \quad (28)
\end{aligned}$$

Возводя в квадрат обе части равенств (28) и складывая получившиеся выражения, будем иметь

$$C_1^2 + C_2^2 = 4\Omega^2 \left(x - \frac{\cos\psi}{2\Omega}g\tau - C_4 \right)^2 + \frac{4\Omega^2}{\sin^2\psi} \left(y + \frac{1}{4} \sin(2\psi)g\tau^2 - C_3\tau - C_5 \right)^2. \quad (29)$$

Линия (29), являющаяся проекцией траектории движения точки на свободной поверхности Γ_0 на плоскость xOy , может быть названа эллипсом Кориолиса, параметры которого соответственно равны

$$a^2 = \frac{C_1^2 + C_2^2}{4\Omega^2}, \quad b^2 = \frac{(C_1^2 + C_2^2) \sin^2 \psi}{4\Omega^2},$$

$$x_0(\tau) = \frac{\cos \psi}{2\Omega} g\tau + C_4, \quad y_0(\tau) = -\frac{1}{4} \sin(2\psi) g\tau^2 + C_3\tau + C_5. \quad (30)$$

Здесь a, b — полуоси эллипса, $x_0(\tau), y_0(\tau)$ — координаты центра эллипса. Если исключить τ из двух последних соотношений (30), то получим уравнение

$$y_0 = C_5 + \frac{2\Omega C_3}{g \cos \psi} (x_0 - C_4) - \Omega \sin \psi (x_0 - C_4)^2.$$

Следовательно, центр эллипса Кориолиса (29), в свою очередь, движется по параболе.

Заметим, что начальные условия (26) однозначно определяют константы (27), а значит, и параметры эллипса Кориолиса, т. е. для каждого начальных условий (26) строится свой эллипс Кориолиса. Окончательно можно сделать вывод: *каждая частица, лежащая на свободной поверхности Γ_0 , движется по траектории, в проекции которой на плоскость xOy лежит свой эллипс Кориолиса с параметрами, однозначно определяемыми начальным положением точки и начальными значениями газодинамических параметров.*

Следует отметить, что из анализа движения отдельных частиц на свободной поверхности Γ_0 сделать вывод о движении всей поверхности Γ_0 достаточно трудно по следующим причинам:

- 1 — для каждой частицы, лежащей на начальной поверхности, приходится строить свой эллипс Кориолиса со своим центром и своими полуосями;
- 2 — хотя полуоси эллипса со временем не изменяются, его центр движется, и даже в проекции траектории на плоскость xOy возникает достаточно сложная кривая;
- 3 — кроме того, траектории движения частиц являются пространственными линиями, и без постановки конкретных начальных условий понять, будут ли они двигаться вверх или вниз, невозможно.

В силу перечисленного решение (25) при постановке конкретных начальных условий необходимо анализировать численно.

Используя метод характеристических кривых, сведем [13] систему транспортных уравнений (22) к виду, удобному для численного исследования:

$$c_{1\tau} + \frac{\gamma + 1}{2} \left(w_1 - \frac{z_{0\tau}}{u_0} u_1 - \frac{z_{0\tau}}{v_0} v_1 \right) c_1 + \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{u_{0\tau}}{u_0} + \frac{v_{0\tau}}{v_0} \right) c_1 = 0,$$

$$u_{1\tau} + \left(w_1 - \frac{z_{0\tau}}{u_0} u_1 - \frac{z_{0\tau}}{v_0} v_1 \right) u_1 - \frac{2}{\gamma - 1} \frac{z_{0\tau}}{u_0} c_1^2 + \frac{u_{0\tau}}{u_0} u_1 + \left(\frac{u_{0\tau}}{v_0} - 2\Omega_3 \right) v_1 + 2\Omega_2 w_1 = 0,$$

$$v_{1\tau} + \left(w_1 - \frac{z_{0\tau}}{u_0} u_1 - \frac{z_{0\tau}}{v_0} v_1 \right) v_1 - \frac{2}{\gamma - 1} \frac{z_{0\tau}}{v_0} c_1^2 + \left(\frac{v_{0\tau}}{u_0} + 2\Omega_3 \right) u_1 + \frac{v_{0\tau}}{v_0} v_1 = 0,$$

$$w_{1\tau} + \left(w_1 - \frac{z_{0\tau}}{u_0} u_1 - \frac{z_{0\tau}}{v_0} v_1 \right) w_1 + \frac{2}{\gamma - 1} c_1^2 + \left(\frac{w_{0\tau}}{u_0} - 2\Omega_2 \right) u_1 + \frac{w_{0\tau}}{v_0} v_1 = 0. \quad (31)$$

Система (31) является нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений и при задании конкретных начальных данных может быть исследована численными методами.

