Моделирование поверхностных волн: статистический метод анализа разрешимости*

Р. В. Шамин
Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва, Россия
e-mail: `roman@shamin.ru`

We consider a statistical method of the solvability analysis for nonlinear problems. We apply the abstract results for equations arising in the theory of surface waves on an ideal liquid. For verification of the proposed methods, the results of numerical modeling are presented.

Введение

Задачи математической гидродинамики со свободной поверхностью относятся к наиболее трудным в современной математике. Принципиальной проблемой считается разрешимость уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости. Важным инструментом при исследовании разрешимости этих уравнений является проведение вычислительных экспериментов. В настоящей работе рассматривается применение методов математической статистики для исследования разрешимости нелинейных задач. Полученные результаты позволяют получать вероятностное подтверждение результатов численных опытов. Знание такой оценки вероятности имеет принципиальное значение в условиях автоматизации проведения вычислительных опытов.

В разд. 1 дается постановка задачи, описывающая нелинейную динамику поверхностных волн идеальной жидкости.

В разд. 2 рассматриваются абстрактные нелинейные операторные уравнения, для которых строится схема применения статистических методов для исследования разрешимости. Опишем основную нашу идею. Пусть имеем оператор $A : X \to Y$, где X и Y — банаховы пространства, и пусть для $f \in Y$ имеем последовательность приближенных решений $x_n \in X$ уравнения $Ax = f$. Во многих задачах можно доказать, что если последовательность приближенных решений принадлежит компактному в X множеству M, то существует единственное решение операторного уравнения $Ax = f$ и последовательность x_n сходится к этому решению. Для этого случая в статье рассматривается схема проведения вычислительных экспериментов, позволяющая строить эмпирическую функцию распределения вероятностей существования решения в случае, если $x_n \in M$, $n = 1, \ldots, N$. При численном моделировании такая оценка вероятности оказывается очень важной в приложениях, поскольку позволяет конструктивно оценивать вероятность существования решений в тех случаях, когда невозможно установить разрешимость уравнения.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 07-05-00648-а, № 07-05-92211-НЦНИЛ-а) и INTAS Ref. Nr 05-1000008-8014.

В разд. 3 описаны абстрактные результаты вычислительных экспериментов в гидродинамике идеальной жидкости со свободной поверхностью. Для демонстрации методов приводятся результаты реальных вычислительных экспериментов, проводившихся в лаборатории нелинейных волновых процессов Института океанологии им. П. П. Ширшова РАН и лаборатории экспериментальной математики кафедры дифференциальных уравнений и математической физики Российского университета дружбы народов. В частности, результаты настоящей работы применялись в численных экспериментах при исследовании такого интересного океанологического явления, как “волна-убийца”.

1. Поверхностные волны идеальной жидкости

Рассмотрим течение идеальной несжимаемой жидкости, которая занимает область в плоскости (x, y), ограниченную свободной поверхностью

$$-\infty < y < \eta(x,t),$$
$$-\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

Считая движение жидкости потенциальным, имеем

$$v(x,y,t) = \nabla\Phi(x,y,t),$$

где $v(x,y,t)$ — двумерное поле скоростей; $\Phi(x,y,t)$ — потенциал. Из условия несжимаемости жидкости $\mathrm{div} v = 0$ следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi(x,y,t) = 0.$$

С этим уравнением связываются следующие граничные и начальные условия:

$$(\eta_t + \Phi_x\eta_x - \Phi_y)|_{y=\eta(x,t)} = 0,$$

$$(\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gy)|_{y=\eta(x,t)} = 0,$$

$$\Phi_y|_{y=-\infty} = 0,$$

$$\eta|_{t=0} = \eta_0(x),$$

$$\Phi|_{t=0} = \Phi_0(x,y).$$

Здесь g — ускорение поля тяжести.

Исследованиям уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости, посвящено много работ. Первые результаты о существовании аналитических решений в этих задачах получены в работе [1]. Существование решений конечной гладкости доказано в [2, 3]. Трехмерные задачи для поверхностных волн идеальной жидкости рассматривались в работе [4].

Рассмотрим величину $\Psi(x,t) = \Phi(x, \eta(x,t), t)$, которая является значением потенциала на свободной поверхности. В. Е. Захаровым установлено, что переменные η и Ψ являются канонически сопряженными величинами, т. е.

