

## Течение идеальной жидкости в закрытых водоемах

Ю. Н. ЗАХАРОВ

*Кемеровский государственный университет, Россия*

e-mail: zyn@kemsu.ru

Е. Л. СЧАСТЛИВЦЕВ

*Институт угля и углехимии СО РАН, Кемерово, Россия*

e-mail: zavlab@kemsc.ru

А. В. ЧИРЮКИНА

*Кемеровский государственный университет, Россия*

Paper presents numerical comparison of stratified and homogeneous fluid flows in a closed reservoir with two outlet openings. It is shown that the influence of stratification is important along with the bottom topography and filtration effects.

Натурные исследования характера течения в закрытых водоемах являются достаточно сложной задачей. Это связано как с масштабами водоемов (водохранилищ, озер и т.п.), так и с практической невозможностью провести измерения (например, в затопленных шахтах). Поэтому при изучении таких течений на первый план выходит их математическое моделирование. Настоящая работа посвящена сравнению двух моделей течений жидкости (стратифицированной и нестратифицированной) в проточном водоеме. Изучается влияние на характер течения двух выходных отверстий и фильтрации через стенки водоема.

Как известно [1], стационарное плоское течение идеальной жидкости в поле силы тяжести в приближении Буссинеска в случае, когда плотность есть линейная функция функции тока  $\psi = \psi(x, y)$ , описывается уравнением Гельмгольца:

$$\Delta\psi + k^2\psi = k^2y, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  — оператор Лапласа;  $k^2 = \frac{1}{Fr^2} \frac{\partial \rho}{\partial \psi} = \text{const}$ ,  $\rho$  — плотность,  $Fr$  — плотностное число Фруда;  $\Omega$  — область решения. Функция тока  $\psi$  и компоненты вектора скорости  $\mathbf{w} = (u, v)$  связаны равенствами  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ . Если  $k^2 \neq 0$ , то жидкость является стратифицированной по плотности, если же  $\frac{\partial \rho}{\partial \psi} = 0$ , а это означает  $k^2 = 0$ , то жидкость нестратифицированная.

Пусть область решения  $\Omega$  (рис. 1) имеет границу  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_7$ . Здесь через входное отверстие  $\Gamma_1$  жидкость втекает, а через выходные отверстия  $\Gamma_5$  и  $\Gamma_6$  вытекает. Не нарушая общности, мы считаем, что ширина входных и выходных отверстий одинакова и равна 0.2. Твердая граница  $\Gamma_7$  может быть как непроницаемой, так и проницаемой, т.е. через нее возможна фильтрация жидкости как из области, так и в область решения.

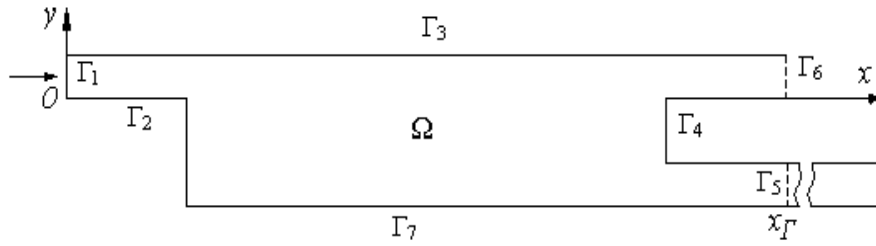


Рис. 1. Область решения

При этом наличие двух выходных отверстий связано с существованием ряда практических задач. Например, для области движения жидкости в какой-либо части затопленной шахты в силу ее разветвленности (как, например, для области, представленной на рис. 1) возможно несколько физических постановок условий вытекания жидкости из области решения. Первая из них заключается в задании скоростей и тем самым значений производных от  $\psi$  на выходе из обоих отверстий при сохранении баланса вытекающей и втекающей жидкости. Вторая задача состоит в том, что в одном выходном отверстии задается скорость вытекающего потока, а второе остается “свободным”, и из него жидкость вытекает в соответствии с характером течения внутри  $\Omega$ . Это особенно важно в задаче с фильтрацией через дно (участок границы  $\Gamma_7$ ). Далее мы будем рассматривать три постановки краевых условий для уравнения (1).