В заключение рассмотрим течение, примыкающее к вакууму и в начальный момент времени закрученное как твердое тело. В работе [12] при моделировании течения газа в вертикальной части торнадо использовано цилиндрически-симметричное течение, примыкающее к вакууму и имеющее в главной части следующие значения газодинамических параметров:

$$c(r) = \omega \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}(r^2 - r_*^2)}, \quad u_1(r) = 0, \quad u_2(r) = \omega r, \quad u_3(r) = w_{00} = \text{const} > 0.$$

Здесь u_1, u_2, u_3 — проекции вектора скорости в цилиндрической системе координат, $r \geq r_*$. Эти значения газодинамических параметров возьмем в качестве начальных условий для системы (24). В декартовой системе координат они будут иметь вид

$$c_0(x, y, z) = \omega \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}(x^2 + y^2 - r_*^2)},$$

$$u_0(x, y, z) = -\omega y, \quad v_0(x, y, z) = \omega x, \quad w_0(x, y, z) = w_{00},$$

а начальная свободная поверхность Γ будет цилиндрической поверхностью, в основании которой окружность радиуса r_*

$$x^2 + y^2 = r_*^2. \quad (32)$$

В расчетах траекторий движения частиц по формулам (25) использовались безразмерные константы [12]

$$\omega = 0.1, \quad \Omega = 0.01, \quad \psi = \frac{\pi}{6}, \quad g = 0.09, \quad r_* = 1.$$

Начальные данные задавались в сорока точках начальной окружности (32). Для простоты восприятия на рис. 2 приведены восемь точек, за эволюцией которых мы будем следить и далее.

Во всех рассчитанных вариантах полагалось $z_{00} = 1$, а значение w_{00} изменялось от 0.1 до 10.

Расчеты показали следующее:

1 — при начальных условиях w_{00} , принадлежащих отрезку $[0.1; 10]$, траектория частицы, выходящая из точки начальной окружности (см. рис. 2), некоторое время $\tau = \tau^*$ является восходящей, после чего становится нисходящей. При этом чем больше w_{00} , тем больше τ^* . Для каждой частицы газа время τ^* одно и то же, а высота подъема своя:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$z_0, \tau = 0$	1	1	1	1	1	1	1	1
$z_0, \tau = 6$	5.371	5.349	5.340	5.348	5.370	5.392	5.402	5.393
$z_0, \tau = 10$	6.464	6.402	6.375	6.398	6.458	6.520	6.548	6.524

2 — во все моменты времени, пока частицы газа на свободной поверхности двигались вверх, сохранялась закрутка течения против часовой стрелки (рис. 3);

