

3D-код для моделирования ультрарелятивистских пучков*

М. А. БОРОНИНА, В. А. ВШИВКОВ

Учреждение Российской академии наук

*Институт вычислительной математики и математической геофизики,
Новосибирск, Россия*

e-mail: boronina@ssd.sscs.ru, vsh@ssd.sscs.ru

Е. Б. ЛЕВИЧЕВ, С. А. НИКИТИН, Е. А. СИМОНОВ

Учреждение Российской академии наук

Институт ядерной физики, Новосибирск, Россия

e-mail: levichev@inp.nsk.su, nikitins@inp.nsk.su, simonov@inp.nsk.su

В. Н. СНЫТНИКОВ

Учреждение Российской академии наук

Институт катализа им. Г.К. Борескова, Новосибирск, Россия

e-mail: snyt@catalysis.ru

Представлен PIC-алгоритм численного моделирования взаимодействия встречных пучков заряженных частиц в коллайдерах, наиболее полно учитывающий трехмерность и ультрарелятивизм задачи. Для расчета начальных и граничных условий предложено использовать потенциал искусственного вида. Приведено сравнение с известной программой Guinea-Pig, основанной на слайсовой модели, на примере сфокусированных встречных пучков.

Ключевые слова: релятивистский фактор, заряженный пучок, электромагнитные поля, метод частиц в ячейках, уравнения Максвелла.

Введение

Для изучения динамических коллективных эффектов взаимодействия встречных пучков в новейших проектах международного линейного коллайдера ILC [1] и Супер-В фабрики [2] необходимо создать трехмерные релятивистские коды. С их помощью предполагается численно воспроизводить динамику 1 млрд и более заряженных частиц при близких к критическим значениям параметров встречных пучков, влияющих на их устойчивость. Наиболее эффективно это возможно в суперкомпьютерной параллельной реализации кодов. Но прежде требуется развитие их элементов — алгоритмов расчета самосогласованного электромагнитного поля системы релятивистских зарядов. К настоящему времени наиболее развитый подход к решению подобных задач основан на разделении пучков на тонкие слои частиц (слайсы), перпендикулярные оси коллективного движения [3–7]. При ультрарелятивистских скоростях и малом углом раз-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00615 и № 09-02-01131).

© ИВТ СО РАН, 2009.

бросе в пучках поле частиц усиливается в плоскости, перпендикулярной движению, и ослабляется вдоль направления движения в сравнении с нерелятивистским случаем. Модельные частицы в слайсе участвуют в создании поля сил, влияющего на частицы другого слайса. В то же время их влиянием на движение частиц собственного слайса пренебрегается.

Такой подход позволяет решать задачу о взаимодействии встречных пучков в коллайдерах традиционного типа. Однако сведение задачи к двумерной затрудняет учет продольных эффектов. Особенно это может проявиться в случае линейных встречных пучков со сверхвысокими плотностями. За весьма короткое время взаимодействия, зависящее от длины сгустка, становится возможным сильное сжатие (пинчирование) и даже разрушение пучка [8]. Учет этих эффектов важен для исследования взаимодействия пучков при относительно больших углах встречи, которые предполагаются в проектах ILC и супер-В фабрики. Подход, использующий трехмерный PIC-метод, наиболее близко отвечает физической формулировке задачи. Он необходим для проверки существующих кодов со свойственными им ограничениями слайсовой модели пучка. По мере развития метода вместе с созданием параллельных кодов для суперкомпьютеров встанет задача его применения для расчета эффектов встречи по большому числу оборотов в циклических коллайдерах.

Основная проблема в решении задач об ультрарелятивистском движении пучков связана с большим значением релятивистского фактора частиц. Известно, что при движении заряда его электрическое поле в лабораторной системе координат вытягивается в γ раз поперек оси движения и сокращается в γ^2 раз вдоль этой оси (например, при $\gamma \sim 10^3$ отношение поперечного размера к продольному, на которых поля близки по абсолютной величине, составляет примерно 10^9). Это приводит к необходимости создания и изучения новых методов для исследования динамики пучков частиц.

Цель работы — создание алгоритмов, позволяющих решать нестационарные задачи о взаимодействии ультрарелятивистских заряженных сгустков во внешних полях в трехмерном случае.

1. Постановка задачи

1.1. Исходные уравнения

В параллелепипедальной области $[0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3]$ движутся с релятивистской скоростью пучки заряженных частиц в самосогласованных электромагнитных полях. Каждый пучок характеризуется формой, распределением плотности частиц внутри пучка, линейными размерами и положением в области.