**Задача 1.** Краевые условия в задаче без фильтрации с заданием вектора скорости на  $\Gamma_5$  и  $\Gamma_6$  выглядят следующим образом (здесь и далее  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1} &= -U_0, & \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_7} &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_5} &= U_1, & \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_6} &= U_2. \end{aligned} \quad (2)$$

**Задача 2.** Краевые условия в задаче со “свободным” отверстием имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1} &= -U_0, & \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_6} &= U_2, & \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_7} &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{\Gamma_5} &\rightarrow 0, & x &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

**Задача 3.** Краевые условия для задачи с фильтрацией и “свободным” отверстием имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1} &= -U_0, & \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_6} &= U_2, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{\Gamma_5} &\rightarrow 0, & x &\rightarrow \infty, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4} &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{\Gamma_7} &= c(p_{\text{внеш}} - p_{\text{внутр}}) \Big|_{\Gamma_7}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $c = c(x, y) > 0$  — коэффициент фильтрации через границу;  $p_{\text{внеш}} = p_{\text{внеш}}(x, y)$  — заданное внешнее давление;  $p_{\text{внутр}} = p_{\text{внутр}}(x, y)$  — давление в области  $\Omega$ , которое определяется как решение уравнения

$$\Delta p_{\text{внутр}} = -2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2. \quad (5)$$

Таким образом, характер фильтрации жидкости через “дно” ( $\Gamma_7$ ) зависит, в частности, от вычисленного поля давления в области течения, а это существенно влияет на общий объем вытекающей жидкости из области  $\Omega$ .

Можно предложить следующий алгоритм решения задачи (1), (4), (5):

1) задав начальное приближение к  $\psi$ , решаем уравнение (5) в области  $\Omega$ , включая границу  $\Gamma$ ;

2) используя полученное давление  $p$  на границе  $\Gamma_7$ , решаем уравнение (1) с краевыми условиями (4);

3) затем вычисляем  $\psi$  в области  $\Omega$  и на тех границах, где происходит фильтрация жидкости ( $\Gamma_7$ ). Далее заново находим давление на границе  $\Omega$  и возвращаемся к шагу 2. И так до установления.

Для решения задач 1–3 мы использовали метод сеток. Введем в область  $\Omega$  неравномерную, согласованную с границей  $\Gamma$  прямоугольную сетку  $\Omega_h$ . Аппроксимируем на  $\Omega_h$  задачи 1–3 разностной схемой первого или второго порядка аппроксимации. В итоге получим систему уравнений

$$Au = f, \quad (6)$$

где матрица  $A$  в общем случае несамосопряженная, и если  $k^2 \neq 0$ , то может быть знакоопределенной и почти особенной ( $\det A \approx 10^{-10} - 10^{-20}$ ), при этом часто трудно определить, является ли матрица знакоопределенной или нет. А это обстоятельство налагает ограничения на выбор используемых итерационных методов решения системы (6). В случае невозможности определения свойства знакоопределенности  $A$  мы должны использовать методы решения (6), как будто матрица  $A$  знакоопределенная. Здесь можно было бы использовать так называемую первую трансформацию Гаусса (умножается (6) на  $A^*$ ) и после этого выбрать какой-либо быстро сходящийся итерационный метод решения систем линейных алгебраических уравнений (см., например, [2]). Но использование первой трансформации Гаусса приводит к существенному уменьшению скорости сходимости итерационных схем в случае, если окажется, что матрица  $A$  знакоопределена.

Систему (6) мы решали итерационной схемой неполной аппроксимации [3]:

$$\begin{aligned} \psi^{n+1/2} &= \psi^n - \tau_n (A\psi^n - f), \\ \psi^{n+1} &= \psi^{n+1/2} - \alpha_n z^n, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\tau_n$  — итерационный параметр;  $\alpha_n$  — матрица итерационных параметров;  $z^n$  — некоторые векторы. Как показано в [4], существуют такие  $\alpha_n$ ,  $\tau_n$  и  $z^n$ , с которыми схема (7) сходится независимо от знакоопределенности матрицы  $A$ . Более подробную информацию о способах выбора элементов матрицы  $\alpha_n$  можно найти в [5].

При решении краевой задачи, когда одно из выходных отверстий является “свободным”, реализация условия  $\frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  осуществляется следующим образом.

