Групповая классификация уравнений модели конвекции с учетом сил плавучести*

А. А. Родионов, И. В. Степанова
Институт вычислительного моделирования СО РАН Красноярск, Россия
e-mail: aarod@icm.krasn.ru, stepiv@icm.krasn.ru

A group classification of the convective motion of a binary mixture with the thermal diffusion effect is investigated for the case of a function which determines the buoyancy force. Special characteristics of this function are found. Admissible operators that increase the kernel of basic Lie algebras are constructed according to the special characteristics of the buoyancy force function.

1. Описание системы уравнений

В последнее время возрос интерес к неклассическим моделям гидродинамики. В частности, к модели конвекции с учетом эффектов термодиффузии и диффузионной теплопроводности. Естественная термогравитационная конвекция, развивающаяся в водоемах (например, при весенне-летнем прогреве), оказывает большое влияние на водообменные процессы. Но в силу сложности уравнения состояния, т. е. зависимости плотности от температуры, концентрации и давления (особенно для глубоких водоемов), исследовать эти процессы затруднительно. Существует целый ряд форм представления уравнения состояния жидкостей, определяющих с достаточной точностью плотность через давление, температуру и минерализацию в широком диапазоне значений этих параметров [1]. Почти все они получены экспериментально и представляют собой сложные алгебраические выражения. В данной работе предлагается искать эту зависимость методами группового анализа. Основу модели термодиффузии несжимаемой бинарной смеси жидкостей составляет система уравнений Навье—Стокса с учетом сил плавучести, дополненная уравнениями тепло- и массопереноса. Движение смеси описывается системой уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\triangle\mathbf{u} + R(p,T,c)\mathbf{g},\\
&\operatorname{div}\mathbf{u} = 0,\\
&\frac{dT}{dt} = \chi\triangle T,\\
&\frac{dc}{dt} = D\triangle c + \alpha D\triangle T,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00836), интеграционного проекта СО РАН № 2.15 и индивидуального гранта Красноярского краевого фонда науки (проект 17G088).

где $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ — вектор координат, $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ — вектор скорости, p — давление, T — малое отклонение температуры от среднего значения, c — малое отклонение концентрации легкого компонента от среднего значения, $\rho_0 = \mathrm{const}$ — плотность смеси при средних значениях температуры и концентрации, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ — вектор массовых сил, ν — кинематическая вязкость, χ — коэффициент температуропроводности, D — коэффициент диффузии, α — коэффициент Соре, $R(p, T, c)$ — функция, определяющая силу плавучести.

Предполагается, что $\nu \neq 0,\ \chi \neq 0,\ \chi \neq D,\ D \neq 0,\ \alpha \neq 0$. Если сделать замену $\rho_0^{-1} p \to p$, $-Rg \to R$, можно считать, что $\rho_0 = 1,\ g = 1$. Приведем систему (1) к виду, более удобному для группового анализа. Для этого сделаем замену $T = \dfrac{\chi - D}{\alpha D}\bar{T},\ c = \bar{T} + \bar{c}$. После этих преобразований система (1) будет иметь вид (в дальнейшем черту над $\bar{T}, \bar{c}$ опускаем), $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ — орт вдоль оси z:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \nu \triangle \mathbf{u} + R(p, T, c)\mathbf{k},\\
&\operatorname{div} \mathbf{u} = 0,\\
&\frac{dT}{dt} = \chi \triangle T,\\
&\frac{dc}{dt} = D \triangle c.
\end{aligned} \tag{2}
$$

2. Решение определяющих уравнений

Поставим задачу групповой классификации системы (2) относительно функции $R(p, T, c)$. Необходимо получить ядро основной алгебры Ли допускаемых системой (2) операторов при произвольном выборе функции R и выделить спецификации функции, при которых ядро алгебры Ли расширяется.

Обозначим $x^4 = t,\ u^4 = p,\ u^5 = T,\ u^6 = c$. Будем также считать,что если $f(\mathbf{x})$ — некоторая функция, то $f_i = \partial f / \partial x^i,\ f_{ij} = \partial^2 f / \partial x^i \partial x^j,\ i, j = \overline{1, 4}$. Система уравнений (2) в координатной форме запишется так:

