

Исследование неитерационного метода наименьших квадратов для оценивания параметров аппроксимирующей окружности

С. В. МИХЛЯЕВ

Институт автоматики и электрометрии СО РАН Новосибирск, Россия
e-mail: mikhlyaev@iae.nsk.su

Analytical expressions for least squares estimation of parameters of the fitted circle and their biases produced by a non-iterative technique are given. To compensate biases, the complex estimation technique utilizing samples of various quantities of approximated points is offered.

Введение

Необходимость оценки параметров окружности, аппроксимирующей данные измерений, возникает в различных задачах, связанных с техническим контролем, обработкой изображений и т. д. [1–5]. В силу нелинейности решаемой при этом оптимизационной задачи, для определения радиуса и координат центра аппроксимирующей окружности, как правило, применяются различные итерационные алгоритмы, основанные, в частности, на методе наименьших квадратов (МНК) и минимизирующие среднеквадратичное отклонение точек от аппроксимирующей окружности [6–10]. Основным недостатком таких алгоритмов — значительные вычислительные затраты, которые не всегда допустимы в практических приложениях. Возможно также использование прямого неитерационного метода оценки параметров окружности (МНК2), являющегося по сути методом наименьших квадратов, примененным не к расстояниям, а к квадратам расстояний между точками [1, 10]. МНК2 позволяет получить решение в аналитическом виде, но дает смещенные оценки параметров [9, 10]. Смещение особенно существенно при аппроксимации фрагмента окружности в виде дуги с небольшим значением центрального угла. Для уменьшения смещения оценок параметров разработаны различные подходы, требующие, однако, дополнительных вычислительных ресурсов [10].

В работе [5] показано, что существенное уменьшение величины смещения оценок в МНК2 (МНК2-оценок) обеспечивается при использовании четырехточечной схемы аппроксимации дуги окружности. Погрешность определения параметров окружности при этом может быть допустимой для различных практических приложений. Результаты работы [5] получены путем численного моделирования в предположении независимости законов распределения погрешностей задания координат аппроксимируемых точек по координатным осям x и y .

В настоящей работе полученные в [5] результаты обобщены на случай независимых распределений погрешностей задания положений аппроксимируемых точек по радиальным и угловым координатам. Приведены аналитические выражения для смещений

МНК2-оценок координат центра и радиуса окружности в зависимости от погрешностей определения координат аппроксимируемых точек (дисперсии шума), их количества, углового распределения вдоль аппроксимирующей дуги, центрального угла дуги. Предложена комбинированная схема оценки параметров, использующая выборки из различного количества аппроксимируемых точек и обеспечивающая получение несмещенных оценок. Теоретические результаты подтверждены численными расчетами.

1. Анализ смещений оценок параметров аппроксимирующей окружности

Критерий оптимизации в рассматриваемом методе МНК2 записывается в следующем виде:

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^N \left((x_j - x_0)^2 + (y_j - y_0)^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ((x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2) \right)^2 \right\}, \quad (1)$$

$$R^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ((x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2), \quad (2)$$

где (x_i, y_i) — координаты исходных точек ($i = 1, \dots, N$), R^2 — средний квадрат радиуса аппроксимирующей окружности, (x_0, y_0) — координаты центра окружности.

Соотношение (1) имеет аналитическое решение:

$$R^2 = \overline{x^2} + \overline{y^2} - 2(x_0\overline{x} + y_0\overline{y}) + x_0^2 + y_0^2, \quad (3)$$

где черта сверху означает усреднение по выборке из N точек. Координаты центра окружности вычисляются по формулам

$$x_0 = (b_1c_2 - c_1b_2)/(a_1b_2 - b_1^2), \quad y_0 = (b_1c_1 - a_1c_2)/(a_1b_2 - b_1^2), \quad (4)$$

где

$$a_1/2N = \overline{x^2} - \overline{x^2}, \quad a_2 = b_1,$$

$$b_1/2N = \overline{x\overline{y}} - \overline{xy}, \quad b_2/2N = \overline{y^2} - \overline{y^2},$$

$$c_1/N = \overline{x^3} + \overline{xy^2} - \overline{x}(\overline{x^2} + \overline{y^2}), \quad c_2/N = \overline{y^3} + \overline{yx^2} - \overline{y}(\overline{x^2} + \overline{y^2}).$$

Основной недостаток рассматриваемого метода аппроксимации — смещенная оценка положения центра и радиуса окружности, наиболее сильно проявляющаяся при уменьшении центрального угла θ_0 аппроксимирующей дуги окружности [5, 9, 10].