Граница  $\Gamma_5$  проходит внутри области решения, поэтому на ней выполняется уравнение (1). На границе  $\Gamma_5$  аппроксимируем его внутрь области  $\Omega$  с первым или вторым порядком. Эти разностные уравнения замыкают разностную задачу и позволяют найти решение на  $\Gamma_5$ . Таким образом, вместе с разностными уравнениями, полученными при аппроксимации (1) внутри области, мы имеем систему вида (6), которая также решалась итерационным методом (7). Такой подход позволил существенно уменьшить область решения, не нарушая баланса втекающей и вытекающей жидкости, т. е. при увеличении координаты  $x = x_\Gamma$ , на которой аппроксимируется исходное уравнение, он не приводит к изменению решения внутри  $\Omega$ .

Как показал наш опыт решения различных задач (см., например, [5]), итерационная схема (7) достаточно эффективна и позволяет использовать один и тот же алгоритм для нахождения решения (6) независимо от знакоопределенности и особенности матрицы  $A$ . Поэтому здесь мы сосредоточим внимание не на анализе метода решения, а на численном сравнении двух моделей течения жидкости в закрытом водоеме. На рис. 2–7  $U_0$ ,  $U_1$  и  $U_2$  — заданная скорость во входном, нижнем и верхнем выходных отверстиях соответственно. При этом если на каком-нибудь рисунке значение  $U_1$  не указано, то это означает, что нижнее выходное отверстие является “свободным”, т. е. там не задано значение скорости вытекающей жидкости. Во всех расчетах в случае стратифицированной жидкости  $k^2 = 10$ .

На рис. 2 и 3 приведены картины течения при наличии и отсутствии “свободного” отверстия. Видно, что наличие стратификации существенно влияет на течение. Из рис. 2–7 следует, что течение стратифицированной жидкости всегда было вихревым. При этом при решении задачи 1 нестратифицированная жидкость более устойчива к изменению формы дна, чем стратифицированная при заданном расходе жидкости (см. рис. 4). Иными словами, жесткое задание векторов скорости на одном и другом