$$
\begin{aligned}
&u^1_4 + u^1 u^1_1 + u^2 u^1_2 + u^3 u^1_3 + u^4_1 - \nu(u^1_{11} + u^1_{22} + u^1_{33}) = 0,\\
&u^2_4 + u^1 u^2_1 + u^2 u^2_2 + u^3 u^2_3 + u^4_2 - \nu(u^2_{11} + u^2_{22} + u^2_{33}) = 0,\\
&u^3_4 + u^1 u^3_1 + u^2 u^3_2 + u^3 u^3_3 + u^4_3 - \nu(u^3_{11} + u^3_{22} + u^3_{33}) + R = 0,\\
&u^1_1 + u^2_2 + u^3_3 = 0,\\
&u^5_4 + u^1 u^5_1 + u^2 u^5_2 + u^3 u^5_3 - \chi(u^5_{11} + u^5_{22} + u^5_{33}) = 0,\\
&u^6_4 + u^1 u^6_1 + u^2 u^6_2 + u^3 u^6_3 - D(u^6_{11} + u^6_{22} + u^6_{33}) = 0.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Заметим, что система уравнений (3) может быть дополнена дифференциальными следствиями по $x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4$ первых четырех уравнений системы:

$$
\begin{aligned}
&(u^1_1)^2 + (u^2_2)^2 + (u^3_3)^2 + 2(u^1_2 u^2_1 + u^2_3 u^3_2 + u^3_1 u^1_3) + u^4_{11} + u^4_{22} + u^4_{33} + R_3 = 0,\\
&u^1_{1i} + u^2_{2i} + u^3_{3i} = 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Здесь $i = \overline{1, 4}$, $R_3 = \dfrac{\partial R}{\partial u^4} u^4_3 + \dfrac{\partial R}{\partial u^5} u^5_3 + \dfrac{\partial R}{\partial u^6} u^6_3$. Уравнения (3), (4) находятся в инволюции. Вопрос о соответствии групповых свойств системы (3) и системы (3), (4) пока остается открытым.

Инфинитезимальный оператор, допускаемый системой (3), ищем в виде [2]

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{5}$$

где $i = \overline{1,4}$, $\alpha = \overline{1,6}$, считая, что координаты оператора зависят от всех зависимых и независимых переменных (предполагается суммирование по повторяющемуся индексу).

Для формирования определяющих уравнений нужно продолжить оператор X на вторые производные и подействовать продолженным оператором $\underset{2}{X}$ на уравнения (3). При этом из уравнений (3) выражаем u_4^1, u_4^2, u_4^3, u_3^3, u_4^5, u_4^6 и подставляем в определяющие уравнения. После достаточно длинных выкладок при расщеплении этих уравнений относительно независимых переменных получаем их решение в виде

$$\begin{aligned}
&\xi^1 = C_4x^1 + C_1x^2 + C_2x^3 + h^1(x^4),\\
&\xi^2 = -C_1x^1 + C_4x^2 + C_3x^3 + h^2(x^4),\\
&\xi^3 = -C_2x^1 - C_3x^2 + C_4x^3 + h^3(x^4),\\
&\xi^4 = 2C_4x^4 + C_0,\\
&\eta^1 = -C_4u^1 + C_1u^2 + C_2u^3 + h_4^1(x^4),\\
&\eta^2 = -C_1u^1 - C_4u^2 + C_3u^3 + h_4^2(x^4),\\
&\eta^3 = -C_2u^1 - C_3u^2 - C_4u^3 + h_4^3(x^4),\\
&\eta^4 = -2C_4u^4 + f^1(x^4)x^1 + f^2(x^4)x^2 + f(x^3, x^4),\\
&\eta^5 = C_5u^5 + C_7,\\
&\eta^6 = C_6u^6 + C_8.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $C_0, ..., C_8$ — постоянные, $h^i(x^4)$, $i = 1,2,3$, $f^1(x^4)$, $f^2(x^4)$, $f(x^3,x^4)$ — произвольные гладкие функции, $h_4^i = \partial h^i/\partial x^4$.

Среди определяющих уравнений остаются классифицирующие уравнения на функцию $R(u^4,u^5,u^6)$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 h^1}{(\partial x^4)^2} - C_2R + f^1 = 0,\\
\frac{\partial^2 h^2}{(\partial x^4)^2} - C_3R + f^2 = 0,\\
\frac{\partial^2 h^3}{(\partial x^4)^2} + 3C_4R + \frac{\partial f}{\partial x^3} + \frac{\partial R}{\partial u^4}\eta^4 + \frac{\partial R}{\partial u^5}\eta^5 + \frac{\partial R}{\partial u^6}\eta^6 = 0.
\end{gathered} \tag{7}$$

3. Групповая классификация системы (3)