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\Psi}, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\eta},$$

где гамильтониан H совпадает с полной энергией жидкости $H = T + U$,

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\overline{h}}^{\eta(x,t)} |\nabla\Phi|^2 dy, \quad U = \frac{g}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta^2(x,t)dx.$$

Следуя работам [5, 6], совершим конформное отображение области, занимаемой жидкостью в плоскости (x, y), в полупространство в переменных (u, v):

$$-\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < 0.$$

После преобразования поверхность $\eta(x,t)$ может быть представлена в параметрическом виде

$$y = y(u,t), \quad x = u + \tilde{x}(u,t),$$

где $\tilde{x}(u,t)$ и $y(u,t)$ связаны оператором Гильберта:

$$y = \mathrm{H}[\tilde{x}], \quad \tilde{x} = -\mathrm{H}[y], \quad \mathrm{H}[f](u) = \frac{1}{\pi}\ \mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u')du'}{u'-u}.$$

Рассмотрим комплексные функции $z(w,t) = x(w,t) + iy(w,t)$ и $\Phi(u,t) = \Psi(u,t) + i\mathrm{H}[\Psi(u,t)]$, где $w = u + iv$. Введем новые переменные $R(w,t)$ и $V(w,t)$ по следующим формулам:

$$R(w,t) = \frac{1}{z_w}, \qquad V(w,t) = i\frac{\Phi_w}{z_w}.$$

Функции R и V аналитичны в нижней полуплоскости и удовлетворяют условиям

$$R(w,t) \to 1, \quad |w| \to \infty, \quad \operatorname{Im} w \le 0,$$

$$V(w,t) \to 0, \quad |w| \to \infty, \quad \operatorname{Im} w \le 0.$$

Как показано в работе [6], функции R и V удовлетворяют следующей системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} R_t &= i(UR_w - U_w R), \\ V_t &= i(UV_w - B_w R) + g(R-1), \end{aligned} \tag{1}$$

где $U = \mathrm{P}(V\overline{R} + \overline{V}R)$, $B = \mathrm{P}(V\overline{V})$, $\mathrm{P} = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + i\mathrm{H})$ — интегральный оператор. Эти уравнения называются уравнениями Дьяченко.

Уравнения (1) можно трактовать как нелинейные уравнения в гильбертовом пространстве, разрешенные относительно производной по времени. В работах [7–9] рассматривались вопросы разрешимости уравнений (1), а также методы оценки времени существования аналитических решений.

2. Абстрактный случай

Пусть X, Y — банаховы пространства. Будем рассматривать непрерывный, вообще говоря, нелинейный оператор

$$\mathrm{A} : X \to Y.$$

Для заданного элемента $y \in Y$ рассмотрим уравнение

$$\mathrm{A}x = y. \tag{2}$$

Введем множества $M \subset X$ и $Q \subset Y$. Будем предполагать, что $y \in Q$, а решение уравнения (2) $x \in M$.

Предположим, что мы имеем определенный алгоритм, позволяющий находить последовательность x_n для любого конечного $n = 1, 2, \ldots$ При этом последовательность x_n принадлежит пространству X. Будем предполагать выполненным следующее условие: если при заданном $y \in Q$ имеет место вложение $\{x_n\} \subset M$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, то решение задачи (2) существует, это решение x принадлежит множеству M и имеет место

$$\|x_n - x\|_X \to 0, \quad n \to \infty.$$

В реальности мы обычно не можем *знать* всю последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ Как правило, мы имеем лишь конечное множество $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Задача состоит в том, чтобы по конечным *наблюдениям* $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots, N$, сделать статистический вывод о принадлежности множеству M всей последовательности $\{x_n\}$ и соответственно сделать вывод о существовании решения задачи (2) для заданной правой части $y \in Q$.

Предположим, что мы нашли первые N членов последовательности x_n, и видим, что $x_n \in M$ при $n = 1, 2, \ldots, N$. С какой вероятностью вся последовательность x_n принадлежит множеству M? Прежде чем искать ответ на этот вопрос, мы должны определить вероятностное пространство, относительно которого будем вычислять вероятность.