При описании такого движения можно воспользоваться кинетическим уравнением Власова для функции распределения частиц f (позитронов e^+ или электронов e^-) и системой уравнений Максвелла в гауссовой системе единиц. Взяв за L характерный размер области, за характерную скорость — скорость света $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с и задав соотношения на характерные величины $p_0 = m_e c$, $F_0 = \frac{m_e c^2}{L}$, $E_0 = \frac{m_e c^2}{eL}$, $H_0 = \frac{m_e c^2}{eL}$, $\rho_0 = \frac{E_0}{4\pi L}$, $j_0 = c\rho_0$, можем записать уравнения в безразмерном виде:

$$\frac{\partial f_{e^{+,-}}}{\partial t} + \mathbf{v}_{e^{+,-}} \cdot \frac{\partial f_{e^{+,-}}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_{e^{+,-}} \cdot \frac{\partial f_{e^{+,-}}}{\partial \mathbf{p}} = 0; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = (n_{e+} - n_{e-}), \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{F}_{e+,-} = \mathbf{E} + [\mathbf{v}_{e+,-}, \mathbf{H}]$ — сила Лоренца, действующая на частицу; $\mathbf{p}_{e+,-} = \frac{\mathbf{v}_{e+,-}}{\sqrt{1 - v_{e+,-}^2}}$ — импульс частицы; $\gamma_{e+,-} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{e+,-}^2}}$ — релятивистский фактор частицы.

Входящие в эти уравнения плотность частиц и плотность тока определяются через интегралы по объему от функции распределения частиц:

$$n_{e+} = \int_{V_0} f_{e+} d\mathbf{p}, \quad n_{e-} = \int_{V_0} f_{e-} d\mathbf{p}, \quad \mathbf{j} = \int_{V_0} (f_{e+} \mathbf{v}_{e+} - f_{e-} \mathbf{v}_{e-}) d\mathbf{p}.$$

В общем случае решить такую задачу можно только численно. Но в связи с отмеченными во введении свойствами этой задачи для $\gamma \sim 10^3$ численное решение имеет свои особенности. Традиционный путь решения задачи связан с введением измельченной сетки в продольном направлении и увеличением расчетной области в поперечном направлении. Но такое увеличение расчетной сетки пропорционально γ и неприемлемо даже для современных суперкомпьютеров по объему памяти и быстродействию. Сократить объем этой работы можно за счет приближения границы расчетной области достаточно близко к пучку. В этом случае поперечный размер области необходимо сократить примерно в γ раз и более с тем, чтобы она не выходила в волновую зону. При этом возникают трудности в нахождении самосогласованных начальных и граничных условий, а фактически — в постановке вычислительного эксперимента. Рассмотрим последовательно способы преодоления этих проблем.

1.2. Начальные условия задачи

В начальный момент времени в трехмерном пространстве движутся один-два пучка. Пучки состоят либо из электронов, либо из позитронов. Пучки характеризуются положением центра пучка (x_0, y_0, z_0) , знаком заряда частиц и импульсом пучка, количеством частиц одного сорта. Распределение частиц в пучке задается по нормальному закону с дисперсиями $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ в каждом из направлений.

Распределение частиц по скоростям производится также по нормальному закону с математическим ожиданием \mathbf{v}_0 , с соответствующими дисперсиями $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$ в каждом направлении. Для усиления эффектов встречи используется специальное начальное условие фокусировки. Ниже описан способ определения координат частиц пучка в фазовом пространстве с учетом фокусировки.

В области решения в начальный момент времени задаются электромагнитные поля. При движении заряда q его электрическое поле в лабораторной системе координат определяется формулой [9]

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \frac{q\mathbf{R}}{R^3}, \quad (3)$$

а магнитное поле формулой

$$\bar{\mathbf{H}} = [\mathbf{v}, \mathbf{E}], \quad (4)$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор точки пространства, в которой определяется значение поля; θ — угол между направлением движения заряда и радиус-вектором \mathbf{R} , $\beta = |\mathbf{v}|$.

В связи с этим электрическое и магнитное поля в области решения задаются суммированием полей от каждого заряда. На электромагнитное поле, определяемое движением заряда, может накладываться внешнее магнитное поле.

1.3. Граничные условия задачи

Будем считать, что пучок в процессе решения задачи не достигает границ области решения, и поэтому граничные условия для заряженных частиц отсутствуют. Для электромагнитных полей мы имеем другую ситуацию, описанную во введении. Для аккуратного описания полей на границе необходимо брать очень мелкий поперечный шаг (в γ^2 раз меньше по сравнению со нерелятивистским случаем) и большую длину области в поперечном направлении (в γ раз больше), что ведет к катастрофически большим затратам ресурсов ЭВМ. Приблизив поперечные границы к пучку, в ближнюю зону, значения полей можно вычислять с помощью формул (3) и (4), что существенно снижает затраты ЭВМ. Поскольку частицы движутся, то в процессе решения необходимо постоянно пересчитывать граничные условия для электромагнитных полей.

2. Описание алгоритмов

2.1. Описание метода частиц

Для решения системы уравнений (1), (2) используется метод частиц в ячейках, который является наиболее универсальным для решения задач физики бесстолкновительной плазмы, в том числе релятивистской [10–12]. В методе частиц пучок представляется набором достаточно большого числа модельных частиц, траектории которых служат характеристиками кинетического уравнения Власова (1). При этом в методе участвует два вида сеток — пространственная сетка для электромагнитных полей, плотностей заряда, токов и сетка, связанная с частицами (координаты, импульсы, заряды частиц). Закон, определяющий связь значений пространственной сетки со значениями сетки, связанной с частицами, описывается с помощью ядра метода частиц. В данной работе рассматривалось РС-ядро.