Если предположить произвольность функции R по всем трем переменным u^4, u^5, u^6, то все коэффициенты при R и ее производных в (7) равны нулю. Расщепление по независимым переменным дает базис ядра операторов

$$\begin{aligned}
L_0 = \Big\{ X_0 = \frac{\partial}{\partial x^4},\ X_{12} = x^1\frac{\partial}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + u^1\frac{\partial}{\partial u^2} - u^2\frac{\partial}{\partial u^1},\\
H_i(1) = \frac{\partial}{\partial x^i},\ H_i(x^4) = x^4\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial u^i},\ i = 1,2,3 \Big\}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Перейдем к вычислению преобразований эквивалентности для уравнений (3) (это преобразования, сохраняющие структуру уравнений (3), но изменяющих R). Инфинитезимальный оператор группы будем искать в виде

$$X^{\text{экв}} = X + \eta^R \frac{\partial}{\partial R},$$

считая R независимой переменной уравнения (3), а оператор X определен в (5). Заметим, что к уравнениям (3) необходимо добавить условия равенства нулю производных от R по переменным x^i, u^α, $i = \overline{1,4}$, $\alpha = \overline{1,3}$. Действуя продолженным оператором $\underset{2}{X}^{\text{экв}}$ на описанную систему уравнений и переходя на многообразие, определяемое этой системой, получим определяющие уравнения. Из решения определяющих уравнений следует, что оператор эквивалентности имеет вид

$$\begin{aligned}X^{\text{экв}} = (d_0x^1 + d_1x^2 + \varphi^1(x^4))\frac{\partial}{\partial x^1} + (-d_1x^1 + d_0x^2 + \varphi^2(x^4))\frac{\partial}{\partial x^2} +\\ +(d_0x^3 + \varphi^3(x^4))\frac{\partial}{\partial x^3} + (2d_0x^4 + d_2)\frac{\partial}{\partial x^4} + (-d_0u^1 + d_1u^2 + \varphi^1_{x^4})\frac{\partial}{\partial u^1} +\\ +(-d_1u^1 - d_0u^2 + \varphi^2_{x^4})\frac{\partial}{\partial u^2} + (-d_0u^3 + \varphi^3_{x^4})\frac{\partial}{\partial u^3} +\\ +(-2d_0u^4 - \varphi^1_{x^4x^4}x^1 - \varphi^2_{x^4x^4}x^2 - (\varphi^3_{x^4x^4} - d_3)x^3 + \varphi^4(x^4))\frac{\partial}{\partial u^4} +\\ +(d_4u^5 + d_5)\frac{\partial}{\partial u^5} + (d_6u^6 + d_7)\frac{\partial}{\partial u^6} + (-3d_0R - d_3)\frac{\partial}{\partial R},\end{aligned}$$

где d_i, $i = 0, ..., 7$, — произвольные постоянные, $\varphi^i(x^4)$, $i = 1, ..., 4$, — произвольные гладкие функции, $\varphi^i_{x^4}$, $\varphi^i_{x^4x^4}$ — производные этих функций по переменной x^4. Видим, что преобразование эквивалентности для R возможно в двух случаях. Полагая $d_0 = 1$, а остальные произвольные постоянными и функции равными нулю, на операторе

$$X = x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3} + 2x^4\frac{\partial}{\partial x^4} - u^1\frac{\partial}{\partial u^1} - u^2\frac{\partial}{\partial u^2} - u^3\frac{\partial}{\partial u^3} - 2u^4\frac{\partial}{\partial u^4} - 3R\frac{\partial}{\partial R}$$

получим группу растяжений

$$G^1 : \{\bar{x}^i = e^{a_1}x^i,\ \bar{u}^i = e^{-a_1}u^i,\ i = 1,2,3;\ \bar{x}^4 = e^{2a_1}x^4,\ \bar{u}^4 = e^{-2a_1}u^4,\ \bar{R} = e^{-3a_1}R\}. \quad (9)$$

Аналогично, полагая $d_3 = 1$, а остальные произвольные постоянные и функции равными нулю, на операторе $X = x^3\dfrac{\partial}{\partial u^4} - \dfrac{\partial}{\partial R}$ получим группу сдвигов

$$G^2 : \{\bar{x}^3 = x^3,\ \bar{u}^4 = u^4 + a_2x^3,\ \bar{R} = R - a_2\}, \quad (10)$$

где a_1, a_2 — групповые параметры.