Рассмотрим случай, когда множество Q является компактом в конечномерном подпространстве $\widetilde{Q} \subset Y$. Тогда можно рассмотреть случайный вектор $y \in Q$. Введем случайную величину $\nu(y)$ следующим образом. Если для случайного y существует решение уравнения (2), то $\nu(y) = +\infty$. В противном случае определим $\nu(y)$ по формуле

$$\nu(y) = \min\{n : x_n \notin M\}.$$

Будем предполагать, что случайный вектор y равномерно распределен в Q, и опишем схему, позволяющую построить эмпирическую функцию распределения для случайной величины $\nu(y)$ по наблюдениям $y \in Q$:

1) фиксируем множества M и Q, число N, количество итераций I;

2) выбираем случайный вектор $y \in Q$;

3) рассчитываем последовательность $\{x_n\}$, $n = 1, \ldots, N$;

4) если существует номер n' такой, что $x_{n'} \notin M$, то к выборке S добавляем случайную величину $\nu(y)$;

5) если количество итераций меньше I, то переходим к шагу 2;

6) окончание алгоритма. На выходе мы имеем выборку S объема T.

Эмпирическую функцию распределения зададим следующим образом:

$$F(n) = \frac{\#\{\nu \in S : \nu \leq n\}}{T},$$

где $\#$ означает мощность множества.

Определение 1. Будем говорить, что задача (2) имеет решение (для фиксированного y) с ν-вероятностью α:

$$\alpha = 1 - F(N'),$$

если $x_n \in M$ для всех $n = 1, 2, \ldots, N'$.

Определение 2. Решение, существующее с ν-вероятностью единица, будем называть существующим ν почти наверное.

Заметим, что в этом определении число N' может быть как меньше N, так и больше. Очевидно, что если $N' \geq N$, то ν-вероятность всегда будет равна единице.

На адекватности наших статистических выводов сказываются объем выборки T при построении функции распределения и число N. Чем больше объем выборки T и число N, тем адекватнее будут наши выводы.

3. Применение статистического метода в задачах гидродинамики

Проиллюстрируем наши идеи на примере задачи (1). Систему уравнений (1) можно записать в форме (2). Соответственно, вместо правых частей уравнения (2) элемента y будем рассматривать начальные функции R_0 и V_0.

Приведем численную схему для получения приближенных решений. Пусть $N \geq 1$ — фиксированное число размерности приближенной задачи. Приближенные решения будем искать в виде

$$R^N(u,t) = 1 + \sum_{k=1}^{N} r_k^N(t) e^{-iku}, \quad V^N(u,t) = \sum_{k=1}^{N} v_k^N(t) e^{-iku}. \tag{3}$$

Поскольку операция умножения функций не является замкнутой в классе функций (3), введем бинарную операцию «$*$», которая является замкнутой для множества функций вида (3). Пусть

$$A = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{-iku}, \quad B = \sum_{k=-N}^{N} b_k e^{-iku}.$$

Тогда для $C = AB$ имеем $C = \sum\limits_{k=-2N}^{2N} c_k e^{-iku}$. Операцию “$*$” введем следующим образом: $A * B = \sum\limits_{k=-N}^{N} c_k e^{-iku}$, где c_k — коэффициенты Фурье функции C.

Приближенные решения R^N и V^N будем искать как решения системы уравнений

$$\begin{gathered} R_t^N = i(U^N * R_u^N - U_u^N * R^N), \\ V_t^N = i(U^N * V_u^N - B_u^N * R^N) + g(R^N - 1), \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$U^N = \mathrm{P}(V^N * \overline{R}^N + \overline{V}^N * R^N), \quad B = \mathrm{P}(V^N * \overline{V}^N).$$

Множество Q определим следующим образом:

$$|r_k^N(0)| \leq e^{-\beta k}, \quad |v_k^N(0)| \leq e^{-\beta k}$$

для всех $k = 1, \dots, 1024$ и $t < 10.0$, где $\beta \approx 0.040475$. Соответственно, множества M будем определять через числовой параметр $\alpha > 0$ следующим образом:

$$|r_k^N(t)| \le e^{-\alpha k}, \quad |v_k^N(t)| \le e^{-\alpha k}$$

для всех $k = 1, \dots, 1024$ и $t < 10.0$.