В методе используется схема с перешагиванием [13], в частности, компоненты поля \mathbf{E} вычисляются в серединах граней ячеек, образованных пространственной сеткой, а компоненты поля \mathbf{H} — в центрах ребер этих ячеек. Значения импульсов частиц, токов и поля \mathbf{H} вычисляются в моменты времени $n(\tau + 1/2)$, а значения координат и поле \mathbf{E} — в моменты времени $n\tau$. Такое использование сдвинутых друг относительно друга сеток дает второй порядок аппроксимации по времени и пространству.

Электромагнитные поля пересчитываются на полшага вперед по формулам

$$\frac{H^{m+\frac{1}{2}} - H^{m-\frac{1}{2}}}{\tau} = -\text{rot}_h E^m,$$

$$\frac{E^{m+1} - E^m}{\tau} = j^{m+\frac{1}{2}} + \text{rot}_h H^{m+\frac{1}{2}}.$$

По этим данным находятся сначала скорости частиц, затем координаты

$$\frac{p^{m+\frac{1}{2}} - p^{m-\frac{1}{2}}}{\tau} = q \left(E^m + \left[\frac{v^{m+\frac{1}{2}} - v^{m-\frac{1}{2}}}{2}, H^m \right] \right),$$

$$\frac{r^{m+1} - r^m}{\tau} = p^{m+\frac{1}{2}},$$

после чего определяются значения токов.

В случае передвижения частицы из точки (x_H, y_H, z_H) в точку (x_K, y_K, z_K) внутри одной ячейки вклады токов в ближайшие к центру четыре узла смещенных друг относительно друга сеток определяются по следующим формулам из [14, 15]:

$$\begin{aligned} j_{x,i,l-1/2,k-1/2}^{m+1/2} &= q \frac{\Delta x}{\tau} \left[(1 - \delta_y)(1 - \delta_z) + \frac{\Delta y \Delta z}{12h_y h_z} \right], \\ j_{x,i,l-1/2,k+1/2}^{m+1/2} &= q \frac{\Delta x}{\tau} \left[(1 - \delta_y)\delta_z - \frac{\Delta y \Delta z}{12h_y h_z} \right], \\ j_{x,i,l+1/2,k-1/2}^{m+1/2} &= q \frac{\Delta x}{\tau} \left[\delta_y(1 - \delta_z) - \frac{\Delta y \Delta z}{12h_y h_z} \right], \\ j_{x,i,l+1/2,k+1/2}^{m+1/2} &= q \frac{\Delta x}{\tau} \left[(\delta_y \delta_z + \frac{\Delta y \Delta z}{12h_y h_z}) \right], \\ j_{y,i-1/2,l,k-1/2}^{m+1/2} &= q \frac{\Delta y}{\tau} \left[(1 - \delta_x)(1 - \delta_z) + \frac{\Delta x \Delta z}{12h_x h_z} \right], \\ j_{y,i-1/2,l,k+1/2}^{m+1/2} &= q \frac{\Delta y}{\tau} \left[(1 - \delta_x)\delta_z - \frac{\Delta x \Delta z}{12h_x h_z} \right], \\ j_{y,i+1/2,l,k-1/2}^{m+1/2} &= q \frac{\Delta y}{\tau} \left[\delta_x(1 - \delta_z) - \frac{\Delta x \Delta z}{12h_x h_z} \right], \\ j_{y,i+1/2,l,k+1/2}^{m+1/2} &= q \frac{\Delta y}{\tau} \left[(\delta_x \delta_z + \frac{\Delta x \Delta z}{12h_x h_z}) \right], \\ j_{z,i-1/2,l-1/2,k}^{m+1/2} &= q \frac{\Delta z}{\tau} \left[(1 - \delta_x)(1 - \delta_y) + \frac{\Delta x \Delta y}{12h_x h_y} \right], \\ j_{z,i-1/2,l+1/2,k}^{m+1/2} &= q \frac{\Delta z}{\tau} \left[(1 - \delta_x)\delta_y - \frac{\Delta x \Delta y}{12h_x h_y} \right], \\ j_{z,i+1/2,l-1/2,k}^{m+1/2} &= q \frac{\Delta z}{\tau} \left[\delta_x(1 - \delta_y) - \frac{\Delta x \Delta y}{12h_x h_y} \right], \\ j_{z,i+1/2,l+1/2,k}^{m+1/2} &= q \frac{\Delta z}{\tau} \left[(\delta_x \delta_y + \frac{\Delta x \Delta y}{12h_x h_y}) \right], \end{aligned}$$

где $\Delta x = x_K - x_H$, $\Delta y = y_K - y_H$, $\Delta z = z_K - z_H$ — приращения координат в ячейке сетки, $\delta_x = \frac{1}{h_x} \left(\frac{x_H + x_K}{2} - x_i \right)$, $\delta_y = \frac{1}{h_y} \left(\frac{y_H + y_K}{2} - y_l \right)$, $\delta_z = \frac{1}{h_z} \left(\frac{z_H + z_K}{2} - z_k \right)$.