Из (7) следует, что необходимо рассмотреть случаи, когда $R = \text{const}$ и $R \neq \text{const}$. Если $R = \text{const}$, то к системе уравнений применим преобразование $x^4 = \bar{x}^4$, $x^3 = \bar{x}^3 + R(\bar{x}^4)^2/2$, $u^3 = \bar{u}^3 + R\bar{x}^4$. Это преобразование перехода в инерциальную систему координат по третьему направлению исключает из уравнений (3) $R = \text{const}$. Можно считать $R = 0$, тогда четыре первых уравнения в (3) являются уравнениями

Навье—Стокса (их исследование проводилось в [3]), которые допускают алгебру операторов:

$$
\begin{aligned}
&X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_{ij} = x^i\frac{\partial}{\partial x^j} - x^j\frac{\partial}{\partial x^i} + u^i\frac{\partial}{\partial u^j} - u^j\frac{\partial}{\partial u^i}, \quad H_0 = \varphi(t)\frac{\partial}{\partial p},\\
&H_i(h^i(t)) = h^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i} + h^i_t(t)\frac{\partial}{\partial u^i} - x^i h^i_{tt}(t)\frac{\partial}{\partial p}, \quad i,j = 1,2,3, \ \ i<j,\\
&Z = 2t\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\left(x^i\frac{\partial}{\partial x^i} - u^i\frac{\partial}{\partial u^i}\right) - 2p\frac{\partial}{\partial p},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

с произвольными гладкими функциями $\varphi(t)$, $h^i(t)$, $i = 1,2,3$. Для двух последних уравнений в (3), кроме операторов (11), имеют место операторы

$$
T^1 = \frac{\partial}{\partial T}, \ \ T^2 = T\frac{\partial}{\partial T}, \ \ C^1 = \frac{\partial}{\partial c}, \ \ C^2 = c\frac{\partial}{\partial c}. \tag{12}
$$

Тем самым, уравнения (3) при $R = 0$ ($R = \mathrm{const}$) допускают операторы (11), (12). Операторы (11), (12) представлены в физических переменных.

Если $R \neq \mathrm{const}$, то из (7) следует, что $C_2 = C_3 = 0$, поскольку f^1, f^2, h^1, h^2 не зависят от u^4, u^5, u^6. Кроме того, $f^1(x^4) = -h^1_{x^4x^4}(x^4), f^2(x^4) = -h^2_{x^4x^4}(x^4)$. Среди классифицирующих уравнений (7) остается одно:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 h^3(x^4)}{(\partial x^4)^2} + \frac{\partial f(x^3,x^4)}{\partial x^3} + 3C_4R + \frac{\partial R}{\partial u^4}\Big[-2C_4u^4 - \frac{\partial^2 h^1(x^4)}{(\partial x^4)^2}x^1 -\\
&-\frac{\partial^2 h^2(x^4)}{(\partial x^4)^2}x^2 + f(x^3,x^4)\Big] + \frac{\partial R}{\partial u^5}(C_5u^5 + C_7) + \frac{\partial R}{\partial u^6}(C_6u^6 + C_8) = 0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

При решении классифицирующего уравнения (13) необходимо учесть случаи $\partial R/\partial u^4 = 0$, $\partial R/\partial u^4 = \mathrm{const} \neq 0$ и случай, когда функция R не является линейной по u^4. Приступим к последовательному рассмотрению этих случаев.

I. $\partial R/\partial u^4 = 0$, $R = R(u^5,u^6)$. Расщепляя уравнение (13) относительно независимых переменных x^3, x^4, потребуем, чтобы $\dfrac{\partial^2 h^3(x^4)}{(\partial x^4)^2} + \dfrac{\partial f(x^3,x^4)}{\partial x^3} = C_9$, $C_9 = \mathrm{const}$. Тогда уравнение (13) перепишется как

$$
C_9 + 3C_4R + \frac{\partial R}{\partial u^5}(C_5u^5 + C_7) + \frac{\partial R}{\partial u^6}(C_6u^6 + C_8) = 0. \tag{14}
$$

Координаты оператора X запишутся в виде

$$
\begin{aligned}
&\xi^1 = C_4x^1 + C_1x^2 + h^1(x^4), && \xi^2 = -C_1x^1 + C_4x^2 + h^2(x^4),\\
&\xi^3 = C_4x^3 + h^3(x^4), && \xi^4 = 2C_4x^4 + C_0,\\
&\eta^1 = -C_4u^1 + C_1u^2 + \frac{\partial h^1}{\partial x^4}, && \eta^2 = -C_1u^1 - C_4u^2 + \frac{\partial h^2}{\partial x^4},\\
&\eta^3 = -C_4u^3 + \frac{\partial h^3}{\partial x^4}, && \eta^4 = -2C_4u^4 - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 h^i}{(\partial x^4)^2}x^i + C_9x^3 + \psi(x^4),\\
&\eta^5 = C_5u^5 + C_7, && \eta^6 = C_6u^6 + C_8.
\end{aligned}
$$

Здесь $C_0, ..., C_9$ — постоянные, $h^i(x^4)$, $i = 1,2,3$, $\psi(x^4)$ — произвольные гладкие функции.