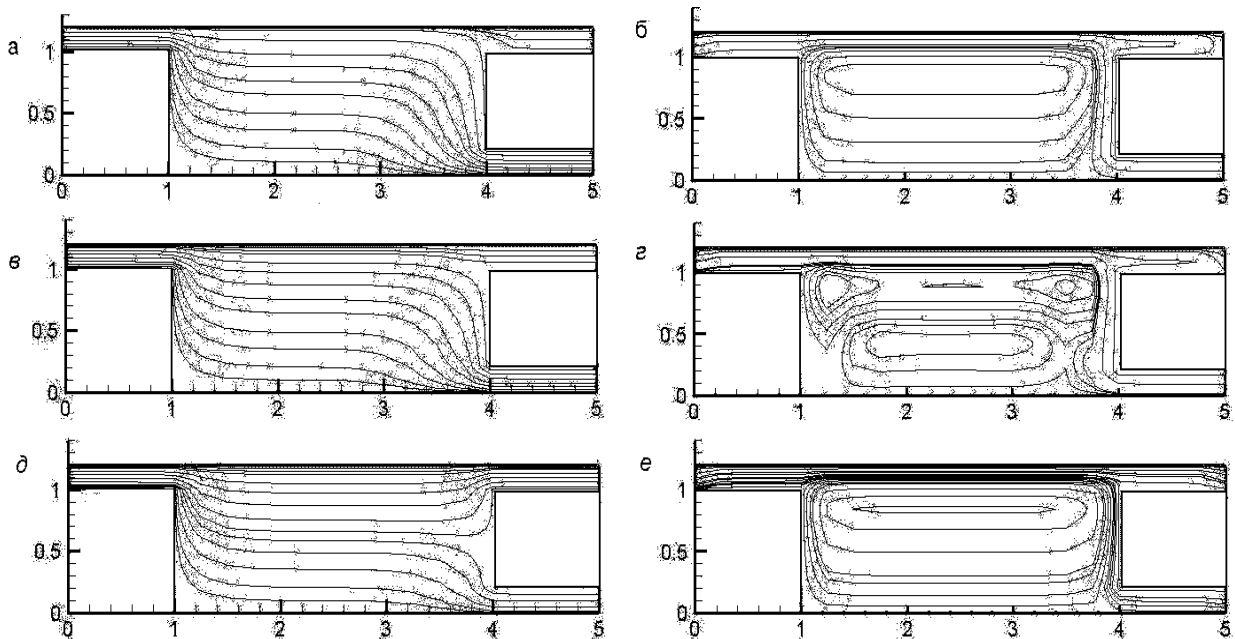


Рис. 2. Задача 1. Жидкость нестратифицированная (слева) и стратифицированная (справа):  $a$  и  $b$  —  $U_0 = 1.0, U_1 = 0.495, U_2 = 0.005$ ;  $c$  и  $e$  —  $U_0 = 1.0, U_1 = 0.25, U_2 = 0.25$ ;  $d$  и  $e$  —  $U_0 = 1.0, U_1 = 0.4, U_2 = 0.1$

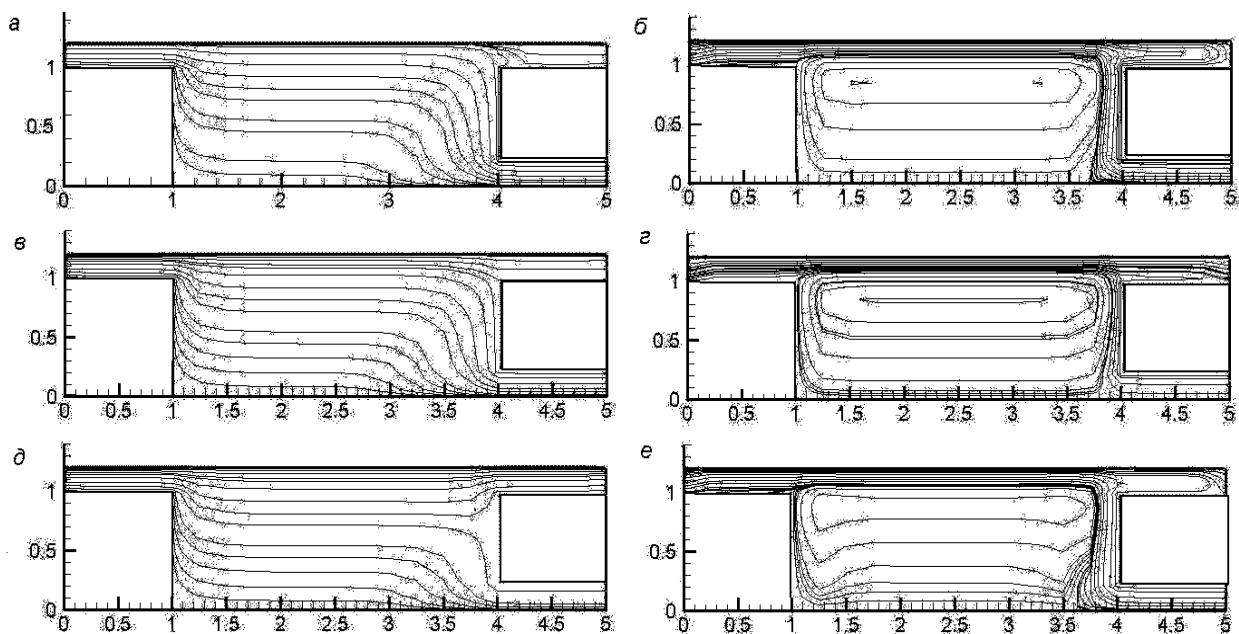


Рис. 3. Задача 2. Жидкость нестратифицированная (слева) и стратифицированная (справа):  
 $a$  и  $б$  —  $U_0 = 1.0, U_2 = 0.005$ ;  $в$  и  $г$  —  $U_0 = 1.0, U_2 = 0.25$ ;  $д$  и  $е$  —  $U_0 = 1.0, U_2 = 0.1$