Получим аналитические выражения для смещений оцениваемых параметров окружности.

Предположим, что исходные точки (x_i, y_i) являются точками дуги окружности $x^2 + y^2 = 1$ с центральным углом θ_0 и распределены по углу в диапазоне $|\theta| \leq \theta_0/2$ симметрично относительно оси x , так, что выполняется условие: $\sin(\theta_i) = 0$. Радиальные координаты точек r_i заданы с погрешностями Δ_i , имеющими нулевые средние значения:

$$x_i = (1 + \Delta_i) \cos \theta_i, \quad y_i = (1 + \Delta_i) \sin \theta_i. \quad (5)$$

Выражениям (5) соответствуют следующие зависимости дисперсии шума по различным координатам:

$$\sigma_x = \sigma \cos \theta_i, \quad \sigma_y = \sigma \sin \theta_i, \quad (6)$$

где для дисперсии шума введено обозначение $\sigma^2 = \langle \Delta_i^2 \rangle$, а угловые скобки обозначают усреднение по множеству реализаций при фиксированном значении i .

Величины смещений ΔR^2 и ΔR для среднего квадрата R^2 и радиуса R соответственно определяются из выражений (2)–(5) при усреднении по множеству N -точечных выборок:

$$\Delta R^2 = \langle R^2 \rangle - 1 = \sigma^2 - 2 \langle x_0 \bar{x} + y_0 \bar{y} \rangle + \langle x_0^2 + y_0^2 \rangle, \quad (7)$$

$$\Delta R = \langle R \rangle - 1, \quad (8)$$

где параметр R в (8) определяется из выражения (3).

Нелинейная зависимость соотношений (4) от Δ_i не позволяет выполнить усреднение непосредственно в выражениях (7), (8). Для решения этой проблемы воспользуемся разложениями x_0 и y_0 в ряды по степеням Δ_i :

$$x_0 = \frac{A}{2B} \approx \frac{1}{2B_0} \left(A_0 + A_1 - A_0 \frac{B_1}{B_0} + A_2 - A_1 \frac{B_1}{B_0} - A_0 \frac{B_2}{B_0} + A_0 \left(\frac{B_1}{B_0} \right)^2 + \dots \right), \quad (9)$$

$$y_0 = \frac{P}{2B} \approx \frac{1}{2B_0} \left(P_0 + P_1 - P_0 \frac{B_1}{B_0} + P_2 - P_1 \frac{B_1}{B_0} - P_0 \frac{B_2}{B_0} + P_0 \left(\frac{B_1}{B_0} \right)^2 + \dots \right), \quad (10)$$

где в соответствии с (4) использованы разложения

$$A = (b_1 c_2 - c_1 b_2) / 2N^2 \approx A_0 + A_1(\Delta_i) + A_2(\Delta_i^2) + \dots,$$

$$B = (a_1 b_2 - b_1^2) / 2N^2 \approx B_0 + B_1(\Delta_i) + B_2(\Delta_i^2) + \dots, \quad (11)$$

$$P = (b_1 c_1 - a_1 c_2) / 2N^2 \approx P_0 + P_1(\Delta_i) + P_2(\Delta_i^2) + \dots$$

Из выражений (5), (9)–(11) можно получить следующие результаты для средних значений:

$$\langle x_0 \rangle / \sigma^2 = \overline{\cos \theta_i} / C - 2(1 - \overline{2 \cos^2 \theta_i} + \overline{\cos \theta_i^2}) (\overline{\cos^3 \theta_i} - \overline{\cos \theta_i} \overline{\cos^2 \theta_i}) / \overline{\sin^2 \theta_i} / C^2, \quad (12)$$

$$\langle y_0 \rangle = 0, \quad \langle x_0^2 \rangle = \sigma^2 / (CN), \quad \langle y_0^2 \rangle = \sigma^2 / (N \overline{\sin^2 \theta_i}), \quad (13)$$

$$\langle x_0 \bar{x} \rangle = \sigma^2 / N + \langle x_0 \rangle \overline{\cos \theta_i}, \quad \langle y_0 \bar{y} \rangle = \sigma^2 / N, \quad (14)$$

где введено обозначение

$$C = \overline{\cos^2 \theta_i} - \overline{\cos \theta_i}^2.$$

Соответствующее (10) среднее значение $\langle y_0 \rangle = 0$ обусловлено выбранной симметричной схемой задания угловых координат исходных точек: $\overline{\sin \theta_i} = 0$.