Т а б л и ц а 1. Групповая классификация по функции $R = R(u^5, u^6)$

№	$R(u^5, u^6)$	Операторы
1	Произвольная	$L_0^I = \{X_0, X_{12}, H_i(1), H_i(h^i(x^4)), i = 1,2,3, H_0(\varphi(x^4))\}$
2	$(u^5)^{-\frac{\gamma}{2\gamma_1}}(u^6)^{-\frac{\gamma}{2\gamma_2}} f((u^5)^{\gamma_2}(u^6)^{-\gamma_1})$	$L_0^I,\ \gamma Z + 3(\gamma_1 T^1 + \gamma_2 C^1), \gamma \neq 0,\ \gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0$
3	$(u^6)^{-\gamma} f(u^5)$	$L_0^I,\ \gamma Z + 3C^1,\ \gamma \neq 0$
4	$e^{\delta_1 u^5} f(u^6 e^{\delta_2 u^5})$	$L_0^I,\ Z + 3\delta_1(\delta_2 C^1 - T^2)$
5	$(u^5)^{-\gamma} f(u^6)$	$L_0^I,\ \gamma Z + 3T^1,\ \gamma \neq 0$
6	$e^{\delta_1 u^6} f(u^5 e^{\delta_2 u^5})$	$L_0^I,\ Z + 3\delta_1(\delta_2 T^1 - C^2)$
7	$e^{\gamma(u^5 + \delta u^6)} f(u^5 - \delta u^6)$	$L_0^I,\ 2\delta\gamma Z - 3(\delta T^2 + C^2),\ \gamma \neq 0$
8	$e^{\delta u^6} f(u^5)$	$L_0^I,\ Z - 3\delta C^2$
9	$e^{\delta u^5} f(u^6)$	$L_0^I,\ Z - 3\delta T^2$
10	$\varepsilon \ln((u^5)^{\gamma_2}(u^6)^{\gamma_1}) + f((u^5)^{\gamma_2}(u^6)^{-\gamma_1})$	$L_0^I,\ \gamma_1 T^1 + \gamma_2 C^1 - 2\varepsilon\gamma_2\gamma_1 Y_1,\ \gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0$
11	$\varepsilon(\delta u^6 + \ln(u^5)) + f(\delta u^6 - \ln(u^5))$	$L_0^I,\ C^2 + \delta T^1 - 2\varepsilon\delta Y^1$
12	$\varepsilon \ln(u^5) + f(u^6)$	$L_0^I,\ T^1 - \varepsilon Y^1$
13	$\varepsilon(\delta u^5 + \ln(u^6)) + f(\delta u^5 - \ln(u^6))$	$L_0^I,\ \delta C^1 + T^2 - 2\varepsilon\delta Y^1$
14	$\varepsilon \ln(u^6) + f(u^5)$	$L_0^I,\ C^1 - \varepsilon Y^1$
15	$\delta u^6 + f(u^5)$	$L_0^I,\ C^2 - \delta Y^1$
16	$\delta u^5 + f(u^6)$	$L_0^I,\ T^2 - \delta Y^1$
17	$\varepsilon(u^5 + \delta u^6) + f(u^5 - \delta u^6)$	$L_0^I,\ \delta T^2 + C^2 - 2\varepsilon\delta Y^1$

Примечание. Обозначения, использованные в таблице, даны в конце статьи.

Анализируя уравнение (14) в предположении произвольности функции R, получаем, что $C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = C_9 = 0$ и базис ядра операторов в этом случае имеет вид

$$L_0^I = \left\{X_0,\ X_{12},\ H_i(h^i(x^4)),\ i = \overline{1,3},\ H_0(\psi(x^4)) = \psi(x^4)\frac{\partial}{\partial u^4}\right\}.$$

Заметим, что ядро (8) $L_0 \subset L_0^I$.

Классифицирующее уравнение (14) — линейное уравнение первого порядка, оно легко интегрируется. Всевозможные случаи интегрирования уравнения (14) приводят к различным спецификациям функции $R(u^5, u^6)$ и расширению базиса операторов L_0^I. Результат классификации функции $R(u^5, u^6)$ дается в табл. 1.