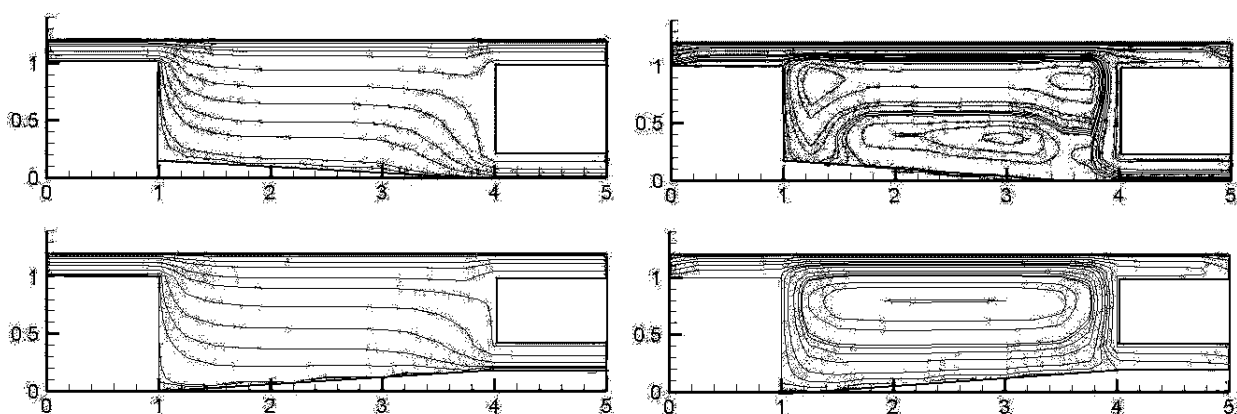


Рис. 4. Задача 1. Наклонное дно. Жидкость нестратифицированная (слева) и стратифицированная (справа):  $U_0 = 1.0, U_1 = 0.25, U_2 = 0.25$

выходе из водоема может привести при наличии стратификации к кардинальному изменению характера течения. Из рис. 4 видно, что при одном наклоне дна в области решения имеется несколько вихрей, а при другом — всего один. Если же имеется “свободное” отверстие, то изменение формы дна незначительно изменяет картину течения стратифицированной жидкости (см. рис. 5). Это означает, что “свободное” вытекание жидкости из одного отверстия, даже при наличии вихрей, задает более “естественное” течение.

Наличие фильтрации через стенки водоема может не позволить априори правильно задать скорость жидкости на выходе из нижнего отверстия. Например, в случае, приведенном на рис. 6, жидкость вытекает из водоема, а на рис. 7 — втекает. Характер течения внутри области  $\Omega$ , в частности, зависит от разности внутреннего и внеш-

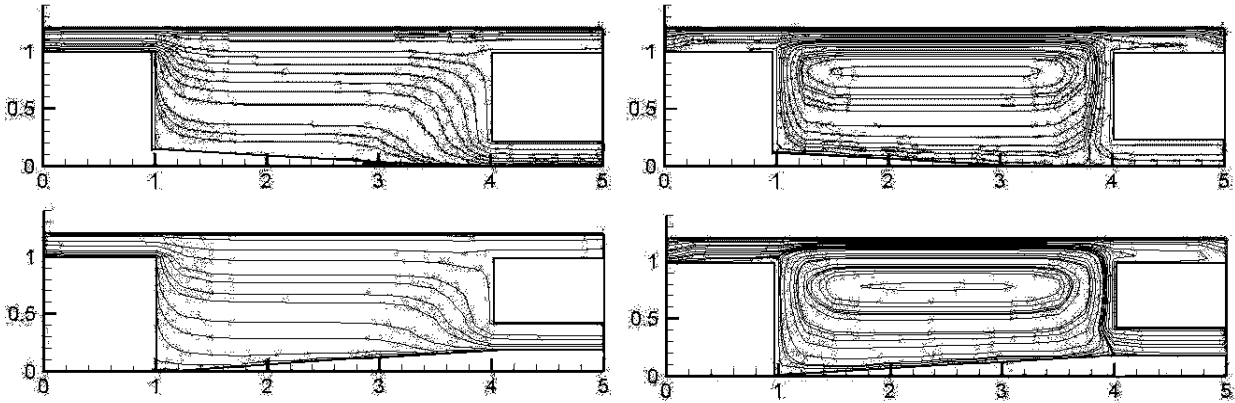


Рис. 5. Задача 2. Наклонное дно. Жидкость нестратифицированная (слева) и стратифицированная (справа):  $U_0 = 1.0, U_2 = 0.25$