Отметим, что при получении выражений (12)–(14) было использовано соотношение

$$\langle \overline{\Delta_i f_1(\theta_i)} \overline{\Delta_i f_2(\theta_i)} \rangle = \sigma^2 \overline{f_1(\theta_i) f_2(\theta_i)} / N,$$

справедливое для любых зависящих от θ функций $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$.

Подставляя (12)–(14) в (7), можно получить требуемое аналитическое выражение для величины смещения оценки среднего квадрата радиуса окружности ΔR^2 :

$$\Delta R^2 = \sigma^2 [1 - 4/N + 1/(NC) + 1/\overline{\sin^2 \theta_i} / N] - \overline{2 \cos \theta_i} \langle x_0 \rangle. \quad (15)$$

Величина смещения оценки радиуса ΔR (8) может быть получена аналогичным образом, при разложении выражения для радиуса окружности $R = \sqrt{1 + \alpha}$ в ряд по степеням Δ_i , где

$$\alpha = 2\overline{\Delta_i} + \overline{\Delta_i^2} - 2(x_0\overline{x} + y_0\overline{y}) + x_0^2 + y_0^2.$$

Можно показать, что

$$\Delta R = \sigma^2/2[1/2 - 4/N + (1 - \overline{\cos^2 \theta_i}(2 - \overline{\cos^2 \theta_i}))/\overline{\sin^2 \theta_i}/C] - \overline{\cos \theta_i} < x_0 >. \quad (16)$$

Выражения (12), (15), (16) определяют требуемые аналитические зависимости оцениваемых параметров и их смещений от количества исходных точек, их углового распределения по дуге аппроксимирующей окружности, величины центрального угла дуги и дисперсии шума координат аппроксимируемых точек.

2. Результаты моделирования

Для проверки справедливости полученных аналитических соотношений, исследования статистических характеристик оценок и их зависимостей от вариаций различных параметров проводилось численное моделирование МНК2. При моделировании для получения статистических характеристик использовалось 10^6 выборок исходных аппроксимируемых точек, координаты которых задавались, в соответствии с соотношениями (5), с аддитивным нормально распределенным шумом $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ при нулевом среднем и дисперсии σ^2 .

На рис. 1 и 2 представлены расчетные данные, полученные в результате численного моделирования и вычисленные согласно полученным выше аналитическим оценкам, для небольших значений N и $R = 20$ мм, $\sigma = 0.3$ мм. Отметим, что характер изменения приведенных зависимостей при вариациях R и σ близок к представленному нами в работе [5]. Абсолютные значения оцениваемых параметров, использовавшиеся при расчетах, получаются из аналитических оценок для относительных величин путем следующих замен: $\Delta R \rightarrow R\Delta R$, $\Delta R^2 \rightarrow R^2\Delta R^2$, $x_0 \rightarrow Rx_0$, $y_0 \rightarrow Ry_0$, $\sigma \rightarrow R\sigma$. Поведение показанных на этих рисунках зависимостей при больших значениях N не представляет интереса из-за значительных величин смещений оцениваемых параметров, присущих рассматриваемому методу аппроксимации. Для удобства сравнения оценок (7) и (8) на рис. 2 приведены зависимости для параметра $\Delta R_1 = \sqrt{\langle R^2 \rangle} - R$.

Из рис. 1 следует, что при $\theta_0 < 180^\circ$ минимальное значение ΔR достигается при $N = 4$. Для ΔR^2 или ΔR_1 (рис. 2) наблюдаются довольно близкие результаты при $N = 4$ и $N = 5$, отличающиеся знаком, что позволяет использовать при получении малосмещенных оценок средние значения оцениваемых параметров для двух различных значений N . Результаты, подтверждающие эффективность применения такой комбинированной схемы оценки, представлены на рис. 3 для смещения $\Delta R_{45} = \sqrt{(\langle R_4^2 \rangle + \langle R_5^2 \rangle)/2} - R$, где нижние индексы соответствуют четырех- и пятиточечной схеме аппроксимации. Из рис. 3 следует, что комбинированная схема обеспечивает получение практически несмещенных оценок для квадрата радиуса окружности при различных значениях θ_0 . Незначительные для практических приложений отклонения расчетных данных от аналитических оценок для малых значений θ_0 обусловлены возрастанием дисперсии и погрешностей численных вычислений при уменьшении центрального угла аппроксимирующей дуги θ_0 .