II. $\partial R/\partial u^4 = D_0 = \text{const} \neq 0,\ R = D_0 u^4 + \Phi(u^5, u^6)$. С учетом преобразования эквивалентности (9) можно считать, что $D_0 = 1$, тогда $R = u^4 + \Phi(u^5, u^6)$. Расщепление уравнения (13) относительно переменных x^1, x^2, x^3, x^4, u^4 приводит к требованию:

$$C_4 = 0, \quad \frac{\partial^2 h^1(x^4)}{(\partial x^4)^2} = \frac{\partial^2 h^1(x^4)}{(\partial x^4)^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 h^3(x^4)}{(\partial x^4)^2} + \frac{\partial f(x^3, x^4)}{\partial x^3} + f(x^3, x^4) = C_9.$$

Значит, (13) будет иметь вид

$$C_9 + \frac{\partial \Phi}{\partial u^5}(C_5 u^5 + C_7) + \frac{\partial \Phi}{\partial u^6}(C_6 u^6 + C_8) = 0. \tag{15}$$

Т а б л и ц а 2. Групповая классификация по функции $R = u^4 + \Phi(u^5, u^6)$

№	$\Phi(u^5, u^6)$	Операторы
1	Произвольная	$L_0^{II} = \{X_0,\ X_{12},\ H_i(1),\ H_i(x^4), i = 1,2,$ $H_4(h^3(x^4)),\ H_5(\psi(x^4))\}$
2	$\frac{\gamma}{\gamma_1\gamma_2}\ln((u^5)^{\gamma_2}(u^6)^{\gamma_1}) + f((u^5)^{\gamma_2}(u^6)^{-\gamma_1})$	$L_0^{II},\ \gamma_2 C^1 + \gamma_1 u^5 T^1 - 2\gamma H_0(1),\ \gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0$
3	$\gamma(\delta u^6 + \ln(u^5)) + f(\delta u^6 - \ln(u^5))$	$L_0^{II},\ C^2 + \delta T^1 - 2\gamma\delta H_0(1)$
4	$\gamma\ln(u^5) + f(u^6)$	$L_0^{II},\ T^1 - \gamma H_0(1)$
5	$\gamma(\delta u^5 + \ln(u^6)) + f(\delta u^5 - \ln(u^6))$	$L_0^{II},\ \delta C^1 + T^2 - 2\gamma\delta H_0(1)$
6	$\gamma\ln(u^6) + f(u^5)$	$L_0^{II},\ C^1 - \gamma H_0(1)$
7	$\delta u^6 + f(u^5)$	$L_0^{II},\ C^2 - \delta H_0(1)$
8	$\delta u^5 + f(u^6)$	$L_0^{II},\ T^2 - \delta H_0(1)$
9	$\gamma(u^5 + \delta u^6) + f(u^5 - \delta u^6)$	$L_0^{II},\ \delta T^2 + C^2 - 2\gamma\delta H_0(1)$

Примечание. Обозначения, использованные в таблице, даны в конце статьи.

Координаты оператора X перепишутся следующим образом:

$$\xi^1 = C_1x^2 + C_{10}x^4 + C_{11}, \qquad \xi^2 = -C_1x^1 + C_{12}x^4 + C_{13},$$
$$\xi^3 = h^3(x^4), \qquad \xi^4 = C_0,$$
$$\eta^1 = C_1u^2 + C_{10}, \qquad \eta^2 = -C_1u^1 + C_{12},$$
$$\eta^3 = \frac{\partial h^3}{\partial x^4}, \qquad \eta^4 = C_9 - \frac{\partial^2 h^3}{(\partial x^4)^2} + \psi(x^4)e^{-x_3},$$
$$\eta^5 = C_5u^5 + C_7, \qquad \eta^6 = C_6u^6 + C_8.$$

Здесь $C_0, ..., C_{13}$ — постоянные, $h^3(x^4), \psi(x^4)$ — произвольные гладкие функции.

Предполагая произвольность функции Φ, из (15) получаем $C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = C_9 = 0$. Базис ядра операторов в этом случае запишется так:

$$L_0^{II} = \Big\{X_0,\ X_{12},\ H_i(1),\ H_i(x^4),\ i = 1,2,\ H_4(h^3(x^4)) = h^3(x^4)\frac{\partial}{\partial x^3} + h^3_{x^4}\frac{\partial}{\partial u^3} - h^3_{x^4x^4}\frac{\partial}{\partial u^4},$$
$$H_5(\psi(x^4)) = \psi(x^4)e^{-x_3}\frac{\partial}{\partial u^4}\Big\}.$$

В этом случае ядро (8) $L_0 \subset L_0^{II}$.