Если частица пересекает границу ячейки, то ее путь разбивается на два, а формулы используются для каждой его части. Такой метод вычисления токов позволяет автоматически удовлетворить разностному уравнению неразрывности и, следовательно, точно выполнить разностный закон Гаусса. Это значительно уменьшает ошибки аппроксимации и делает алгоритм более устойчивым.

Затем по уравнениям Максвелла пересчитывается электрическое поле на шаг вперед по времени, а по нему — и магнитное поле еще на полшага. Цикл повторяется до достижения нужного момента времени.

2.2. Реализация начальных условий

Если в начальный момент времени заданы импульсы и пространственные координаты всех заряженных частиц, то электрическое поле в любой точке области определяется как суперпозиция полей от всех одиночных зарядов. При числе частиц, достигающем десятков и сотен миллиардов, для вычисления значений полей в узлах расчетной сетки потребуется огромная вычислительная работа. Объем этой работы может быть сокращен, если прямое суммирование заменить на интегрирование плотности зарядов и их токов в узлах сетки, введя "крупные" частицы. От этих "крупных" частиц прямым суммированием их электрических потенциалов можно найти распределение электрического потенциала всей системы зарядов по границе, расположенной в ближней зоне [16]. Значение потенциала внутри области определяется уравнениями Максвелла с запаздывающими потенциалами. Однако уравнение Пуассона модифицировано так, чтобы его решение совпадало для одного момента времени с фундаментальными релятивистскими решениями. Исходя из вида электрического поля движущегося заряда (3), можно ввести потенциал Φ_p , создаваемый этим зарядом, следующим способом:

$$E_x = -\frac{\partial\Phi_p}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\Phi_p}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial\Phi_p}{\partial z}. \quad (5)$$

Легко проверить, что при таком определении введенный потенциал будет удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2\Phi_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_p}{\partial y^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2\Phi_p}{\partial z^2} = -4\pi\delta(x, y, z)q.$$

Заметим, что этому же уравнению удовлетворяет потенциал движущегося заряда:

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{q}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{\gamma^2} + (z - vt)^2}}$$

в нулевой момент времени в лабораторной системе координат [9].

Поэтому по принципу суперпозиции для потенциала пучка Φ , состоящего из одинаковых зарядов q , летящих вдоль оси z с одинаковыми значениями релятивистского фактора γ , можно записать уравнение для плотности частиц n

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = -4\pi n(x, y, z)q. \quad (6)$$

При задании начальных условий уравнение (6) решается методом верхней релаксации. Граничные условия для него вычисляются по формулам (7) в соответствующих узлах сетки.

Отметим, что задание таких начальных условий не учитывает запаздывания потенциала [17], так как заменять сумму дельта-функций от каждого заряда на плотность частиц в области не совсем корректно. Однако ввиду нахождения границ в ближней зоне эффектом запаздывания можно пренебречь.

Далее через потенциал Φ рассчитывается электрическое поле пучка по уравнениям (4), а магнитное находится по формуле $\vec{H} = \vec{v} \times \vec{E}$.

2.3. Реализация граничных условий

Еще одной особенностью метода является подсчет граничных условий для потенциала и полей. Значения потенциала на границе для уравнения (5) в точке (x_0, y_0, z_0) задаются выражениями

$$\Phi(x_0, y_0, z_0) = \gamma \int_V \frac{\rho(x, y, z)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \gamma^2(z - z_0)^2)^{\frac{1}{2}}} dx dy dz,$$

$$E(x_0, y_0, z_0) = \gamma \int_V \frac{\rho(x, y, z)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \gamma^2(z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz,$$

где ρ — плотность заряда.

Заметим, что в подынтегральном выражении имеется особенность в точке (x_0, y_0, z_0) и при больших значениях релятивистского фактора погрешность в окрестности ее сильно возрастает за счет разности $(z - z_0)$, таким образом в данном случае простое суммирование неприемлемо. Чтобы этого избежать, интеграл разбивается на два. Первый интеграл содержит числитель, стремящийся к нулю при стремящихся к (x_0, y_0, z_0) координатах, а часть второго можно вычислить аналитически:

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, y_0, z_0) &= \gamma \int_V \frac{(\rho(x, y, z) - \rho(x, y, z_0))}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \gamma^2(z - z_0)^2)^{\frac{1}{2}}} dx dy dz + \\ &+ \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left(\ln \left(\gamma(L_z - z_0) + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \gamma^2(L_z - z_0)^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \ln \left(-\gamma z_0 + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \gamma^2 z_0^2} \right) \right) \rho(x, y, z_0) dx dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Условия для электрических полей пучка в точках границы (x_0, y_0, z_0) вычисляются совершенно аналогично интегрированием:

$$\begin{aligned} E_{x_n}(x_0, y_0, z_0) &= \gamma \int_V \frac{(\rho(x, y, z) - \rho(x, y, z_0))(x - x_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \gamma^2(z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz + \\ &+ \gamma \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\rho(x, y, z_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \left(\frac{L_z - z_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \gamma^2(L_z - z_0)^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \gamma^2 z_0^2}} \right) dx dy, \\ E_{y_n}(x_0, y_0, z_0) &= \gamma \int_V \frac{(\rho(x, y, z) - \rho(x, y, z_0))(y - y_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \gamma^2(z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz + \\ &+ \gamma \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\rho(x, y, z_0)(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \left(\frac{L_z - z_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \gamma^2(L_z - z_0)^2}} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{z_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \gamma^2 z_0^2}} \Big), \quad (8)$$

$$E_{z_n}(x_0, y_0, z_0) = \gamma \int_V \frac{(\rho(x, y, z) - \rho(x, y, z_0))(z - z_0)}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \gamma^2(z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz +$$

$$+ \frac{1}{\gamma} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \gamma^2 z_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \gamma^2(L_z - z_0)^2}} \right) \times$$

$$\times \rho(x, y, z_0) dx dy.$$

Магнитное поле на границе рассчитывается по формуле $\vec{H} = \vec{v} \times \vec{E}$.

3. Результаты численных экспериментов

Проведенные ранее базовые тестовые расчеты показали качественное соответствие теоретическим оценкам [18]. Одной из проверок правильности решения было сохранение энергии, на основе этого получены результаты, доказывающие корректность работы алгоритма [18].

Новой областью, представляющей интерес для исследования, является сравнение результатов работы предложенного алгоритма с результатами, полученными с помощью уже известных и распространенных программ для моделирования эффектов встречи. Одна из программ — Guinea-Pig [5], основанная на слайсовой модели. Guinea-Pig применяется в моделировании динамики пучков для таких ускорителей, как TESLA, CLIC.

Сравнение результатов работы алгоритмов проводилось на задаче фокусировки пучков моноэнергетических частиц в центре расчетной области. В этом случае предполагается, что продольное распределение частиц ρ_z является гауссовым со стандартным отклонением σ_z . Вдоль каждого из поперечных направлений координаты частиц в плоскости кроссовера, которое совпадает с местом пересечения центров встречных сгустков IP (Interaction Point), распределены по нормальному закону. Плоскость кроссовера — плоскость минимального размера пучка, перпендикулярная оси движения и проходящая через центр области. Плотность распределения частиц по координатам в момент прохождения частицей плоскости кроссовера записывается в следующем виде:

$$\rho_c(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^*\sigma_y^*} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{(x-x_c)^2}{(\sigma_x^*)^2} + \frac{(y-y_c)^2}{(\sigma_y^*)^2} \right]\right),$$

где (x_c, y_c, z_c) — центр пучка, совпадающий с центром области, а характерные размеры сгустка по горизонтали (σ_x^*) и по вертикали (σ_y^*) определяются через значения в месте встречи (IP) амплитудных функций $\beta_x^* = \beta_x(z_c)$, $\beta_y^* = \beta_y(z_c)$ (квадраты огибающей пучка по двум поперечным направлениям в теории электронной оптики), а также через величины фазовых объемов $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ [19]: $\sigma_x^* = \sqrt{\beta_x^* \varepsilon_x}$, $\sigma_y^* = \sqrt{\beta_y^* \varepsilon_y}$.

В тестовых расчетах использовались следующие значения параметров [20]: $\beta_x^* = \beta_y^* = 0.1$ см, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 5 \cdot 10^{-9}$ см, $\sigma_z = 0.1$ см. При этом $\sigma_x^* = \sigma_y^* = 2.23 \cdot 10^{-5}$ см.

Плотность распределения по поперечным импульсам p_x и p_y также полагается гауссовой и в плоскости кроссовера имеет вид

$$\rho_p(p_x, p_y) = \frac{1}{2\pi\sigma_{px}^*\sigma_{py}^*} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{p_x^2}{(\sigma_{px}^*)^2} + \frac{p_y^2}{(\sigma_{py}^*)^2}\right]\right),$$

где $x' = (\sigma_{px}/p)^* \approx (\sigma_{px}/p_z)^* = \sqrt{\varepsilon_x/\beta_x^*}$, $y' = (\sigma_{py}/p)^* = \sqrt{\varepsilon_x/\beta_x^*}$, $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$.

Для простоты “на старте” сгусток имеет нулевой разброс импульсов в продольном направлении: $\sigma_{pz} = 0$. В плоскости кроссовера, выделенной как плоскость симметрии, полная плотность распределения частиц в фазовом пространстве выражается произведением приведенных функций плотности по координатам и импульсам $\rho|_{IP} = \rho_c\rho_p\rho_z$.