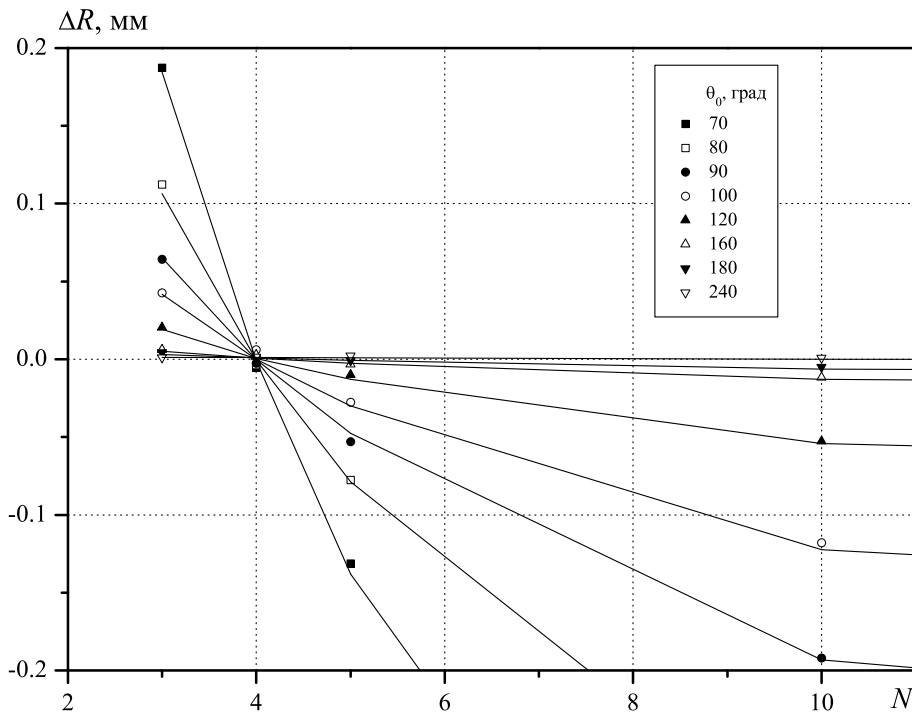


Рис. 1. Зависимости смещения ΔR оценки радиуса окружности от количества аппроксимируемых точек N при различных значениях центрального угла дуги θ_0 : сплошные линии — аналитические оценки, символы — результаты моделирования

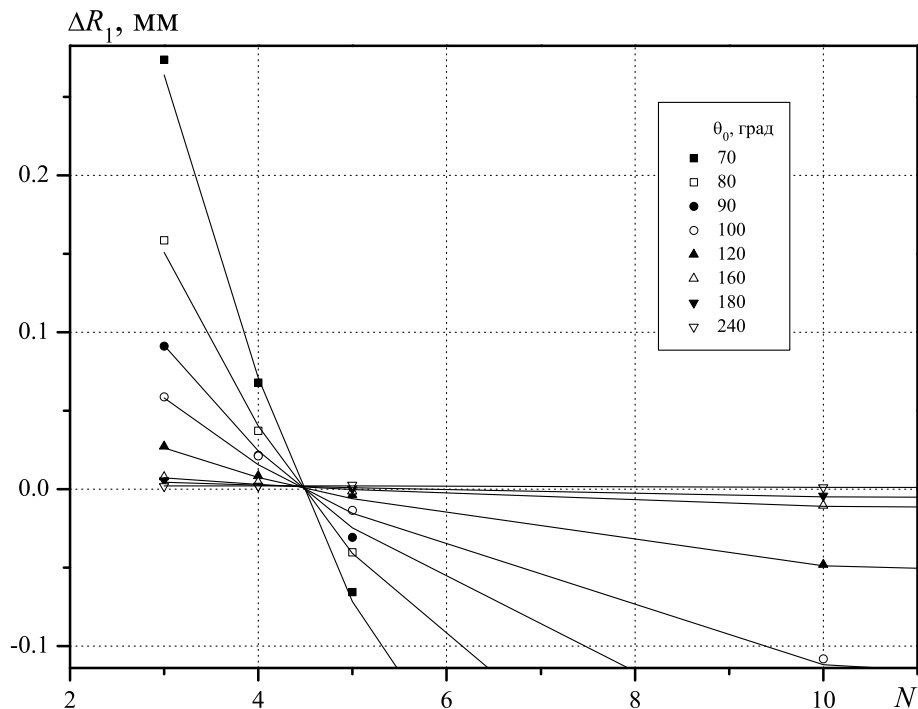


Рис. 2. Зависимости параметра $\Delta R_1 = \sqrt{\langle R^2 \rangle} - R$ от количества аппроксимируемых точек N при различных значениях центрального угла дуги θ_0 : сплошные линии — аналитические оценки, символы — результаты моделирования