Классифицирующее уравнение (15) — линейное уравнение первого порядка. При его интегрировании получаем различные случаи спецификации функции $\Phi(u^5, u^6)$ и расширения базиса операторов L_0^{II}. Результат классификации функции $R = u^4 + \Phi(u^5, u^6)$ дается в табл. 2.

III. $\partial R/\partial u^4 \neq \mathrm{const}$, т. е. R нелинейна по u^4. В этом случае в (13) необходимо потребовать, чтобы

$$\frac{\partial^2 h^1(x^4)}{(\partial x^4)^2} = \frac{\partial^2 h^1(x^4)}{(\partial x^4)^2} = 0, \quad f(x^3, x^4) = C_{10}, \quad \frac{\partial^2 h^3(x^4)}{(\partial x^4)^2} = C_9.$$

Т а б л и ц а 3. Групповая классификация по функции R, нелинейной по u^4

№	$R(u^4,u^5,u^6)$	Операторы
1	Произвольная	$L_0=\{X_0,X_{12},H_i(1),H_i(x^4),i=1,2,3\}$
2	$(u^4)^{\frac{3}{2}}f\left[u^5(u^4)^{\frac{\gamma_2}{2\gamma_1}},u^6(u^4)^{\frac{\gamma_3}{2\gamma_1}}\right]$	$L_0,\ \gamma_1 Z+\gamma_2 T^1+\gamma_3 C^1,\ \gamma_1\neq 0,\ \gamma_2\neq 0,\gamma_3\neq 0$
3	$(u^4)^{\frac{3}{2}}f[u^5(u^4)^{\gamma},\delta u^6+\ln(u^4)]$	$L_0,\ Z+2\gamma T^1+2\delta C^2,\gamma\neq 0$
4	$(u^4)^{\frac{3}{2}}f[\delta u^5+\ln(u^4),u^6(u^4)^{\gamma}]$	$L_0,\ Z+2\delta T^2+2\gamma C^1,$
5	$(u^4)^{\frac{3}{2}}f[\delta_1 u^5+\ln(u^4),\delta_2 u^6+\ln u^4]$	$L_0,\ Z+2\delta_1 T^2+2\delta_2 C^2$
6	$(u^4)^{\frac{3}{2}}f(u^4)$	$L_0,\ T^1,\ T^2,\ C^1,\ C^2$
7	$(u^4)^{\frac{3}{2}}f[\delta u^5+\ln(u^4),\ln u^4]$	$L_0,\ C^1,\ C^2$
8	$(u^4)^{\frac{3}{2}}f[\ln(u^4),\delta u^6+\ln u^4]$	$L_0,\ T^1,\ T^2$
9	$\varepsilon u^4+f(u^5e^{\delta_1u^4},u^6e^{\delta_2u^4})$	$L_0,\ H_0(1)-\delta_1T^1-\delta_2C^1-\varepsilon Y^2$
10	$\varepsilon u^4+f(u^5e^{\delta_1u^4},u^6+\delta_2u^4)$	$L_0,\ H_0(1)-\delta_1T^1-\delta_2C^2-\varepsilon Y^2$
11	$\varepsilon u^4+f(u^5+\delta_2u^4,u^6e^{\delta_1u^4})$	$L_0,\ H_0(1)-\delta_2T^2-\delta_1C^1-\varepsilon Y^2$
12	$\varepsilon u^4+f(u^5+\delta_1u^4,u^6+\delta_2u^4)$	$L_0,\ H_0(1)-\delta_1T^2-\delta_2C^2-\varepsilon Y^2$
13	$\varepsilon\ln\left((u^5)^{\gamma}u^6\right)+f(u^4,(u^5)^{-\gamma}u^6)$	$L_0,\ T^1+\gamma C^1-2\gamma\varepsilon Y^2,\gamma\neq 0$
14	$\varepsilon(\delta u^6+\ln(u^5))+f(u^4,\delta u^6-\ln(u^5))$	$L_0,\ C^2+\delta T^1-2\varepsilon\delta Y^2$
15	$\varepsilon(\delta u^5+\ln(u^6))+f(u^4,\delta u^5-\ln(u^6))$	$L_0,\ T^2+\delta C^1-2\varepsilon\delta Y^2$
16	$\varepsilon\ln u^5+f(u^4,u^6)$	$L_0^I,\ T^1-\varepsilon Y^2$
17	$\varepsilon\ln u^6+f(u^4,u^5)$	$L_0,\ C^1-\varepsilon Y^2$
18	$\varepsilon(u^5+\delta u^6)+f(u^4,u^5-\delta u^6)$	$L_0,\ \delta T^2+C^2-2\delta\varepsilon Y^2$
19	$\delta u^5+f(u^4,u^6)$	$L_0,\ T^2-\delta Y^2$
20	$\delta u^6+f(u^4,u^5)$	$L_0,\ C^2-\delta Y^2$