В других поперечных сечениях поперечные координаты и импульсы уже нельзя рассматривать как независимые величины. В начальный момент времени центр гауссового сгустка смещен относительно центра области, имеющего координату z_c , вдоль продольной оси. Так как частицы движутся к плоскости фокуса в центре области в пустом промежутке (в отсутствие встречного пучка), то преобразование четырех координат вектора и углов наклона траекторий из сечения с координатой z в сечение с координатой z_c задается по правилу

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_{IP} = \begin{pmatrix} 1 & z - z_c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z - z_c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}.$$

Такие координаты в дальнейшем будут называться ускорительными.

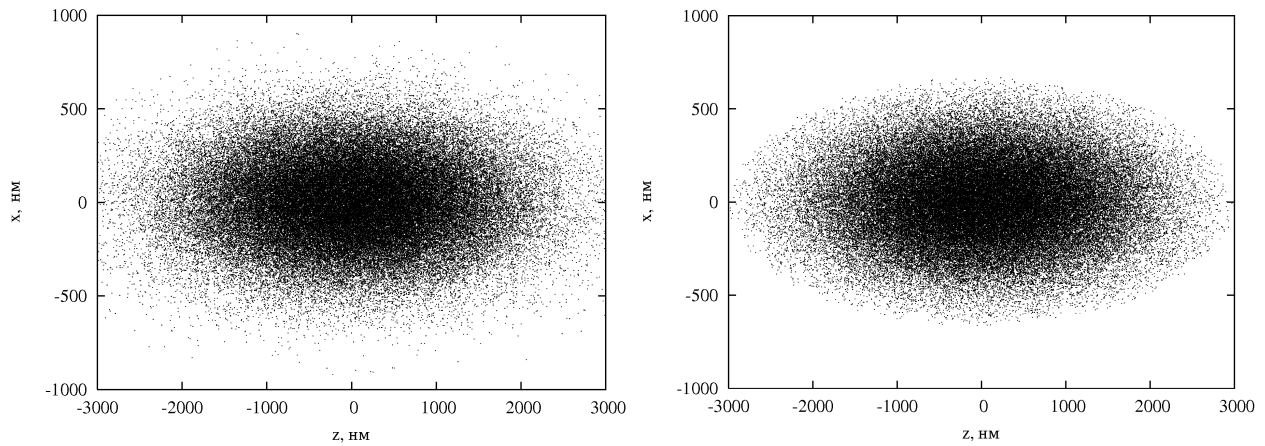
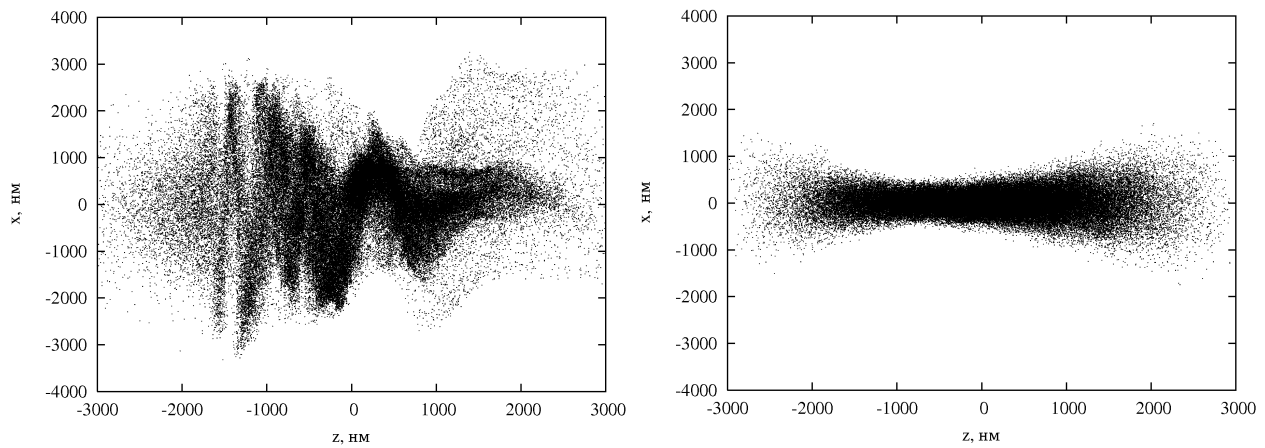
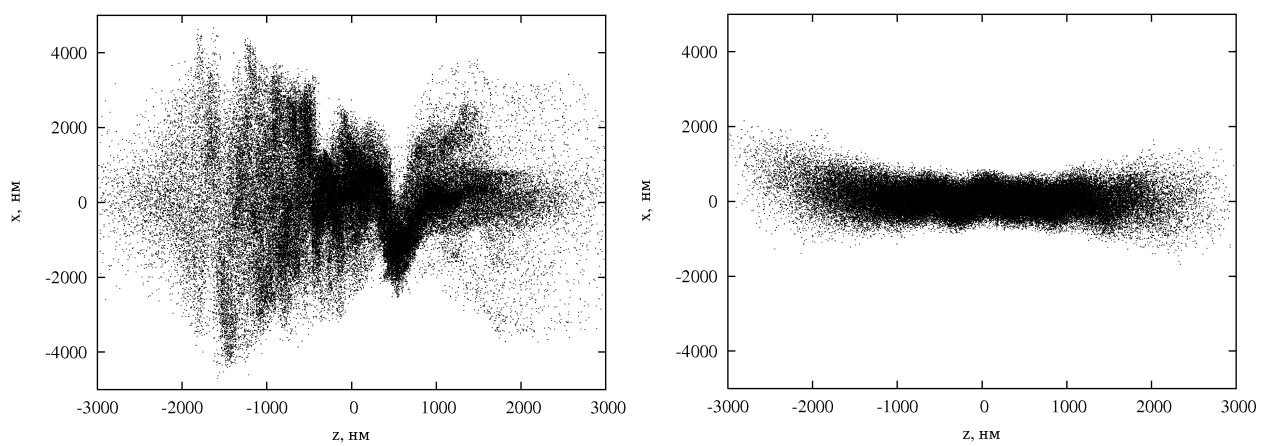
Чтобы найти функцию распределения в поперечном фазовом пространстве для произвольного сечения области по $z = \text{const}$, надо в выражении для $\rho|_{IP}$ выразить компоненты вектора ускорительных координат $(x, x', y, y')|_{IP}$ через компоненты вектора (x, x', y, y') , используя приведенное преобразование. В результате, в продольном сечении пучок будет напоминать горизонтальную каплю, летящую к месту встречи (IP) острым концом. В данных расчетах длина расчетной области в поперечном направлении $L_x = L_y = 10^{-2}$ см и в продольном $L_z = 1.5$ см.