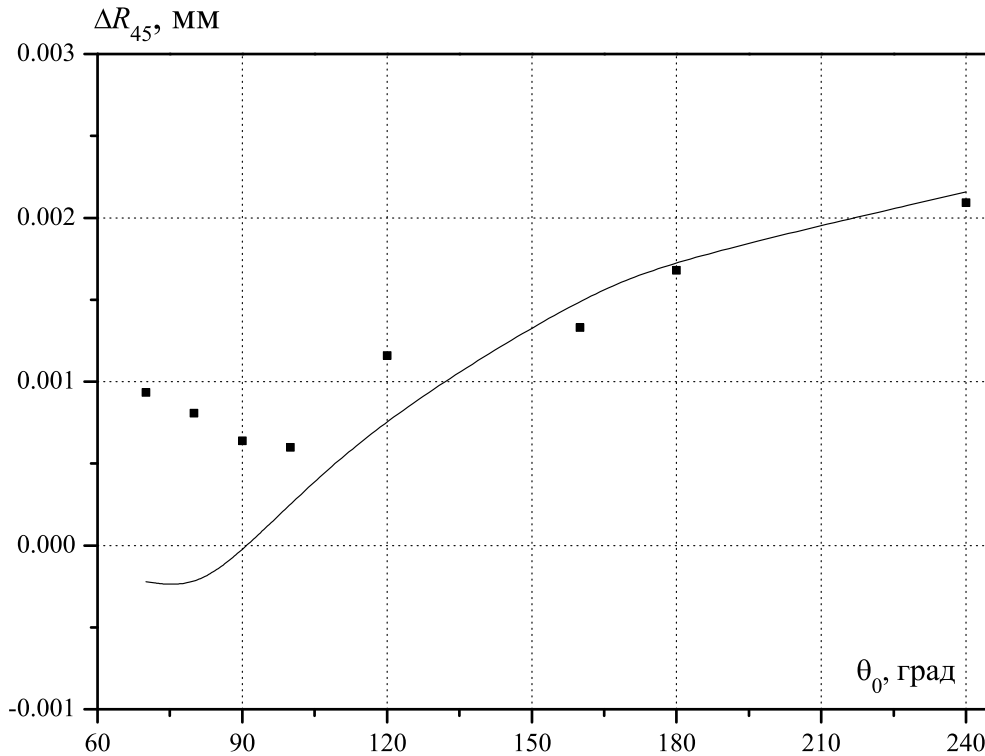


Рис. 3. Зависимости смещения ΔR_{45} при комбинированной схеме оценки радиуса окружности от центрального угла дуги θ_0 : сплошная линия — аналитические оценки, символы — результаты моделирования

Расчеты показывают, что введение дополнительного шума в угловое распределение точек со среднеквадратичным отклонением (СКО) в несколько градусов слабо сказывается на полученных результатах.

При выводе выражений для оценок параметров предполагалось симметричное относительно оси x расположение аппроксимируемых точек, при этом не накладывалось никаких ограничений на угловые координаты точек. Полученные соотношения поэтому могут быть использованы для исследования зависимости оцениваемых параметров от вариаций углового положения точек. Наиболее интересными представляются случаи с малым количеством аппроксимируемых точек $N = 4$ и $N = 5$, обеспечивающими достаточно малое смещение параметров при значениях $\theta_0 < 180^\circ$. На рис. 4 и 5 представлены данные, соответствующие фиксированному угловому положению крайних (при $|\theta| = \theta_0/2$) и средней (при $N = 5, \theta = 0$) точек в зависимости от углового отклонения φ внутренних точек от крайних. На графиках приведены результаты численного моделирования в сравнении с данными расчетов, выполненных с использованием полученных аналитических оценок.

Из рис. 4 следует, что с приближением внутренних аппроксимируемых точек к крайним смещение и СКО-оценки радиуса для $N = 4$ резко возрастают, в то время как для $N = 5$ эти зависимости более слабые. При выбранном значении $\theta_0 = 90^\circ$ минимальное по абсолютной величине значение смещения при $N = 4$ достигается в окрестности угла $\varphi = 30^\circ$, соответствующего равномерному угловому распределению точек, и остается достаточно малым при $\varphi > 20^\circ$. Для $N = 5$ смещение оценки радиуса при $\varphi > 20^\circ$ прак-