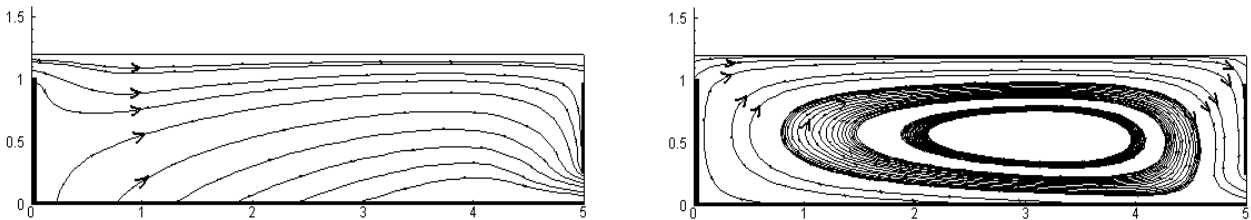


Рис. 6. Задача 3. Фильтрация через дно водоема. Нестратифицированная (слева) и стратифицированная (справа) жидкость:  $U_0 = 1.0, U_2 = 0.25, p_{\text{внеш}} = 1.1, c = 0.5$

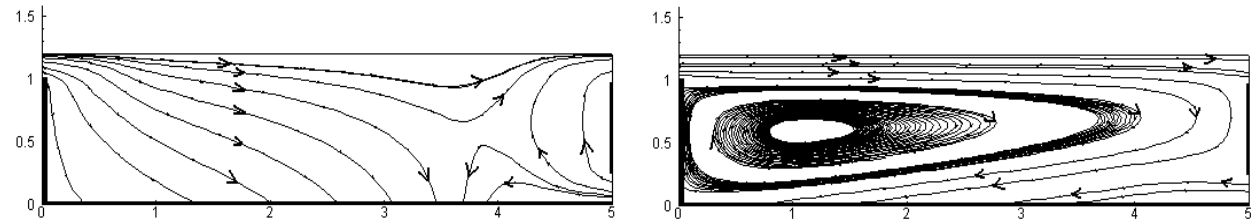


Рис. 7. Задача 3. Фильтрация через дно водоема. Нестратифицированная (слева) и стратифицированная (справа) жидкость:  $U_0 = 1.0, U_2 = 0.25, p_{\text{внеш}} = 0.5, c = 0.5$

него давлений. Как показали расчеты, использование аппроксимации уравнения (1) для замыкания разностной задачи позволяет получать хотя и существенно различные (см. рис. 6 и 7) картины течения для стратифицированной и нестратифицированной жидкости, но во всех случаях сохраняется баланс втекающей и вытекающей жидкости.

В заключение можно сделать следующие выводы. Во-первых, использование метода неполной аппроксимации (7) позволяет получать решение системы линейных алгебраических уравнений вне зависимости от знакоопределенности или незнакоопределенности оператора системы с использованием одного и того же алгоритма. Используемый метод замыкания разностной задачи путем аппроксимации уравнения в “свободном” выходном отверстии  $\Gamma_5$  позволяет получать течения с соблюдением баланса втекающей и вытекающей жидкости. Во-вторых, при анализе конкретного течения необходимо тща-

тельно подходить к выбору модели, потому что характер поведения стратифицированной и нестратифицированной жидкости существенно различается: течение нестратифицированной жидкости безвихревое, а стратифицированной обязательно вихревое.

## Список литературы

- [1] БЕЛОЛИПЕЦКИЙ В.М., КОСТЮК В.Ю., ШОКИН Ю.И. Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1991. 178 с.
- [2] САМАРСКИЙ А.А., НИКОЛАЕВ Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
- [3] ЗАХАРОВ Ю.Н. Итерационные схемы неполной аппроксимации // Числ. методы сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычисл. центр. Ин-т теор. и прикл. механики. 1995. Т. 16, № 6. С. 77–83.
- [4] ЗАХАРОВ Ю.Н. Об одном методе последовательных приближений решения линейных операторных уравнений // Теория функций и ее приложения, Кемерово, 1985. С. 86–89.
- [5] ЗАХАРОВ Ю.Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2004. 239 с.

*Поступила в редакцию 14 марта 2008 г.*