Число модельных частиц в пучках одинаково, $J_1 = J_2 = 10^5$, как и релятивистские факторы всех частиц: $\gamma = 6850$. Число узлов сетки в поперечном направлении $N_x = N_y = 60$, $N_z = 120$. Временной шаг $\tau = 0.0001$.

Изменение формы пучка не всегда удобно и возможно отслеживать в лабораторной системе координат, корректнее использовать ускорительные координаты (x, x', y, y') .

На рис. 1–3 представлены ускорительные координаты первого пучка из пары встречных пучков z, x с зарядами $Q_1 = -2.63 \cdot 10^6 e$ и $Q_2 = 1.31 \cdot 10^6 e$ соответственно в конечный момент времени $T = 6$. Согласно теоретическим оценкам при таких небольших зарядах продольное распределение невозмущенного внешними силами пучка никак не меняется во всей области. Даже после 6000 шагов программы дисперсия нормального закона остается равной начальному значению и совпадает с соответствующими значениями, полученными при помощи Guinea-Pig.

При увеличении зарядов до 10^{10} зарядов электрона наблюдаются неустойчивости при использовании Guinea-Pig и изменение формы пучка при использовании предложенного алгоритма.

Рис. 1. Ускорительные координаты в расчетах 3D3V программы, $Q \sim 10^6$ Рис. 2. Ускорительные координаты в расчетах 3D3V программы, $Q \sim 10^{10}$ Рис. 3. Ускорительные координаты в расчетах 3D3V программы, $Q \sim 5 \cdot 10^{10}$

Дальнейшее увеличение зарядов в 2 раза дает неустойчивости в обоих случаях, при этом также в обоих случаях форма пучка становится спиралевидной. Угловой момент пучка остается близким к нулю, несмотря на спираль.

Стоит отметить, что в этом случае параметр разрушения $D \sim 10^3$. При таких суперкритических значениях пучок может иметь более 1000 перетяжек на его длине, однако на рисунках количество перетяжек гораздо меньше. Дополнительные эксперименты показали, что шаг спирали уменьшается с уменьшением продольного шага сетки, но ресурсы однопроцессорной ЭВМ не позволяют использовать необходимые параметры сетки. До сих пор остается открытым вопрос — является ли эта неустойчивость физической или численной? Чтобы ответить на него, требуется повышение точности, в частности, более мелкая сетка, что приводит к необходимости создания параллельного варианта алгоритма.

Выводы

Создан алгоритм для решения задач взаимодействия встречных пучков заряженных частиц с достаточно большими релятивистскими факторами ($\gamma \sim 10^3$ и более). Алгоритм учитывает трехмерность задачи и основан на двух допущениях. Одно из них — приближение границы достаточно близко к пучку, при этом поперечный размер области сокращается примерно в γ раз, что позволяет значительно уменьшить затраты памяти и времени счета. Второе допущение возникает из необходимости быстрого задания граничных условий. Оно заключается в представлении пучка модельных частиц в качестве некоторой непрерывной среды, при этом вводится искусственный потенциал и решается модифицированное уравнение Пуассона. Особенность задания граничных условий — разбиение интегралов от плотности для уменьшения порядка возникающей особенности, а следовательно, повышения качества расчетов.