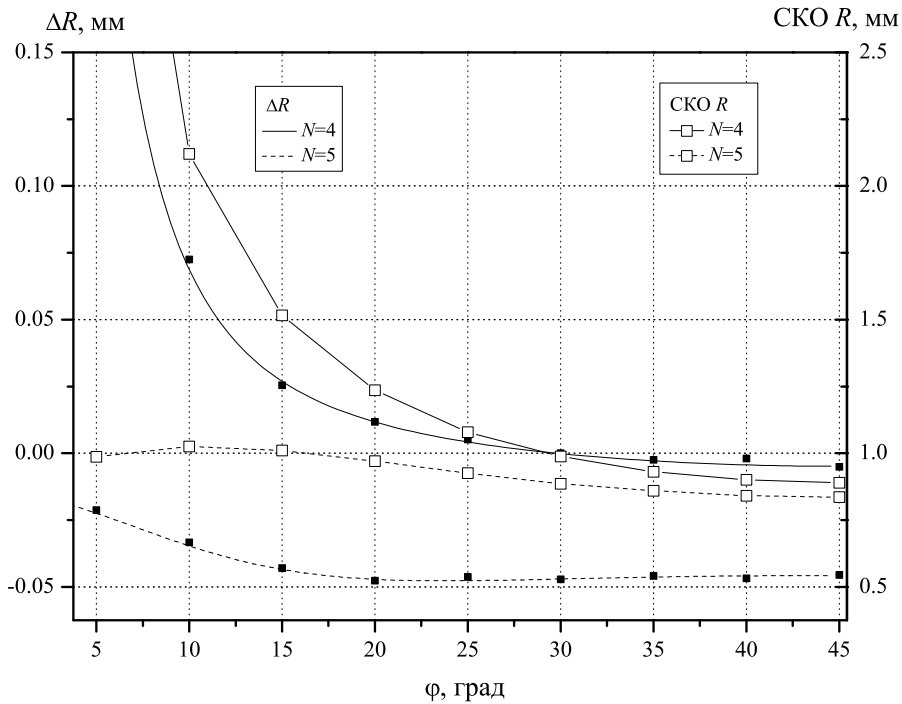


Рис. 4. Зависимости смещения ΔR и СКО-оценки радиуса окружности от углового отклонения φ внутренних аппроксимируемых точек от крайних при $N = 4$, $N = 5$ и $\theta_0 = 90^\circ$: символы — результаты моделирования; сплошные и штриховые линии для ΔR — аналитические оценки

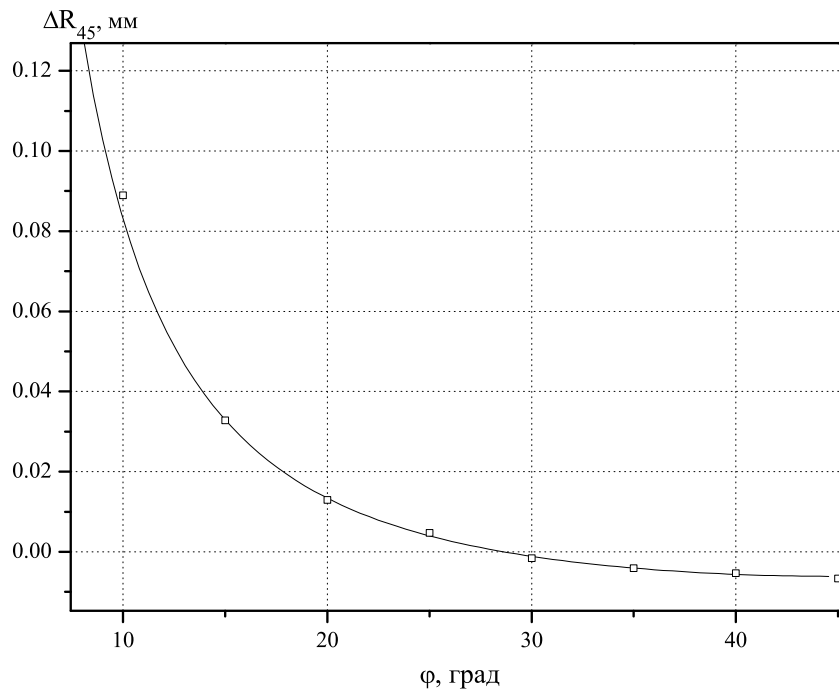


Рис. 5. Зависимости смещения ΔR_{45} при комбинированной схеме оценки радиуса окружности от углового отклонения φ внутренних аппроксимируемых точек от крайних при одинаковых значениях φ для $N = 4$ и $N = 5$: сплошная линия — аналитические оценки, символы — результаты моделирования

тически постоянно и по абсолютной величине существенно превосходит аналогичный показатель для $N = 4$.