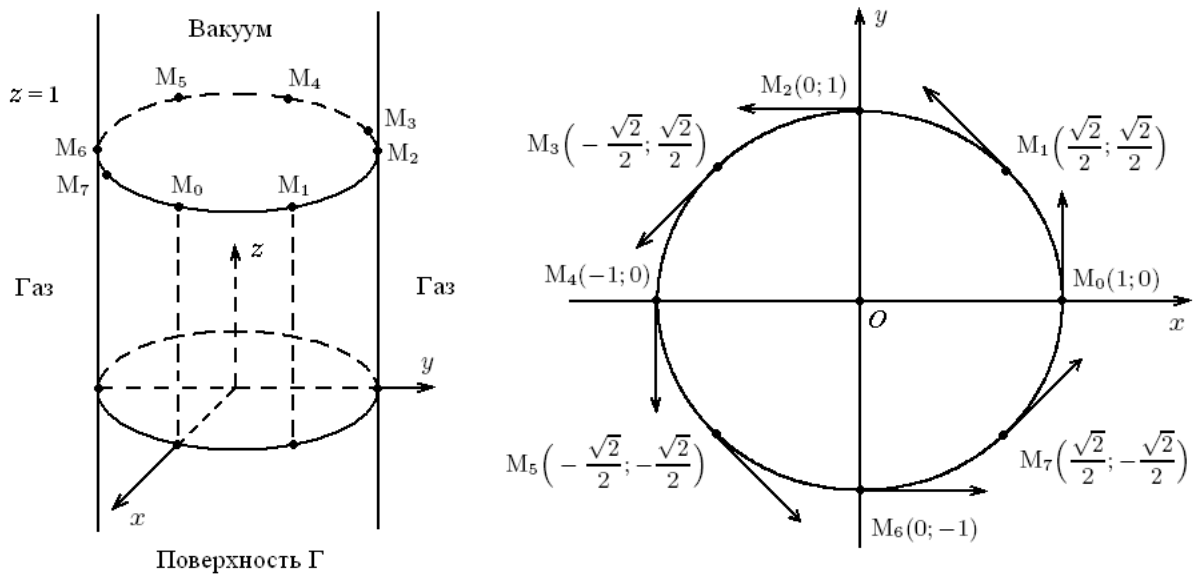


Рис. 2. Положение точек на начальной окружности

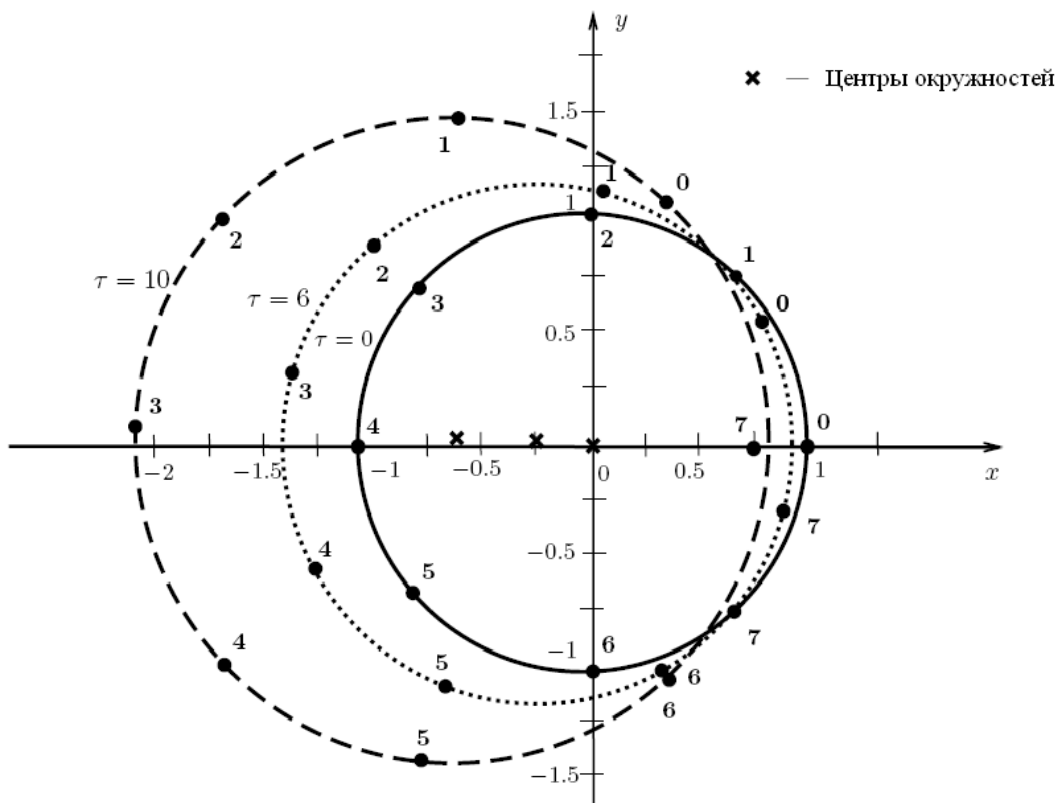


Рис. 3. Проекция восьми точек на плоскость xOy в моменты времени $\tau = 0, 6$ и 10

З — с изменением времени проекция свободной поверхности на плоскость xOy оставалась окружностью. Радиус окружности увеличивался, а центр смещался на запад (существенно) и на север (незначительно). Заметим, что из результатов работы [11] следует, что при отсутствии силы Кориолиса свободная поверхность Γ_0 во все моменты времени является цилиндром, ось которого неподвижна, а радиус увеличивается.