Проведено сравнение с известной программой Guinea-Pig, основанной на слайсовой модели. Для приведенных в статье параметров и некритических токов (в тех случаях, когда заряды пучков меньше 10^7 зарядов электрона) получено качественное и количественное соответствие, неустойчивостей не наблюдалось. Увеличение токов при тех же параметрах влечет за собой появление неустойчивостей, однако порог при использовании Guinea-Pig ниже: для $Q_1 = -2.63 \cdot 10^{10}e$ и $Q_2 = 1.31 \cdot 10^{10}e$ Guinea-Pig дает неустойчивость, в то время как предложенный в статье алгоритм дает изменение формы пучка. Гиперкритические параметры (когда заряды пучков примерно $10^{11}e$) дают неустойчивости в обоих случаях, и в обоих случаях неустойчивости имеют спиралевидную форму.

В отсутствие встречного пучка при тех же параметрах с зарядом $Q = -2.63 \cdot 10^{11}e$ также наблюдалась спиралевидная неустойчивость. Дальнейшее изучение природы такой неустойчивости требует распараллеливания алгоритма.

Список литературы

- [1] YOKOYA K.A. ILC Conceptual Design and R&D Status // Talk at the ICFA Seminar, Daegu, Korea, Sept. 29. 2005. P. 1–36.
- [2] SUPERB Conceptual Design Report, INFN/AE-07/2, SLAC-R-856, LAL 07-15, 2007. INFN Publishing Services, INFN-Pisa, Italy.
- [3] YOKOYA K.A. Computer Simulation Code for the Beam-Beam Interaction in Linear Colliders // KEK report 85-9, Oct 1985. P. 1–25.

- [4] ANDERSON E.B., BANKS T.I., ROGERS J.T. ODYSSEUS: A Dynamic Strong-Strong Beam-Beam Simulation for Storage Rings // International Computational Accelerator Physics Conference, 1998. P. 1–5.
- [5] SCHULTE D. Study of Electromagnetic and Hadronic Background in the Interaction Region of the Tesla Collider. Hamburg: Tesla Reports, 1997. P. 1–5.
- [6] CAI Y., SEEMAN J., KOZANECKI W., OHMI K., TAWADA M. Simulations and experiments of beam-beam effects in e^+e^- storage rings // Proceedings of 2005 Particle Accelerator Conference, Knoxville, Tennessee.
- [7] OHMI K. Simulation of beam-beam effects in a circular e^+e^- collider // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, N 5. P. 7287–7294.
- [8] CHEN P., YOKOYA K. Disruption effects from the interaction of round e^+e^- beams // Physical Review D. 1988. Vol. 38, N 3. P. 987–1000.
- [9] ЛАНДАУ Л.Д., ЛИФШИЦ Е.М. Теоретическая физика. М.: Наука, 1988. Т. 2.
- [10] ХОКНИ Р., ИСТВУД ДЖ. Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987.
- [11] БЕДСЕЛЛ Ч., ЛЕНГДОН А. Физика плазмы и численное моделирование. М.: Атомиздат, 1985.
- [12] БЕРЕЗИН Ю.А., ВШИВКОВ В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.
- [13] LANGDON A.B., LASINSKI B.F. Electromagnetic and relativistic plasma simulation models // Meth. Comput. Phys. 1976. Vol. 16. P. 327–366.
- [14] ВШИВКОВ В.А., ВШИВКОВ К.В., ДУДНИКОВА Г.И. Алгоритмы решения задачи взаимодействия лазерного импульса с плазмой // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6, № 2. С. 47–63.
- [15] VILLANCENOR J., BUNEMAN O. Rigorous charge conservation for local electromagnetic field solvers // Comp. Phys. Comm, 1992. Vol. 69. P. 306–316.
- [16] КУКШЕВА Э.А., СНЫТНИКОВ В.Н. Параллельный алгоритм и программа Key 7D для решения нестационарных трехмерных задач гравитационной физики // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12, № 1. С. 35–44.
- [17] ТАКАЯМА К. A new method for the potential of a 3-dimensional nonuniform charge distribution // Lettere Al Nuovo Cimento. 1982. Vol. 34, N 7. P. 190–192.
- [18] БОРОНИНА М.А., ВШИВКОВ В.А., ЛЕВИЧЕВ Е.Б., НИКИТИН С.А., СНЫТНИКОВ В.Н. Алгоритм для трехмерного моделирования ультрарелятивистских пучков // Вычисл. методы и программирование. 2007. Т. 8, № 2. С. 203–210.
- [19] СНАО А., ТИГНЕР М. Handbook of Accelerator Physics and Engineering. World Scientific Publishing Co. Incorporated, 1999. 684 p.
- [20] RAIMONDI P. Exotic approach to a Super B-FACTORY // Super B-Factory Workshop. Hawaii, 2005. <http://www.phys.hawaii.edu/superb/2005/slides/machine-detector2/raimondi/raimondi.ppt>

*Поступила в редакцию 26 февраля 2008 г.,
в переработанном виде — 18 декабря 2008 г.*