Зависимости смещения ΔR_{45} от φ показаны на рис. 5. Отметим, что на этом рисунке, в отличие от рис. 3, угловые положения внутренних точек для $N = 4$ и $N = 5$ одинаковы, и аппроксимируемые выборки точек для различных N отличаются лишь центральной точкой при $\theta = 0$. Для $\theta_0 = 90^\circ$ минимальное смещение достигается в окрестности значения $\varphi = 30^\circ$, соответствующего равномерному угловому распределению точек при $N = 4$.

Расчеты показывают, что наличие шумовой составляющей в несколько градусов в угловом положении точек слабо влияет на характер представленных на рис. 4 и 5 зависимостей. Значительные изменения имеют место лишь для $N = 4$ при близком расположении внутренних и крайних точек, соответствующем малым значениям φ .

Несмещенные оценки ΔR_{45} в комбинированной схеме могут быть получены для различных сочетаний значений углов $\varphi = \varphi_4$ и $\varphi = \varphi_5$, соответствующих $N = 4$ и $N = 5$, что поясняется рис. 6. На этом рисунке показаны зависимости $\langle \Delta R_4^2 \rangle$ и $\langle -\Delta R_5^2 \rangle$ от φ для $N = 4$ и $N = 5$, из которых следует, что компенсация смещения оценки достигается для любой пары значений углов φ , соответствующих одинаковым значениям $\Delta R_c^2 = \langle \Delta R_4^2 \rangle = \langle -\Delta R_5^2 \rangle$ из заштрихованной области. В частности, значению $\Delta R_c^2 = 0.8$ соответствуют два угла $\varphi_4 = 34.7^\circ$ и $\varphi_5 = 17.4^\circ$. Заметим, что при одина-

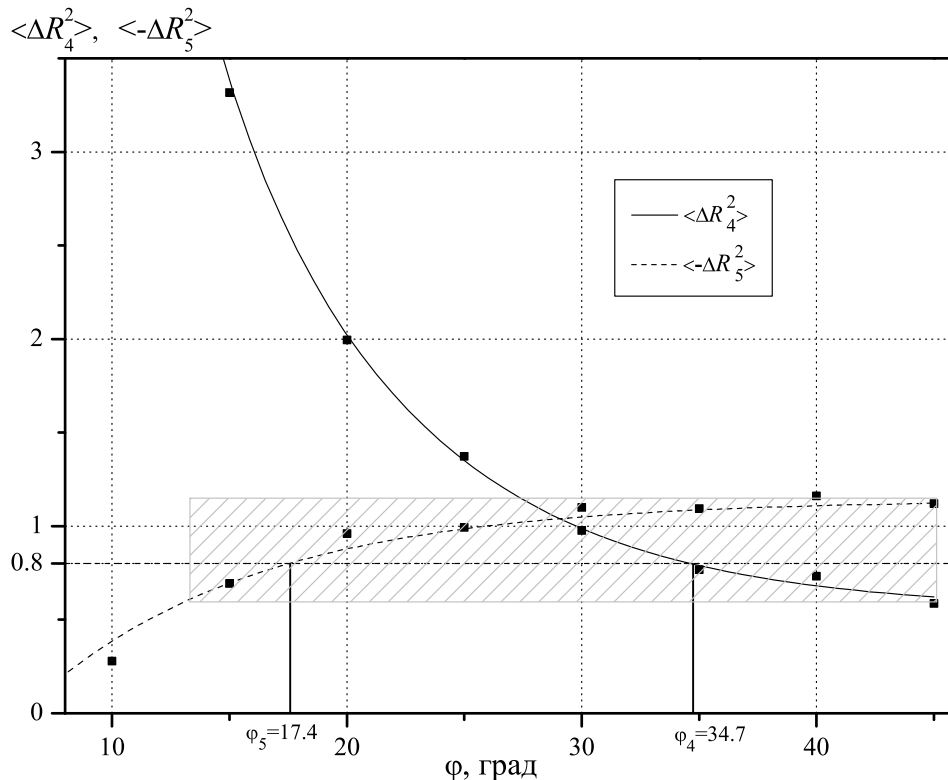


Рис. 6. Зависимости смещений $\langle \Delta R_4^2 \rangle$ и $\langle -\Delta R_5^2 \rangle$ при комбинированной схеме оценки радиуса окружности от углового отклонения φ внутренних аппроксимируемых точек от крайних для $N = 4$ и $N = 5$: сплошные линии — аналитические оценки, символы — результаты моделирования

ковом угловом расположении внутренних точек $\varphi = \varphi_5 = 17.4^\circ$, как следует из рис. 5, смещение ΔR_{45} существенно превосходит нулевое значение и составляет около 0.02 мм.