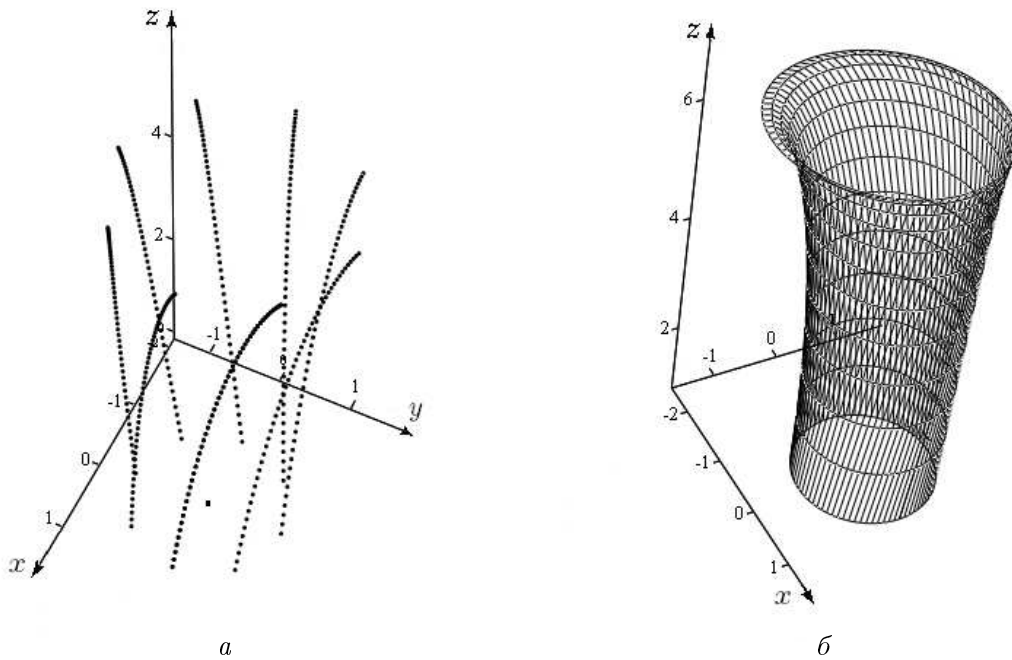


Рис. 4. Траектории движения восьми (а) и 40 (б) точек при $\tau = 0-10$

На рис. 4 приведены траектории движения в течении времени при $\tau = 0-10$ восьми и 40 точек, которые в момент времени $\tau = 0$ лежали на начальной окружности.

В результате полученных данных можно сделать вывод, что в течение некоторого времени τ^* частицы газа на свободной поверхности движутся по восходящим винтовым линиям. Эти линии существенно деформированы в западном и незначительно в северном направлении.

Авторы благодарят С.П. Баутина за полезное обсуждение работы.

Список литературы

- [1] СИДОРОВ А.Ф. Избранные труды. Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
- [2] БАУТИН С.П., ДЕРЯБИН С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск: Наука, 2005. 390 с.
- [3] БАУТИН С.П., ДЕРЯБИН С.Л. Аналитическое моделирование истечения идеального газа в вакуум // Успехи механики. 2006. Т. 4, № 1. С. 77–120.
- [4] БАУТИН С.П. Схлопывание одномерной полости // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 1. С. 50–59.
- [5] БАУТИН С.П., ДЕРЯБИН С.Л. Истечение идеального газа в вакуум // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 4. С. 817–820.
- [6] ДЕРЯБИН С.Л. Трехмерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа // Динамика сплошной среды: Сб. науч.тр. АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики, 1984. Вып. 65. С. 56–74.

- [7] ДЕРЯБИН С.Л., ЧУЕВ Н.П. Сферически-симметричное истечение самогравитирующего идеального газа в вакуум // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 2. С. 77–84.
- [8] ДЕРЯБИН С.Л. Одномерное истечение самогравитирующего идеального газа в вакуум // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 4. С. 32–44.
- [9] ДЕРЯБИН С.Л., МЕЗЕНЦЕВ А.В. Одномерное истечение в вакуум нормального газа, гравитирующего по Ньютону // Там же. 2009. Т. 14, № 3. С. 25–36.
- [10] ДЕРЯБИН С.Л. Трехмерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа в условиях действия внешних массовых сил // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики, 1987. Вып. 83. С. 60–71.
- [11] ДЕРЯБИН С.Л. Начальная эволюция закрученных газовых объемов, примыкающих к вакууму // Вычисл. технологии. 2005. Т. 10, № 1. С. 21–36.
- [12] БАУТИН С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 92 с.
- [13] КУРАНТ Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
- [14] ОВСЯННИКОВ Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
- [15] ЛОЙЦЯНСКИЙ Л.Г., ЛУРЬЕ А.И. Курс теоретической механики. Т. 2. М.: Наука, 1983. 640 с.
- [16] КОЧИН Н.Е., КИВЕЛЬ И.А., РОЗЕ Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.

*Поступила в редакцию 4 сентября 2009 г.,
с доработки — 17 марта 2010 г.*