Значит, (13) будет иметь вид

$$C_9+3C_4R+\frac{\partial R}{\partial u^4}(-2C_4u^4+C_{10})+\frac{\partial R}{\partial u^5}(C_5u^5+C_7)+\frac{\partial R}{\partial u^6}(C_6u^6+C_8)=0, \qquad (16)$$

а координаты оператора перепишутся следующим образом:

$$\xi^1=C_4x^1+C_1x^2+C_{16}x^4+C_{11}, \qquad \xi^2=C_4x^2-C_1x^1+C_{12}x^4+C_{13},$$
$$\xi^3=C_4x^3+C_9(x^4)^2/2+C_{14}x^4+C_{15}, \qquad \xi^4=2C_4x^4+C_0,$$
$$\eta^1=-C_4u^1+C_1u^2+C_{16}, \qquad \eta^2=-C_4u^2-C_1u^1+C_{12},$$
$$\eta^3=-C_4u^3+C_9x^4+C_{14}, \qquad \eta^4=C_{10}-2C_4u^4,$$
$$\eta^5=C_5u^5+C_7, \qquad \eta^6=C_6u^6+C_8,$$

здесь $C_0,...,C_{16}$ — произвольные постоянные.

Полагая в (16) функцию R произвольной, получаем $C_4=...=C_{10}=0$. Базис ядра операторов в этом случае совпадает с L_0 (8). Интегрирование уравнения (16) дает все случаи спецификации функции $R(u^4,u^5,u^6)$, нелинейной по u^4, и расширения базиса операторов L_0. Результат классификации функции R представлен в табл. 3.

Замечание. При составлении табл. 1–3 существенно использовались преобразования эквивалентности оператора $X^{\text{экв}}$, в частности, преобразования (9), (10). В таблицах f — произвольные гладкие функции своих аргументов, $\varphi(x^4)$, $\psi(x^4)$, $h^i(x^4)$, $i=1,2,3$ —

произвольные гладкие функции; $\gamma,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$ — произвольные постоянные; $\delta,\ \delta_1,\ \delta_2$ — постоянные, принимающие значения ± 1, $\varepsilon = \{0, \pm 1\}$. Обозначения операторов таковы:

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial x^4}, \quad X_{12} = x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + u^1 \frac{\partial}{\partial u^2} - u^2 \frac{\partial}{\partial u^1}, \quad H_0 = \varphi(x^4) \frac{\partial}{\partial x^4},$$

$$H_i(h^i(x^4)) = h^i(x^4) \frac{\partial}{\partial x^i} + h^i_{x^4}(x^4) \frac{\partial}{\partial u^i} - x^i h^i_{x^4 x^4}(x^4) \frac{\partial}{\partial u^4}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$H_4(h^3(x^4)) = h^3(x^4) \frac{\partial}{\partial x^3} + h^3_{x^4} \frac{\partial}{\partial u^3} - h^3_{x^4 x^4} \frac{\partial}{\partial u^4}, \quad H_5(\psi(x^4)) = \psi(x^4) e^{-x_3} \frac{\partial}{\partial u^4},$$

$$Z = 2x^4 \frac{\partial}{\partial x^4} + \sum_{i=1}^{3} \left(x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - u^i \frac{\partial}{\partial u^i} \right) - 2u^4 \frac{\partial}{\partial u^4}, \quad Y^2 = \frac{(x^4)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x^3} + x^4 \frac{\partial}{\partial u^3}, \quad Y^1 = x^3 \frac{\partial}{\partial u^4},$$

$$T^1 = \frac{\partial}{\partial u^5}, \quad T^2 = u^5 \frac{\partial}{\partial u^5}, \quad C^1 = \frac{\partial}{\partial u^6}, \quad C^2 = u^6 \frac{\partial}{\partial u^6}.$$

Выражаем благодарность В.К. Андрееву за постановку задачи.

Список литературы

[1] Бочаров О.Б., Васильев О.Ф., Овчинникова Т.Э. Приближенное уравнение состояния пресной воды вблизи температуры масксимальной плотности// Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35, № 4. С. 556–558.

[2] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

[3] Бытев В.О. Групповые свойства уравнений Навье—Стокса // Численные методы механики сплошных сред. 1972. Т. 3, № 5. С. 13–17.

Поступила в редакцию 25 декабря 2007 г.