Приведенные выше результаты соответствуют независимому распределению шума координат аппроксимируемых точек по R и θ , что подтверждает общие закономерности, полученные нами ранее для независимого закона распределения шума по x - и y -координатам [5]. Выводы относительно величин смещений оценок параметров окружности, обеспечиваемые для малых значений N при МНК2-аппроксимации, остаются справедливыми и в случае зависимости дисперсии шума по координатам x и y , отличной от (6). Интерес представляют, в частности, задачи, связанные с обработкой изображений и измерением координат точек границ объектов (контуров) вдоль скан-линий, соответствующих анализируемым сечениям изображения $x = x_c$ или $y = y_c$. Расчеты показывают, что, в предположении пропорциональной зависимости дисперсии измеряемой координаты границы от ширины контура изображения в анализируемом сечении, величины смещений и дисперсии МНК2-оценок для малых N существенно возрастают лишь с приближением скан-линий к положениям касательных к границе.

Заключение

Полученные аналитические оценки хорошо совпадают с результатами численного моделирования и подтверждают сделанные нами ранее выводы об эффективности применения неитерационного МНК-оценивания и четырехточечной схемы аппроксимации для оценки радиуса и координат центра аппроксимирующей окружности [5]. Метод аппроксимации МНК2 при $N = 4$ обеспечивает минимальные смещения оценок, близкие к нулевым значениям, и может применяться в условиях ограниченных вычислительных ресурсов для аппроксимации дуги окружности. Справедливость данного положения подтверждается результатами численного моделирования различных практически важных координатных зависимостей дисперсии шума координат аппроксимируемых точек.

Приведенные в работе аналитические оценки могут использоваться для исследования зависимости оцениваемых параметров от углового положения точек и оптимизации схемы аппроксимации.

Предложенная комбинированная схема аппроксимации по выборкам из различного количества исходных точек позволяет получать несмещенные оценки среднего квадрата радиуса окружности и может применяться в различных прикладных задачах для оценки как радиуса, так и площади круга, ограниченного аппроксимирующей окружностью. В частности, применение такой схемы в системах технического зрения, используемых при автоматическом выращивании кристаллов, позволяет оперативно контролировать площадь кристалла в процессе выращивания, что необходимо для реализации алгоритмов автоматического регулирования и получения кристаллов с заданной геометрией.

Автор выражает признательность В.П. Косых за полезные дискуссии.

Список литературы

- [1] БАРАНОВ В.Г., ИЛЬЯСОВ Н.Ю., КОТЛЯР Р.В. и др. Бесконтактное измерение радиуса кривизны сферических поверхностей // Распознавание образов и анализ изображений: новые информационные технологии (РОАИ-5-2000). Тр. Междунар. конф. Самара, 2000. Т. 3. С. 458–462.

- [2] ГРИБОВ М.Г., ХАЧУМОВ В.М. Определение геометрических параметров объектов по растровым изображениям // Автометрия. 2001. № 1. С. 40–49.
- [3] DEMEYERE M., DEREINE E., EUGENE C., NAYDENOV V. Measurement of cylindrical objects through laser telemetry: application to a new forest caliper // IEEE Trans. Instrument. Measur. 2002. Vol. 51, N. 4. P. 645–649.
- [4] МИХЛЯЕВ S.V. Method for measuring the diameter of a growing crystal // Pattern Recogn. Image Analysis. 2005. Vol. 15, N. 4. P. 690–693.
- [5] МИХЛЯЕВ С.В. Аппроксимация окружности при измерении диаметра кристалла // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12, № 1. С. 61–71.
- [6] ZHANG Z. Parameter estimation techniques: a tutorial with application to conic fitting // Image Vision Comput. 1997. Vol. 15, N. 1. P. 59–76.
- [7] MARQUARDT D. An Algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters // SIAM J. Appl. Math. 1963. Vol. 11. P. 431–441.
- [8] LANDAU U.M. Estimation of a circular arc center and its radius // Comput. Vision, Graphics Image Proces. 1987. Vol. 38. P. 317–326.
- [9] SPATH H. Least-squares fitting by circles // Comput. 1996. Vol. 57, N. 2. P. 179–185.
- [10] CHERNOV N., LESORT C. Least squares fitting of circles // J. Math. Imaging Vision. 2005. Vol. 23. P. 239–251.

Поступила в редакцию 26 июня 2007 г.