В нашем эксперименте число T будет выбрано в зависимости от различных экспериментов при разных α. Приближения x_n будем выбирать из условия $N = 64 \cdot 2^n$, $n = 1, 2, 3, 4$.

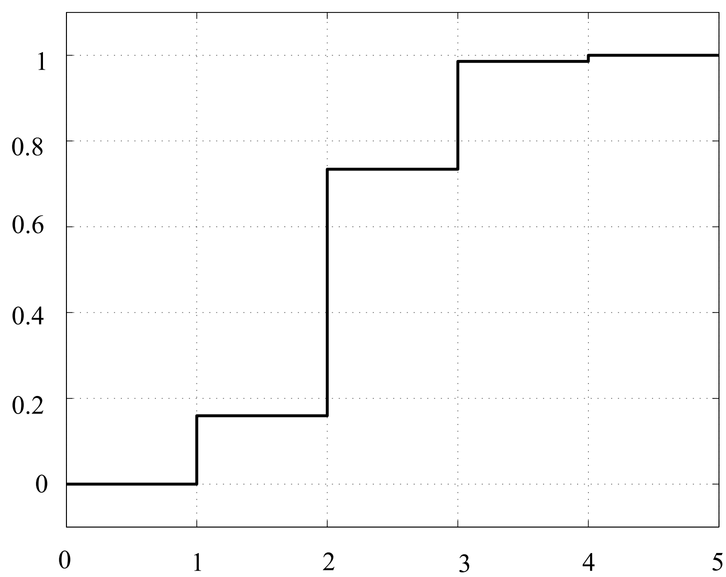
Результаты вычислительных экспериментов, проводившихся в лаборатории нелинейных волновых процессов Института океанологии им. П. П. Ширшова РАН и в лаборатории экспериментальной математики на кафедре дифференциальных уравнений и математической физики Российского университета дружбы народов, представлены в табл. 1.

На рисунке приведена функция распределения F для эксперимента № 1.

В случае, когда максимальный номер приближения x_n совпадает с числом N, всегда будем получать результат, что решение существует ν почти наверное, и можем оценить вероятность существования решения с использованием статистических критериев проверки гипотез. В табл. 2 приведены вероятности существования решений с уровнем значимости 0.95 такие, что $x_n \in M$, $n = 1, 2, 3, 4$.

Т а б л и ц а 1.

Номер эксперимента	Параметр α	Число T
1	0.7	990
2	0.8	925
3	0.9	583
4	1.0	583
5	1.1	405



Функция распределения

Т а б л и ц а 2.

Номер эксперимента	Вероятность существования решения
1	0.9961
2	0.9959
3	0.9951
4	0.9935
5	0.9906

Если мы наблюдаем, что наше *численное решение* удовлетворяет условиям $x_n \in M$, $n = 1, 2, 3, 4$, то с достаточно большой вероятностью можно утверждать, что истинное решение существует для выбранных начальных данных.

Автор выражает глубокую благодарность академику РАН В.Е. Захарову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] Налимов В.И. Априорные оценки решений эллиптических уравнений в классе аналитических функций и их приложения к задаче Коши–Пуассона // Докл. АН СССР, 1969. Т. 189, № 1. С. 45–49.

[2] Налимов В.И. Нестационарные вихревые волны // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1356–1366.

[3] Налимов В.И. Задача Коши–Пуассона // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1974. Вып. 18. С. 104–210.

[4] Wu S. Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 3-D // J. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 12, N 2. P. 445–495.

[5] Дьяченко А.И., Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости // Физика плазмы. 1999. Т. 22, № 10. С. 916–928.

[6] Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // Europ. J. of Mech. B/Fluids 21. 2002. P. 283–291.

[7] Шамин Р.В. О существовании гладких решений уравнений Дьяченко, описывающих неустановившиеся течения идеальной жидкости со свободной поверхностью // Докл. РАН. 2006. Т. 406, № 5. С. 112–113.

[8] Шамин Р.В. Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью // Сиб. журн. вычисл. мат. 2006. Т. 9, № 4. С. 325–340.

[9] Шамин Р.В. К вопросу об оценке времени существования решений системы Коши–Ковалевской с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью // Совр. математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 21. С. 133—148.

Поступила в редакцию 14 марта 2008 г.